集合論

独立性証明への案内

Set Theory,
An introduction to
Independence Proofs

ケネス・キューネン 著
藤田博司 訳

日本評論社

まえがき

この本は公理的集合論における相対的無矛盾性証明への案内であり，大学院でこの分野の最初の課程のテキストとして使うことを想定しています．この本があれば，公理論に関係の深い研究をしている数学者たちにとってこの分野が学びやすいものになると期待しています．読者はすでに基数と順序数について初歩的な知識をもっているものと想定していますが，論理学について特別な訓練をうけている必要はありません．

この本の原稿を改善する提案をしてくださったたくさんの方々にお礼を申しあげます．なかでも，ジョン・ボールドウィン，エリク・ヴァン・ダウエン，ピーター・ナイコシュ，そしてダン・ベレマンに感謝したいと思います．とりわけ，ウィスコンシン大学でこの原稿をもとにした講義を試みてくれたジョン・バーワイズに感謝します．

目　次

序章

集合論は数学の基礎です．あらゆる数学的な概念が集合と要素という素朴で基本的な観念を用いて定義されています．公理的集合論は，これらの素朴で基本的な観念をめぐるいくつかの簡潔な公理を定式化することによって，「明らかに真な」集合論的な原理を把握しようとします．およそこれまでに知られている数学はすべて，これらの公理から導き出してくることができます．しかし，なかにはこれらの公理では決着のつかない問題もあります．まさにそのことが，この本の主題です．

§1 無矛盾性

ZFC, すなわち選択公理 (Axiom of Choice, AC) を含むツェルメロとフレンケルの集合論という特定の公理系にもとづいて議論することにしましょう．言明(げんめい) ϕ とその否定 $\neg\phi$ のどちらも ZFC で証明できないとき，言明 ϕ が ZFC と独立であるといいます．これは，いいかえると，ZFC$+\neg\phi$ と ZFC$+\phi$ がどちらも矛盾を含まない (**無矛盾**である) というのと同じことです．そのような言明 ϕ の例としてもっともよく知られているのが連続体仮説 (Continuum Hypothesis, CH) ですが，近年，数学のいろいろな分野の多くの言明が ZFC と独立であることが示されました．

訳注：言明とは耳慣れない言葉かもしれません．英語の "statement" の訳語で，なんらかの判断を言葉で表現したものを意味する論理学用語です．数学の用語としては「命題」とほぼ同じと考えてよいでしょう．言明の集まり S が矛盾を含むとは，S から出発すると，なんらかの言明 ϕ とその否定 $\neg\phi$ の両方が証明できるということを意味します．矛盾を含む理論はすべての言明を《証明》してしまうので，結局はまったく無意味なものとなります．

この本では，ある言明が ZFC と矛盾しないことを示すための技法を学びます．この技法が ϕ と $\neg\phi$ の両方にうまく適用できれば，ϕ が独立であることが示されるわけです．そこで，(ϕ と $\neg\phi$ のそれぞれに対応した) 二つの別個の議論が，かならず必要となります．無矛盾性はわかっているけれども独立性のほうは決着がついて

いないような言明も，たくさんあります．

ZFC と独立であることがわかっている言明のうちには，集合論でよく引用される原理が含まれています．たとえば CH, ¬CH, マーティンの公理，ススリンの仮説，◊ などがそうです．解析学やトポロジーの抽象性の高い分野で仕事をする人たちは，こうした原理をよく知っているし，しばしばそれらを利用します．無矛盾な言明からの帰結もやはり無矛盾なので，この方法で多くの無矛盾性証明が得られます．いっぽう，集合論の心得のある数学者は，いままでに知られている《よく引用される》原理から導かれないような個別の言明の無矛盾性を証明するために，しばしば基本的な方法に立ち返ります．

この本の目的は，いろいろな言明が ZFC と無矛盾であることを示すための基本的な方法を解説することです．多くの《よく引用される》原理の無矛盾性の証明を述べましたが，もっと重要なこととして，望むらくは，数学者たちが新しい無矛盾性証明を必要とするとき，自力でそれを実行できるようになってほしいものです．

§2　必要な予備知識

公理的集合論の展開について，フォンノイマン流の順序数と基数の性質あたりまで，読者はすでに知っているものと仮定します．この題材はたとえば [Enderton 1977] や [Halmos 1960] のような集合論のテキストに含まれていますし，たとえば [Chang–Keisler 1973] や [Kelly 1955] のような他の分野の数学書に，付録として含まれていることもあります．こうした題材についてはこの本の第 I 章でも復習します．

訳注：基数や順序数の概念についての初等的な集合論の文献ならば，日本語で書かれたものも枚挙にいとまがありません．ここでは，定評のある教科書 [松坂 1967] と，演習問題の豊富な [篠田&米澤 1995]，論理的な背景の説明が周到な [田中&鈴木 2004] をあげておきます．

読者が ZFC という特定の公理系に慣れている必要はありません．ZFC とは真のクラスの形式上の扱い方が異なるような体系 (第 I 章第 12 節を参照) が他にいくつかありますが，そのうちのどれかに慣れている人には ZFC も難なく扱えるはずです．ただし，ZFC では，真のクラスは形式上は存在せず，変数はすべて集合をあらわす，ということを心に留めておく必要はあるでしょう．

どの定理を証明するのにどの公理が必要かなどといった，公理論の細部についての蘊蓄(うんちく)などは必要ありません．そうしたことが幾分か重要であるようなごく少数のケースについては，第 I 章で詳しく扱います．しかしそれよりは，位相空間論

や測度論の講義で出会うような，実際の数学の中での集合論の応用の心得が必要となります．

論理学上の予備知識には融通(ゆうづう)をきかせてあります．公理系の無矛盾性に関連した結果を扱う本を書く以上，論理学にまったく触れずに済ますことはできません．論理学の素養のない読者が独立性証明を理解するのに必要な，背景となる題材を概説しておきました．慣れないうちは，私たちの方法に十分な数学的確実性があるとは信じられないかもしれません — 大学の学部に論理学の初歩の適切な講義があれば，こうした疑念は一掃できるのですが —．この本の主題をめぐって，より高いレベルにおいて論理学そのものを学ぶ人たちの興味をひくようないろいろな基礎的な問題が提起されます．そうした話題はいくつかの章の補遺に集めておきました．これらの補遺では，その時々の個別の議論に必要な論理学の知識を，遠慮なく仮定しました．

§3 概要

第 I 章には，基本的な論理学の知識と，ZFC の公理のうち基礎の公理 (正則性の公理) を除いた部分から展開される理論の概略を収録しました．ここでとりあげる題材の多くは復習なので，証明は大幅に割愛してあります．いろいろな定理を証明する上で，特定の公理が (とりわけ選択公理や冪集合の公理が) 必要とされないという事実には並々ならぬ関心を払い，これらの公理が必要となる箇所をいちいち明示しておきました．こうした考察は ZFC で数学を展開するうえでは重要ではありませんが，独立性証明に立ち入ったときには役にたつのです．

第 II 章では組み合わせ論的な集合論に特有の話題を扱いました．この章には，第 VI 章以降で必要となる組み合わせ論的な補題を用意するという一面もありますが，主な目的はむしろ，読者に ZFC との独立性の証明を試みてもらえるような集合論的な数々の問題を紹介することです．

私たちは，第 VII 章での強制法の扱いを第 II 章のマーティンの公理についての議論から出発して行なうことで，伝統と袂(たもと)を分かつことにしました．これには強制法の扱いの数学的に難しい部分をメタ数学的な難しさから切り離せるという利点があります．そのいっぽうで，マーティンの公理について勉強することなく強制法を学びたいという読者が，もしもいたとすれば，その人には余計な手間をかけさせることになります．

基礎の公理については第 III 章で議論します．数学で使われることはまったくありませんが，この公理のおかげで，集合論の宇宙のイメージがより明快になります．

第 IV 章では無矛盾性証明の基本的な方法論を述べます．これには，内部モデル，相対化，絶対性といった題材が含まれます．また，反映原理とそれに関連する諸結果についても，ここで議論します．

第 V 章で，ZFC 上の定義可能性という論理学的な観念の形式化について論じます．このアイディアを用いて，第 VI 章で構成可能的集合のクラス **L** を定義します．第 VI 章ではまた，一般連続体仮説が **L** で成立していることを示すことによって，この仮説の無矛盾性を確立します．さらに，組み合わせ論的原理 $\diamondsuit$ と $\diamondsuit^+$ が **L** で真であることも示します．

第 VII 章で強制法を導入して，¬CH やこれに関連した基数の算術のいろいろな言明の無矛盾性を示します．第 VIII 章は反復強制法を扱い，マーティンの公理の ¬CH との無矛盾性を示します．

§4　この本の読み方

定理，補題，定義はすべて節ごとにまとめて番号づけしてあります．ローマ数字で章の番号を明記していない参照は同じ章内での参照です．

章末の演習問題は，単なる事項の確認から，その章の内容のさらなる展開までさまざまです．難しい問題には星印 (*) をつけてあります．演習問題で扱った題材は先の章を理解するためには必要ではありませんが，演習問題を解くのにそれより前の演習問題の結果が必要になることはあります．いくつかの章の演習問題の量は，たいていの読者にとって解いてみようという気になる分量よりずっと多いかもしれません．

表紙から裏表紙をめざして一直線に読まねばならないとは限りません．特に第 II 章の題材は第 VI 章の終わりあたりまで使われることがないので，まず第 II 章をまるきり飛ばして先へ進み，のちほど必要に応じて戻ってきてもよいのです．それに，強制法を理解するだけなら構成可能性に関する知識はなくてもよいので，第 V 章と第 VI 章を読まなくても第 VII 章と第 VIII 章を読むことができます．ただし，その場合には，GCH のモデルが存在することを証明抜きで信じてもらう必要があります．各章の補遺を読まなくても，話のつながりが悪くなることはありません．

§5　この本に書かなかったこと

この本を書くにあたって私たちは二つの目標を設定しました．第一に，基数と順序数を扱った初等的な集合論のテキストと最先端の文献との間の橋渡しをしたいと望みました．第二に，古典的な組み合わせ集合論と現代的な独立性証明の相互作用を強調した書き方をしたいと思いました．集合論に数多(あまた)ある重要な話題のうち，こうした目標にとって二次的なものは割愛してしまいました．

書物や論説などの文献で十分に扱われていると思われるいろいろのトピックはたびたび割愛しています．巨大基数については少ししか触れていません．興味のある方は [Drake 1974] や [Solovay–Reinhardt–Kanamori 1978] を参照するとよいでしょう．また，**L** の微細構造論についても扱っていません．これについては [Devlin 1973] を見てください．

数学基礎論の素養が必要なトピックを扱うことも避けました．特に，巨大基数のモデル論的な応用法 ([Drake 1974] を参照)，記述集合論の諸結果 ([Martin 1977] や [Moschovakis 1980] を参照)，あるいは両者の関連などはこの本では論じません．

選択公理 AC の扱いは次のとおりです．この本では，AC が他の公理から導かれないこと (第 VII 章の演習問題 E4 を参照) と，他の公理によって反証されないこと (第 V 章の 2.14 と第 VI 章の 4.9 を参照) の証明をしており，それでもなお，AC を基本的な公理の一つに加えています．選択公理のない集合論については，詳しくは [Jech 1973] を見てください．

§6　参照について

この本は教科書であって学術研究書ではありませんから，証明されるすべての結果の参照文献をあげることはしません．文献リストは，研究業績の優先権を明示することではなく，もっと進んで勉強したい人におすすめの文献を紹介することを主な目的としています．自分の名前がもっとたくさん載っていていいはずなんだがと悔しい思いをするかもしれない数学者のみなさんには，ここでおわびしておきます．簡単な演習問題の数々を別にすれば，この本で述べられている結果で著者の独創によるものはなにもありません．

§7　公理

のちの参照の便宜のために，ここで ZFC やその他の関連する理論の公理を挙げておきます．第 I 章と第 III 章に，これらに関する詳細に立ち入った解説があります．それぞれの公理のあとに，第 I 章あるいは第 III 章の，その公理が最初にあらわれる節を示しておきます．

公理 0. 集合の存在 (第 I 章第 5 節).

$$\exists x\,(x=x).$$

公理 1. 外延性 (第 I 章第 5 節).

$$\forall x\,\forall y\,(\forall z\,(z\in x\leftrightarrow z\in y)\rightarrow x=y).$$

公理 2. 基礎 (第 III 章第 4 節).

$$\forall x\,[\exists y\,(y\in x)\rightarrow\exists y\,(y\in x\wedge\neg\exists z\,(z\in x\wedge z\in y))].$$

公理 3. 内包性図式 (第 I 章第 5 節). 任意の式 ϕ について，その自由変数を $x, z, w_1,\ldots,w_n$ (あるいはその一部) とするとき，

$$\forall z\,\forall w_1,\ldots,w_n\,\exists y\forall x\,(x\in y\leftrightarrow x\in z\wedge\phi).$$

公理 4. 対 (第 I 章第 6 節).

$$\forall x\,\forall y\,\exists z\,(x\in z\wedge y\in z).$$

公理 5. 和集合 (第 I 章第 6 節).

$$\forall\mathcal{F}\,\exists A\,\forall Y\,\forall x\,(x\in Y\wedge Y\in\mathcal{F}\rightarrow x\in A).$$

公理 6. 置換図式 (第 I 章第 6 節). 任意の式 ϕ について，その自由変数を $x, y, A, w_1,\ldots,w_n$ (あるいはその一部) とするとき，

$$\forall A\,\forall w_1,\ldots,w_n\,[\forall x\in A\,\exists!y\,\phi\rightarrow\exists Y\,\forall x\in A\,\exists y\in Y\,\phi].$$

訳注：本文中に説明してありませんが，$\exists!x$ は “一意的に定まる x について次のことが成り立つ”，“次のことが成り立つ x がただ一つ存在する” という意味内容を表わす省略記法です．$\exists!x\,\psi(x)$ とは，$\exists x\,\psi(x)\wedge\forall x\,\forall y\,(\psi(x)\wedge\psi(y)\rightarrow x=y)$ の略記ということになります．

公理 0 から公理 6 までに基づいて，$\subset$ (包含関係), 0 (空集合), S (後続者; $S(x)=$

$x \cup \{x\}$), それから，整列順序といった概念を定義することができます．そのうえで，残りの公理が呈示されます．

公理 7. 無限 (第 I 章第 7 節).

$$\exists x\,(0 \in x \wedge \forall y \in x\,(S(y) \in x)).$$

公理 8. 冪集合 (第 I 章第 10 節).

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\,(z \subset x \rightarrow z \in y).$$

公理 9. 選択 (第 I 章第 6 節).

$$\forall A \exists R(R \text{ は } A \text{ を整列順序づけする}).$$

公理 0 から公理 9 までからなる体系が ZFC です．

ZFC から導き出されるなんらかの結果が，実際には ZFC のすべてを必要としていないことを確認する作業が，技術的な理由からしばしば重要な意味をもちます．この理由は第 I 章第 4 節の終わりあたりで議論することにして，ここでは，よく使われる ZFC の部分体系の略称を列挙しておきます．ZF は公理 0 から公理 8 まで．ZF − P は公理 0 から公理 7 まで．ZFC − P は公理 0 から公理 7 までと公理 9 からなります．ZFC^-, ZF^-, $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$, $\mathrm{ZFC}^- - \mathrm{P}$ はそれぞれ対応する理論 ZFC, ZF, ZF − P, ZFC − P から公理 2 (基礎の公理) を除いたものです．他にも ZFC の弱い部分体系をなす理論がありますが，たとえば $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ は $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$ から無限の公理を除いたものだという具合で，その略称の意味は自ずから明らかでしょう．

第 I 章

公理的集合論の基礎

序章第 7 節で列挙した公理あるいはそれと類似の原理に基づいて数学を展開する手順について，読者がある程度知っているものと，この本では仮定しています．この章ではこうした数学の展開を復習します．その際，あとの作業で重要な意味をもってくる基礎的な論点を強調しています．

§1　公理を使う理由は?

たいていの数学者は，自分が使っている集合論を明文化しておく必要を感じたりしないものです．どういった原理が疑いの余地なく正しくて，どれが疑問の余地があるものなのかは，誰しもおおむね弁(わきま)えています．たとえば，連続体仮説 (Continuum Hypothesis, CH) は基本的な原理というより未解決予想の一種だということについては，私たちの見解は一致しています．それに私たち数学者は，自分たちの証明した定理が，余分な仮定なしで証明されたものかそれとも CH の (いまだ確かめられていない) 真偽に依存するものなのか，というようなことは，とりたてて形式的公理化の助けなど借りなくても判断することができます．

しかしながら，私たちは本書において《CH は通常の集合論の諸原理によっては証明することも反証することもできない》といった形の結果を確立しようとしているのです．この言明を正確なものにするためには，そもそも《集合論の諸原理》とはなにかをはっきりさせておかなければなりません．本書では序章の第 7 節で列挙した ZFC がその《諸原理》だと決めてあります．そうすると，私たちの主張は《CH は ZFC の公理によって証明することも反証することもできない》という，きちんと意味の定まった言明となります．そしてこの言明は第 VI 章と第 VII

章で証明されます．

そうすると今度は，ZFC の公理によって，《通常の集合論の諸原理》のすべてが，はたして言い尽くされているだろうか，という問題が出てきます．この第 I 章では，現行の普通の数学がいかにして ZFC の公理から導き出されるかがわかる程度には集合論を展開していますが，それでもやはり，ZFC から導き出せないなにか《明らかに真な》集合論的原理を後世の数学者たちが考え出すことはありえますし，そうした原理から CH の真偽が決定されるという可能性もあります．

現時点でも，私たちが使っている集合論の諸原理を公理化する方法は，ZFC に限らずたくさんあります (第 I 章第 12 節を参照)．本書の方法論をこれらの体系に合うよう手直しするのはたやすいことですが，ZFC を使うほうが，技術的な細部が少しばかり簡明になります．

§2　論理を形式化する理由は?

自分の論証に用いられる公理を書き留めておくというアイディアは，ユークリッドにまで遡るものですから，とりたてて革新的とはいえません．数学ではふつう，公理はギリシャ語なり英語なりの普段使っている言語で言い表わされますが，この本では**一階述語計算**と呼ばれる人工的な形式化された言語で公理を述べています．形式化された言語の特徴は，言語要素の形成に関するこまごまとした規則が定められている点にあります．このやり方を採用するおもな理由は二つあります．

第一の理由． 形式化された論理は集合論の公理を正確に言い表わすために必要です．たとえば，ZFC の公理の一種に内包性公理 (Comprehension Axiom) と呼ばれるものがあり，それは

$$\{x \in A : P(x)\}$$

という形の集合が存在することを主張します．ここで A は前もって与えられているなんらかの集合，$P(x)$ は x の任意の属性です．属性とはなんのことでしょうか? 言葉できちんと明確に表現された，変数 x をめぐる主張のこと．直観的にいえばそういうことです．それでは，《x は幸せだ》は属性でしょうか? この例から明らかなように，どういうものをここでいう属性と認めるか，きちんとした定義を示す必要があります．そこで，$P(x)$ が私たちの定める形式化された言語で表現できることを要請することにします．というのも，この形式化された言語は数学的な意味内容を表現する能力が十分にあるいっぽうで，数学的でない意味内容は表現できな

いからです．属性という考えを不用意に用いることがトラブルのもとになるという事実は，日常の言語による推論に見られる次のような《パラドックス》に明らかに示されています：40 文字以内の表現で定義できない最小の自然数 n を考えましょう．しかし，ご覧のとおり私はたったいまそれを 40 文字以内の表現で定義してしまいました．

第二の理由． このようにして ZFC が定義できたとして，では CH が ZFC で証明できない，とはどういうことでしょうか．大まかにいえば，ZFC から推論の正当な規則によって CH を導き出してくる方法がないということです．**形式的な推論**という概念を用いれば，この考えを精密なものにできます．

形式化された論理学の展開についての詳細はその分野のテキスト，たとえば [Enderton 1972] [Kleene 1952] [Shoenfield 1967] などを見てもらうことにして，ここでは概略をかいつまんで述べるにとどめます．

私たちの用いる形式化された言語を正確に定式化することは，簡単なことで ZFC の公理を言い表わすために必要なことでもありますから，ここできちんと正確な定義を述べます．形式的な推論の規則については，手がかりを示すにとどめます．推論の規則を定義することもさほど難しくはないのですが，数学のいろいろな論法が，このように前もって定められた規則だけを用いて形式化できることを確かめるには，少しばかり手間がかかります．

私たちの用いる形式化された言語の基本記号は $\wedge, \neg, \exists, (,), \in, =$, それと各自然数 j に対応した v_j です．直観的には $\wedge$ は《かつ》，$\neg$ は《否定》，$\exists$ は《ある ... について》，を意味し，$\in$ は所属関係，$=$ は等号をあらわします．$v_0, v_1, \ldots$ は変数で，カッコ (と) は表現の区切りを示すために用います．**表現**とは，基本記号の任意の有限列のことです．たとえば $)\exists\exists\neg)$ は一つの表現です．基本記号の直観的な解釈から，どんな表現が意味をなすものかわかります．そのような意味のある表現のことを，式 (または論理式) といいます．より正確には，次に掲げる規則によって作り出された表現のことを**式**と呼ぶものと定めます．

訳注： 《式》にあたる原語は “formula” です．形式化された言語で数学的言明を表現したものを数学で普通に扱う《数式》と区別する意味で《論理式》と呼ぶのですが，この本ではいわゆる数式を扱うことはないので，煩雑になるのを避けるために《論理式》という意味で単に《式》と呼ぶことにします．

(1) 任意の i, j について $v_i \in v_j$ と $v_i = v_j$ は式である．

(2) ϕ と ψ が式であれば，$(\phi)\wedge(\psi)$ と $\neg(\phi)$ と，任意の i についての $\exists v_i\,(\phi)$ もやはり式である.

したがってたとえば $\exists v_0\,(\exists v_1\,((v_0 \in v_1)\wedge(v_1 \in v_0)))$ は式です.

定義を簡単にするよう努力した結果として，カッコの使用法があらかじめ非常に厳しく制限されているので，この正式な定義は，ある意味でかなり直観とかけはなれたものになってしまっています．たとえば

$$v_0 \in v_1 \wedge \neg(v_1 \in v_0)$$

は式ではありません．私たちが定義したこの形式化された言語には，みたところもう一つ難点があって，たとえば∀ (すべての ... について) のようなまったく基本的な論理学上の概念を表現する能力を欠いているように見えます．しかし実際にはそれは問題ではありません．というのも，$\neg(\exists v_i\,(\neg(\phi)))$ が $\forall v_i\,(\phi)$ をあらわしているからです．$\vee$ (または) や $\rightarrow$ (含意) や $\leftrightarrow$ (同値) についても同じことがいえます．これらはいずれも $\wedge$ と $\neg$ を使ってあらわせるのです．長い表現をいちいち書かなくても済むように，最初から次のような略記法を用いると約束しておきましょう．

(1) $\forall v_i\,(\phi)$ を $\neg(\exists v_i\,(\neg(\phi)))$ の省略形として用いる.

(2) $(\phi)\vee(\psi)$ を $\neg(((\neg(\phi))\wedge(\neg(\psi)))$ の省略形として用いる.

(3) $(\phi)\rightarrow(\psi)$ を $(\neg(\phi))\vee(\psi)$ の省略形として用いる.

(4) $(\phi)\leftrightarrow(\psi)$ を $((\phi)\rightarrow(\psi))\wedge((\psi)\rightarrow(\phi))$ の省略形として用いる.

(5) カッコはつけ方が文脈からはっきりわかる場合には省略する.

(6) $v_i \neq v_j$ を $\neg(v_i = v_j)$ の省略形，$v_i \notin v_j$ を $\neg(v_i \in v_j)$ の省略形として用いる.

(7) 英語，ギリシャ語，ヘブライ語のアルファベットの文字 (添え字がつくこともある) を変数記号として用いる.

この (7) についてはあとでもっと詳しく説明します.

この本で用いられる略記法はこの七つの他にもあります．実際のところ，この本には，定義どおりに式と呼べるものはごくまれにしか顔を出しません．数学の慣例に従って，大部分を普通の言葉で書きながら，必要に応じて論理学的な記号を使うことにします．たとえば，

$$\exists v_0\,(\exists v_1\,(\exists v_2\,((v_0 \in v_1)\wedge(v_1 \in v_2))))$$

などと書くかわりに《$x \in y \wedge y \in z$ となるような集合 x, y, z が存在する》と言えばよいのです．内包性公理 (上記の「第 1 の理由」を参照) は，そこに出てくる属性

$P(x)$ をこの形式化された言語で表現されるものに制限してはじめて正式な言明となるわけですが，だからといって内包性公理を使うたびにいちいち $P(x)$ を表現する式を書き下す必要はないのです．

式 ϕ にあらわれる記号の連続した並びがそれ自体で一つの式をなす場合，これを ϕ の**部分式**と呼びます．たとえば次の式

$$(\exists v_0\,(v_0 \in v_1)) \wedge (\exists v_1\,(v_2 \in v_1)) \tag{1}$$

には部分式が五つあります．それは $v_0 \in v_1$, $\exists v_0\,(v_0 \in v_1)$, $v_2 \in v_1$, $\exists v_1\,(v_2 \in v_1)$，それから式 (1) そのものです．量化子 $\exists v_i$ がある箇所で使用されているとき，そこからはじまる部分式 (これは必ず一つに定まります) のことをその $\exists v_i$ の**視野**と呼びます．たとえば，式 (1) での $\exists v_0$ の視野は $\exists v_0\,(v_0 \in v_1)$ です．ある式にある変数が使用されているとき，使用されている場所がその変数に作用する量化子の視野の中であれば，その変数のその使用は**束縛されている**といいます．それ以外の場合，その変数のその使用は**自由**であるといいます．たとえば式 (1) での変数 v_1 の最初の使用は自由ですが 2 回めの使用は束縛されています．また，変数 v_0 の使用は束縛されていて，変数 v_2 の使用は自由です．

直観的にいうと，式はそこで使用されている自由な変数の属性を表現しています．束縛された変数 (ダミー変数ともいいます) は，存在に関する言明を書き表わすという，他の変数でも同じように果たせる役割のために使用されているだけです．そこで，式 (1) と

$$(\exists v_4\,(v_4 \in v_1)) \wedge (\exists v_4\,(v_2 \in v_4))$$

は，同じことを言っていることになります．

また，$\forall v_i$ は $\neg\exists v_i \neg$ の略記法ですから，これも変数 v_i を束縛します．その他の略記法 $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ はいずれも別の命題結合子を用いて定義されたものなので，変数を束縛しません．

議論の途中で式を提示する際，それを $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ のように書くことがしばしばあります．これはその式が変数 $x_1, \ldots, x_n$ に依存することを強調するためです．そのあとで別の変数 $y_1, \ldots, y_n$ を用いて $\phi(y_1, \ldots, y_n)$ と書けば，これは x_i が自由に使用されているすべての場所へ y_i を代入して得られる式をあらわしています．y_i を代入する前の x_i がすでに $\exists y_i$ という量化子の視野の中で自由に使用されていない場合に，これを**自由な代入**，あるいは**正当な代入**といいます．ここで考えているのは次のようなことです．式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ が変数 $x_1, \ldots, x_n$ について言ってい

るのとまったく同じことを，式 $\phi(y_1,\ldots,y_n)$ が変数 $y_1,\ldots,y_n$ について言っていると考えたいわけですが，もしも代入が自由でなく，どれかの y_i が ϕ に含まれる量化子で束縛されてしまうと，そのように考えることができません．今後は，一般に私たちはいつも自由な代入だけを扱うことにします．なお，$\phi(x_1,\ldots,x_n)$ という書き方をしたからといって，かならずしも全部の x_i が本当に ϕ の中で使用されている必要はないものとします．また，$\phi(x_1,\ldots,x_n)$ はその場の議論にさしあたり関係のない他の自由な変数を含んでいてもよいものとします．

例をあげましょう．$\phi(v_1,v_3)$ を上記の式 (1) のことだとします．すると $\phi(v_2,v_8)$ は

$$(\exists v_0\,(v_0\in v_2))\wedge(\exists v_1\,(v_2\in v_1))$$

となり，$\phi(v_0,v_8)$ は

$$(\exists v_0\,(v_0\in v_0))\wedge(\exists v_1\,(v_2\in v_1)) \tag{2}$$

となります．後者の代入は自由ではなく，ϕ の意味内容を歪めてしまっています．式 $\phi(v_1,v_3)$ に含まれていた《v_1 は少なくとも一個の要素をもつ》という主張が $\phi(v_0,v_8)$ では《自分自身の要素であるような集合が存在する》に変わっています．

自由な変数がない式のことを**文**といいます．直観的に言えば，文は真偽いずれかであるようななんらかの主張を言い表わしています．ZFC もある特定の文の集合です．いま，S をなんらかの文の集合，ϕ を文とするとき，$S\vdash\phi$ は直観的には，文 ϕ が S から論理的に証明できることを意味します．つまり S に属する文を公理として利用してよいけれども，$\in$ という記号に込められた《意味内容》には一切訴えずに，まったく論理的に証明できるということです．正式には，$S\vdash\phi$ とは S から ϕ への**形式的演繹**が存在することだと定義されます．形式的演繹とは，次の条件をみたす式の列 $\phi_1,\ldots,\phi_n$ のことです：末尾の ϕ_n は目的の ϕ であり，どの ϕ_i も，S に属するか，論理の公理であるか，あるいはそれに先立つ $\phi_1,\ldots,\phi_{i-1}$ から特定の推論規則によって得られるか，そのいずれかでなければなりません．ここでいう《論理の公理》だとか《推論規則》だとかは，構文上の特徴だけに注目して定義されます．

もしも S が文の空な集合であれば，$S\vdash\phi$ のことは単に $\vdash\phi$ と書かれ，このような ϕ は**論理的に正当**であるといわれます．$\vdash(\phi\leftrightarrow\psi)$ となるような ϕ と ψ は，**論理的に同値**であるといわれます．

ここで $\vdash$ のきちんとした定義のためにくどくどと言葉を費やすことはしません．

いくつかの特徴を述べるにとどめます．この章の第 4 節でもう少し議論していますのでそちらも見てください．

式 ϕ のすべての自由変数を全称記号 (∀) で量化して得られる文のことを，ϕ の**全称化**といいます．たとえば ϕ が

$$x = y \to \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y)$$

であれば，$\forall x \forall y \phi$ と $\forall y \forall x \phi$ はいずれも ϕ の全称化です．同じ式の全称化はすべてお互いに論理的に同値です．形式上，ϕ が文とは限らない式の場合，$S \vdash \phi$ とは，S から ϕ の全称化を演繹することができるという意味だと定義します．いっぽう，S に属する式が文とは限らない場合の $S \vdash \phi$ の意味については，論理の定式化のやり方によってまちまちになってしまうので，ここでは考えないことにします．

論理的に正当とか，論理的に同値ということの定義を，次のように，文とは限らない式にまで拡張しておきます．式 ϕ が論理的に正当だというのはその全称化が論理的に正当だというのと同じことだと定めます．また式 ϕ と ψ が論理的に同値であるというのは，$\phi \leftrightarrow \psi$ が論理的に正当であることだと定めます．

論理的に同値という考え方によって，束縛変数はダミー変数だという考えに正確に意味づけできます．式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ が $x_1, \ldots, x_n$ 以外に自由変数をもたないものとして，そこに使用されている束縛変数を他のものに取り替えて得られる式の一つを $\phi'(x_1, \ldots, x_n)$ と書くならば，ϕ と ϕ' は論理的に同値となります．この事実のおかげで，私たちは杜撰(ずさん)にも，英語なりギリシャ語なりヘブライ語なりのいろいろな文字を，正式な変数記号 $v_0, v_1, v_2, \ldots$ の代わりに用いてよいことになるわけです．たとえば対の公理は (序章第 7 節において)

$$\forall x \forall y \exists z\,(x \in z \wedge y \in z)$$

と表現されました．正式には，三つの番号 i, j, k をうまく選んで

$$\forall v_i \forall v_j \exists v_k\,(v_i \in v_k \wedge v_j \in v_k)$$

のように書くべきだったのですが，ここでどのような i, j, k を選んでも論理的に同値な公理が結果として得られるわけです．

その他の略記法を使うにあたっても，論理的に同値な式がたくさんあるなかで，どれを省略前の正式な形として意図しているかについては，曖昧(あいまい)なままにしておいてさしつかえありません．たとえば $\phi \wedge \psi \wedge \chi$ は $\phi \wedge (\psi \wedge \chi)$ と $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi$ のどちらの省略形にもなりえますが，両者が論理的に同値であるため，どちらを $\phi \wedge \psi \wedge$

χ の正式な形として選ぶのかを，普段は気にしなくてよいのです．

文の集合 S が**無矛盾**である (記号では $\mathrm{Con}(S)$) とは，どんな式 ϕ についても，$S\vdash\phi$ と $S\vdash\neg\phi$ の両方が同時に成立することは決してない，ということです．もしも S が矛盾を含む (無矛盾でない) ならば，どんな式 ψ についても $S\vdash\psi$ になってしまいます．そのような S はまったく興味のもてないものです．背理法による演繹を形式化しておくことにより，どんな文 ϕ についても，$S\vdash\phi$ であるとき，そしてそのときに限り，$S\cup\{\neg\phi\}$ は矛盾する，ということ，同様に，$S\vdash\neg\phi$ であるとき，そしてその時に限り $S\cup\{\phi\}$ は矛盾する，ということが証明できます．したがって，$\mathrm{ZFC}\nvdash\mathrm{CH}$ は $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\neg\mathrm{CH})$ (つまり $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}\cup\{\neg\mathrm{CH}\})$) と同値です．

直観的には，$x=y$ は x と y が同じ対象だということを意味します．このことは，等号の基本的な特徴は論理的に正当で，ZFC の公理として明示的に言い表わすには及ばないという事実に反映されています．たとえば，

$$\vdash x=y\rightarrow\forall z\,(z\in x\leftrightarrow z\in y)$$

です．いっぽう，逆は論理的に正当ではありませんが，ZFC の定理ではあります．なぜなら，その式の全称化

$$\forall x\,\forall y\,(\forall z\,(x\in z\leftrightarrow x\in y)\rightarrow x=y)$$

は ZFC の公理の一つ (外延性) ですから．

形式的演繹が有限な対象 (式の有限列) にすぎないという事実の結果として，たとえ S が無限に多くの文の集合であったとしても，一つの形式的演繹の中で言及される S の文の個数は高々有限個です．このことから次の定理が出てきます．

定理 2.1.

(a) $S\vdash\phi$ であれば，S のある有限部分集合 S_0 について $S_0\vdash\phi$ である．

(b) S が矛盾するならば，S のある有限部分集合 S_0 が矛盾する．

§3　数理哲学

この節では数学をめぐる思想の極端な立場のいくつかを風刺画ふうに紹介します．もっとまじめな議論は [Fraenkel–Bar-Hillel–Lévy 1973] [Kleene 1952] [Kreisel–Krivine 1967] などにありますのでそちらを見てください．

実在主義者 (あるいはプラトン主義者) は集合論の宇宙に私たち自身と独立した固有の実在性を認め，したがって CH は事実として真ないし偽である (現在までの

ところ，どちらかわからないけど) と信じます．この立場から見ると，ZFC の公理はまさにいくつかの明らかに真な集合論的原理を述べたものとなります．これらの公理が CH を証明できず反証もできないという事実は CH そのものの真偽とは関係がなく，うっかり ZFC に入れ忘れられていた別の明らかに真な集合論的原理によって，将来 CH に最終的な決着がつく可能性は，依然として残されているのです．そうは言っても，独立性の結果は，ZFC の他になにか有効な新原理を見つけない限り CH の真偽を決定しようとしても時間の無駄だと教えてくれるので，実在主義者といえどもこれには興味を示すはずです．

有限主義者は有限な対象だけを実在と認めるので，この立場からは有理数全体の集合を作ることすら正当化されません．実数全体の集合については言わずもがなです．したがって，CH は意味をなさない言明です．知られている限り，物理的実在の世界にある対象はたしかに有限のものばかりですから，数学者の空想した絵空事に過ぎない無限集合なんて切り捨ててしまえという有限主義の立場にも，それなりの言い分はあります．しかし，残念ながら，このような見方では近代的な数学の大部分を同じように切り捨てなくてはいけなくなります．

この両極端に賭け金を両賭けするのが形式主義者です．ZFC の形式的な展開は，厳格な有限主義者の観点からみても意味をなします．ZFC の公理は取り立ててなにかを言っているものではなく記号の有限列の一種に過ぎません．また ZFC$\vdash\phi$ という主張の意味するところは，あくまで，ある種の記号の有限列の有限列 (すなわち ϕ の形式的証明) がある，ということです．ZFC は無限に多くの公理を含むとはいえ，個々の文が ZFC の公理であるかどうかという判定は容易にできるので，ZFC$\vdash\phi$ のような表現は意味をなすのです．こうして形式主義者は実在主義者と同じように自分の数学ができるいっぽうで，無限な対象を扱っていることの正当性について問い詰められそうになったら，自分は記号の有限列をやり繰りしているだけだと答えることができるのです．

教育上は，実在主義者の観点から ZFC を展開するのがとりわけやりやすいので，この本でもそうします．つまり ZFC$\vdash\phi$ を証明するにあたっては，ZFC の公理がすべて正しいという仮定の上に立って ϕ が正しいことを主張する論証を，単刀直入に展開します．もしもあなたが形式主義者でしかも形式論理学に熟練しているならば，そうした論証を見て，どうやれば ϕ の ZFC からの形式化された証明を作れるかはおわかりになるでしょう．ある章で扱った題材を形式主義の立場からどう解釈すればよいかただちに明らかではないようなケースについては，該当する章の

補遺で詳しく取り扱っています．

形式上の理論とメタ理論をきちんと区別しておくことが重要です．ZFC を論じているときの**形式上の理論**は ZFC で，**形式的定理**とは形式化された言語の文のうち ZFC から証明可能なもののことです．形式上の理論を展開していて次のような定理を述べたとしましょう：

定理 3.1. 不可算に多くの実数がある．□

この場合，定理 3.1 を表現する形式化された言語の文が ZFC の形式的定理であることを意味します．

実際に真であることの全体が**メタ理論**を構成します．形式上の理論とメタ理論の区別をつけることは有限主義者の立場からは比較的やさしいといえます．なぜなら，有限主義者はメタ理論が厳密に有限的なものと見ているはずですから．メタ理論の結果の一例として

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\mathrm{CH})$$

という言明を考えましょう．これは二つの形式上の理論に関する言明で，私たちはこれを第 VI 章で証明します．その証明によって一つの手順が明示的かつ構成的に与えられます．その手順は，ZFC＋CH における矛盾 (に到る形式的演繹) に適用することで ZFC における矛盾 (に到る形式的演繹) を作り出せるようなものなのです．

実在主義者にとっての形式上の理論とメタ理論の区別は，もうすこし厄介です．有限主義者に言わせれば，定理 3.1 は無限的な対象について語っているので現実的な意味のない形式的定理と解釈するしかありません．実在主義者にとっては，定理 3.1 は現実の世界に関する真な言明であり，それがたまたま ZFC の形式的定理でもあるという事実は，ZFC だけを用いてその真理性を確立できるということを意味します．西暦 2100 年の実在主義者は CH が真かどうか知っているのかも知れませんが，CH も $\neg$CH も ZFC の形式的定理になることは金輪際(こんりんざい)ありません．これと同じように，到達不可能基数の存在は ZFC の形式的定理ではない (このことについては第 IV 章の 6.9 を見てください) にもかかわらず，今日の実在主義者の多くは到達不可能基数の存在を確信しています．ある実在主義者にとって《実際に真である》ことが他の人にとってもそうだとは限らないので，実在主義的メタ理論がいったいどんなものか正確に示すことはできません．しかし幸いなことに，この本ではメタ理論が有限主義的な推論をすべて含むことを仮定しておけば，それで十分なのです．

§4 解釈について

ここでは ZFC の公理がなんについて語っていると解釈したいのかという点について，非公式な議論を展開することにします．いろいろな解釈が可能だという事実が，私たちの独立性証明すべての基礎です．

集合論の言語の**解釈**は，空でない**言及の範囲**と，この範囲で定義された二項関係を指定することによって定められます．言及の範囲とは，変数のとる値がその中を動くと考えられる範囲で，二項関係は所属関係 $\in$ を解釈するものと考えられます．解釈を一つ定めるごとに，集合論の言語の文 ϕ の真偽が定まります．ばかげた解釈の一例として，たとえば言及の範囲を整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ と定め，$x \in y$ を $x < y$ のことと解釈してみることができます．この解釈のもとでは

$$\forall x \exists y (y \in x)$$

という ZFC で反証可能な文が真となるのですが，それでも，これはこれで集合論の《言語に対する》一つの合法的な解釈ではあります．もちろん，この解釈のもとでは ZFC のすべての公理が真になるわけではありません．

これに対して，ZFC の公理がその解釈のもとでこそすべて真になると想定されている《本心からの解釈》のもとでは，$x \in y$ は x が y の元の一つであるという意味に解釈されますが，言及の範囲についてきちんと述べるのはいくぶん難しくなります．集合論が数学の基礎であるという信念によれば，集合について語るだけで数学のすべてをとらえられなければなりませんから，私たちの集合論の変数はイヌとかネコのような対象を値とすべきではないでしょう．ところがもしも仮に C が一匹のネコをあらわしているなら，$\{C\}$ は集合ではありますが，正当な数学的対象とはいえません．私たちは集合についてだけ語ることにしたいわけですが，言及の範囲内にあるどんな集合のどんな要素についても自由に語ることができなければなりませんから，それらの集合の要素はすべてまた集合であるべきです．この議論を繰り返すことにより次のことがわかります．すなわち，私たちの言及の範囲は，

x は集合である，そして，

$\forall y (y \in x \to y$ は集合である$)$, そして，

$\forall y \forall z (y \in x \wedge z \in y \to z$ は集合である$)$, そして，

以下同様，

というような対象 x のみによって構成されているということです．このような x は，**遺伝的な**集合である，ということにします．そのような集合の例として 0 (空集合), $\{0\}, \{0, \{\{0\}\}\}$ などがあります．

遺伝的な集合について，もう少し集合論的な見方をすると次のようになります．x に属する集合すべての和集合を $\bigcup x$ と書くことにして，$\bigcup^0 x = x$ から出発して，以下 $\bigcup^{n+1} x = \bigcup(\bigcup^n x)$ と定義しましょう．そうすると，x が集合であり，しかもすべての $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $\bigcup^n x$ の要素がすべて集合であるとき，そしてそのときに限り，x は遺伝的な集合であるといえます．

遺伝的な集合の要素はどれもふたたび遺伝的な集合です．このことは私たちの言及の範囲のもつ重要な特徴です．そしてこのことは外延性公理の正しさを理解するためにも (第 5 節を参照) 必要となります．

《本心からの》解釈については第 III 章第 4 節で引き続き議論することにして，ここでは次にその時々の臨機応変（りんきおうへん）な解釈のほうに目を向けましょう．これがこの本でのあらゆる無矛盾性証明の土台になります．文の集合 S が矛盾を含まないことを証明するためには，S に属する文がすべて真になるような，なんらかの解釈を作ればよいのです．多くの場合 $\in$ は通常の所属関係と解釈され，言及の範囲のほうが通常の遺伝的な集合の範囲の特定の一部分になります．この方法で，私たちは本心からの解釈において CH が真かどうかについては決定を下すことなく，ZFC + CH の成立する解釈と ZFC + ¬CH の成立する解釈を作ります．

無矛盾性証明のこうした方法の正当性の根拠になっているのは，ゲーデルの完全性定理のやさしいほうの半分で，それは《もしも S がある解釈のもとで成立するならば S は矛盾を含まない》というものです．この定理が成立する理由は次のとおりです．$S \vdash \phi$ であるときには，S に属する文がすべて真であるような任意の解釈のもとで ϕ もまた必ず真になるように，形式的演繹の規則は選ばれています．ですから，S が成立するような解釈を一つ固定して考えれば，その解釈において偽であるような文は S から証明できないことになります．与えられた一つの解釈において ϕ と $\neg\phi$ の両方が真になることはあり得ないので，ϕ と $\neg\phi$ の両方が S から証明されることもありません．したがって，S は矛盾を含みません．

ゲーデルの完全性定理の難しいほうの半分は次のとおりです．《もしも S が矛盾を含まなければ，S は言及の範囲が可算集合であるようななんらかの解釈のもとで成立する (ただし，その際 $\in$ を本物の所属関係によって解釈できるとは限らな

い))》. 私たちの作業のなかでこの結果が必要になることはありません. しかしながら, 無矛盾性が形式的演繹の定式化の仕方に依存しないということを示しているので, 興味深い結果ではあります. 実際, メタ理論で無限的手法を用いることが許されるなら, S が矛盾を含まないということを, S がなんらかの解釈のもとで成立することと《定義》してもよいし, $S \vdash \phi$ ということを S に属する文がすべて真であるような解釈においては ϕ もまた必ず真となることだと《定義》してもよいのです. ただし, このやり方を採用した場合, この本では簡単に指摘しただけで済ませてしまったコンパクト性定理 (定理 2.1) が, 一つの深遠な結果ということになります.

初等的な集合論が, ZFC の能力のごく一部を使うだけで展開できるという事実に私たちが関心をもつ理由を, ここで説明しましょう. ZFC + CH のような文の集合のなんらかの解釈を定義した場合, ZFC の公理のすべてがその解釈のもとで成立していることを一度に検証するのは簡単なことではありません. そのかわりまず ZF − P − Inf のような弱い理論が成立しているかどうかをチェックします. 成立していれば, 集合論で知られているいくつかの事実が真であることが導かれ, そのおかげで, 選択, 冪集合, 無限などの残りの公理がこの解釈のもとで意味していることを理解するのも容易になるのです.

§5 外延性と内包性

これから ZFC の公理を列挙し解説することにします.

公理 0. 集合の存在

$$\exists x\,(x = x). \ \square$$

この公理は私たちの宇宙が空でないと主張します. たいていの形式化された論理の展開においては, このことは論理の公理から導き出されることなので, わざわざここに書くのは冗長なだけかもしれませんが, 念のためにここで表明しておきます.

公理 1. 外延性

$$\forall x \forall y\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y). \ \square$$

集合はその元によって定まるということです. この公理の正しさを直観的に納得するには, 第 4 節で議論したように, 変数 x, y, z が遺伝的な集合の上だけを動

くということに注意する必要があります．二つの遺伝的集合 x と y が与えられたとき，$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$ はこの二つの集合の元になっている遺伝的集合たちが一致するという意味です．しかし x と y の元はすべて遺伝的集合のはずですから，x と y は全体として同じ元 (たち) からなり，したがって同じ集合です．

内包性公理は $\{x \in A : P(x)\}$ という形の集合の構成を定式化しようとするものです．$P(x)$ は x のなんらかの属性をあらわします．属性という観念が式を用いることで精密化されたからには，任意の式 ϕ について

$$\exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow \phi)$$

というような言明を公理として採用したい誘惑にかられます．しかし残念ながら，ここからは有名なラッセルのパラドックスによる矛盾が生まれるのです：ϕ として $x \notin x$ という式を考えましょう．上記の《公理》によれば，ある集合 y について

$$\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \notin x)$$

となり，それゆえ $y \in y \leftrightarrow y \notin y$ となって矛盾に導かれます．幸い，与えられた集合の部分集合を作るために属性 $P(x)$ を使えれば，数学での利用に関する限りそれで十分です．そこで内包性については次のように仮定します：

公理 3．内包性図式　変数 y を自由変数として使用しない任意の式 ϕ の各々について，次の式の全称化は公理である：

$$\exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi). \ \square$$

ϕ は他の自由変数をいくつも含んでいても差しつかえありません．ここで存在が主張されている y は外延性によりただ一つに定まりますから，これを

$$\{x : x \in z \wedge \phi\} \text{ あるいは } \{x \in z : \phi\}$$

と書くことにします．ϕ に使用されている x 以外の自由変数は，z の部分集合をこのように定義するにあたってのパラメータと考えられます．

ϕ が y を自由変数として含まないという仮定によって，自己参照型の定義は排除されます．そうしておかないと，たとえば

$$\exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge x \notin y)$$

によって，空でない集合 z が存在するという事実と矛盾してしまいます．

たった一つの着想の表現ですが，式 ϕ 一つにつき一個の公理が内包性図式によって与えられるので，結果として無限に多くの公理が得られることに注意しましょう．

どんなものであれ集合 z があるとすれば，内包性によって $\{x\in z : x\neq x\}$ を作ることができます．これは一つも元のない集合です．公理 0 によってなにかしら集合 z が存在するので，一つも元のない集合も存在することになります．そのような集合は外延性によってただ一つに定まります．こうして，次の定義が正当であることが確かめられました：

定義 5.1. 0 とは，$\forall x\,(x\notin y)$ をみたすただ一つの集合 y のことである．□

また，(すべての集合からなる) 万有集合がないということも証明できます．

定理 5.2.

$$\neg\exists z\,\forall x\,(x\in z).$$

【証明】仮に $\forall x\,(x\in z)$ であれば，内包性により $\{x\in z : x\notin x\}=\{x : x\notin x\}$ を作ることができるが，そうすると，先に述べたラッセルのパラドックスにより矛盾に導かれる．□

$A\subset B$ を $\forall x\,(z\in A\to x\in B)$ の省略形として用いることにします．そこで，$A\subset A$ かつ $0\subset A$ です．

公理 0 と公理 1 と公理 3 によって存在が証明できる集合は空集合 0 だけです．このことを示すために次のような解釈を考えてみましょう：言及の範囲は空集合だけを含み，$\in$ は (空虚なものになってしまいますが) 所属関係をあらわすものとします．この解釈において，公理 0, 1, 3 は成立します．同時に $\forall y\,(y=0)$ も成立してしまいますから，公理 0, 1, 3 だけでは $\forall y\,(y=0)$ を反証できないこともわかります (この論法のもう少し正式な取り扱いが第 IV 章系 2.8 にあります)．もちろん，もっと多くの公理が必要なのです．

§6　関係，関数，整列順序

前節の議論から次のような直観的イメージが得られます．与えられた式 $\phi(x)$ に対する $\{x : \phi(x)\}$ という集合は必ずしも存在しません．この集まり (あるいはクラス) が集合を形作るには大きすぎるかもしれないからです．いくつかの場合，たとえば $\{x : x=x\}$ のような場合には，この集まりは大きすぎることが証明できてしまいます．

訳注：こうした集まりが集合としては存在しないことを意味する定理，いまの場合は定理 5.2，が

証明できるという意味です.

内包性公理は，与えられた集合の部分をなすような集まりであれば，たしかに集合として存在する，ということを言っています．他のいくつかの場合，たとえば，与えられた集まりが，有限である場合や，あるいは他の与えられた集合に比較してそれほど大きくないといった場合，それらも集合として存在してしかるべきですが，第5節の公理だけではそのことを証明するには力不足です．この節ではまず，存在してしかるべき集合がたしかに存在するという意味のことを主張する公理をいくつか提示し，それから，これらの公理を用いた集合論上の基本概念の展開の概略を述べます.

ZFC の公理4から公理8まではいずれも，なんらかの集まりがたしかに集合をなすことを主張します．ただし実際には，そうした集まりがなんらかの集合の一部分をなすという，見かけ上弱い形の公理を主張します．そうすれば，あとは内包性によって，お目あての集合がたしかに存在することがわかります．公理4から公理8までをこういうやり方で表明する理由は，第VI章と第VII章でわれわれが考えることになるさまざまな解釈において，各公理が実際に成立していることを検証する際に，そのほうがずいぶんと楽だからです.

公理 4. 対

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z). \ \square$$

公理 5. 和集合

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A). \ \square$$

公理 6. 置換図式　変数 Y を自由に使用しない式 ϕ に対して，次の式の全称化は公理である：

$$\forall x \in A \exists! y \phi(x,y) \rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \phi(x,y). \ \square$$

集合 x と y が任意に与えられたとき，対の公理によって $x \in z \wedge y \in z$ となるような集合が存在します．このとき (内包性によって存在が保証され外延性によってただ一つに定まる) 集合 $\{v \in z : v = x \vee v = y\}$ は，ちょうど x と y だけを要素とする集合です．この集合を $\{x, y\}$ と書きます．集合 $\{x\} = \{x, x\}$ はただ一つの要素 x だけからなる集合です．$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ は x と y の**順序対**と呼ばれます．読者はここで

$$\forall x \forall x' \forall y \forall y' (\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \to x = x' \wedge y = y')$$

となることをチェックすべきです．

和集合の公理では $\mathcal{F}$ はなんらかの集合族をあらわすと考えており，その集合族 $\mathcal{F}$ のすべての要素 Y を部分集合として含む集合 A の存在を要請します．このことにより集合族 $\mathcal{F}$ の**和集合** (記号では $\bigcup \mathcal{F}$ と書きます) を次のように定義できます．

$$\bigcup \mathcal{F} = \{ x : \exists Y \in \mathcal{F} (x \in Y) \}.$$

この集合は先ほどの A を用いて

$$\{ x \in A : \exists Y \in \mathcal{F} (x \in Y) \}$$

と書かれるものと同じですから，その存在は保証されます．

$\mathcal{F} \neq 0$ のとき

$$\bigcap \mathcal{F} = \{ x : \forall Y \in \mathcal{F} (x \in Y) \}$$

と定義すれば，この集合が存在することは，それが任意の $B \in \mathcal{F}$ によって

$$\{ x \in B : \forall Y \in \mathcal{F} (x \in Y) \}$$

と書かれるものと同じであることにより保証されます (ですから，ここでは和集合の公理に訴える必要はありません)．$\mathcal{F} = 0$ のときは $\bigcup \mathcal{F} = 0$ であり，$\bigcap \mathcal{F}$ のほうは，もしも存在するとしたら《集合全体の集合》になってしまうので，存在しません．このほかに，$A \cap B = \bigcap \{A, B\}$, $A \cup B = \bigcup \{A, B\}$, $A \setminus B = \{ x \in A : x \notin B \}$ と定めます．

置換図式も内包性図式と同じように一つの ϕ につき一個の公理を定めるので，したがって全体としては無限に多くの公理を作り出します．置換公理が正しいと考える理由は次のとおりです：$\forall x \in A \exists ! y \phi(x, y)$ という仮定のもとで，$Y = \{ y : \exists x \in A \phi(x, y) \}$ と定義しようとしたとします．このとき Y の濃度は A の濃度以下なので，Y は大きすぎることはなく，集合として存在できるはずです．置換公理 (と内包性公理) によれば，

$$\{ y : \exists x \in A \phi(x, y) \}$$

は，たしかに存在します．なぜなら，$\forall x \in A \exists y \in Y \phi(x, y)$ をみたす任意の集合 Y について，上記の集合は $\{ y \in Y : \exists x \in A \phi(x, y) \}$ と書けますから．

任意の集合 A と B の**積集合**を次のように定義します．

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle : x \in A \wedge y \in B \}.$$

この定義が正当であることを示すためには，置換公理を二度適用する必要があります．まず各 $y \in B$ について

$$\forall x \in A \exists ! z (z = \langle x, y \rangle)$$

なので，置換公理 (と内包性公理) によって

$$\mathrm{prod}(A, y) = \{ z : \exists x \in A (z = \langle x, y \rangle) \}$$

を定義できます．次に

$$\forall y \in B \exists ! z (z = \mathrm{prod}(A, y))$$

なので，置換公理によって

$$\mathrm{prod}'(A, B) = \{ \mathrm{prod}(A, y) : y \in B \}$$

と定義できます．それで，$A \times B = \bigcup \mathrm{prod}'(A, B)$ が定義できるのです．

ではここで，公理 0, 1, 3, 4, 5, 6 から導かれるその他の集合論的概念を見ておきましょう．**関係**とはすべての要素が順序対であるような集合 R のことです．

$$\mathrm{dom}(R) = \{ x : \exists y (\langle x, y \rangle \in R) \} \quad (定義域),$$

$$\mathrm{ran}(R) = \{ y : \exists x (\langle x, y \rangle \in R) \} \quad (値域).$$

この定義は任意の集合 R に対して意味をなすのですが，通常は R が関係である場合，つまり $R \subset \mathrm{dom}(R) \times \mathrm{ran}(R)$ となる場合だけに使われます．また $R^{-1} = \{ \langle x, y \rangle : \langle y, x \rangle \in R \}$ と定義します．もしも R が関係であれば $(R^{-1})^{-1} = R$ となります．

f が**関数**であるとは，f が関係であってしかも

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f) \exists ! y \in \mathrm{ran}(f) (\langle x, y \rangle \in f)$$

となることをいいます．$f : A \to B$ は，f が関数で，$A = \mathrm{dom}(f)$, $\mathrm{ran}(f) \subset B$ となるということです．$f : A \to B$ でありそして $x \in A$ であるとき，$f(x)$ とは $\langle x, y \rangle \in f$ となるようなただ一つの y のことです．$C \subset A$ であるとき $f \restriction C = f \cap C \times B$ とおき，これを f の C への**制限**と呼びます．またこのとき $f''C = \mathrm{ran}(f \restriction C) = \{ f(x) : x \in C \}$ と定義します．$f''C$ の代わりに $f(C)$ を用いる人も多いですが，この本では集合 A の要素が A の部分集合でもある場合がしょっちゅうあるので，こちらの書き方は混乱を招きかねません．

関数 $f : A \to B$ が 1 対 1 写像あるいは**単射**であるとは，f^{-1} もまた関数になるときにいいます．f が上への写像あるいは**全射**であるとは $\mathrm{ran}(f) = B$ となるときに

いいます．関数 $f: A \to B$ が**全単射**であるとはそれが上への 1 対 1 写像であるということです．

全順序（《狭義の全順序》と呼ばれる場合もある）とは，次に述べるような対 $\langle A, R\rangle$ のことです．すなわち，A は集合，R は関係で

$$R \text{ は } A \text{ 上で推移的:} \quad \forall x, y, z \in A\,(xRy \wedge yRz \to xRz)$$

であり，

$$\text{三者択一:} \quad \forall x, y \in A(x = y \vee xRy \vee yRx),$$

が成立し，そして

$$R \text{ は非反射的:} \quad \forall x\,(\neg(xRx))$$

となるものです．このとき R は A を《全順序づけする》といいます．ここで，よくあるように，$\langle x, y\rangle \in R$ のことを xRy と書いています．この定義においては $R \subset A \times A$ を仮定していないことに注意してください．したがって，$\langle A, R\rangle$ が全順序であれば，いかなる $B \subset A$ についても $\langle B, R\rangle$ もまた全順序となります．

関係 R と S, 集合 A と B に対して，全単射 $f: A \to B$ が存在してしかも $\forall x, y \in A\ (xRy \leftrightarrow f(x)Sf(y))$ となっているときに，$\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$ と書きます．この f のことを $\langle A, R\rangle$ から $\langle B, S\rangle$ への**同型写像**といいます．

関係 R が集合 A を**整列順序づけする**，あるいは $\langle A, R\rangle$ が**整列順序**であるとは，まず $\langle A, R\rangle$ が全順序であり，しかも A の空でない任意の部分集合に必ず R-最小の要素があることを意味します．

$x \in A$ に対して $\mathrm{pred}(A, x, R) = \{y \in A : yRx\}$ と書くことにしましょう．

訳注：この集合を $\langle A, R\rangle$ の一つの**切片**といいます．また $\langle A, R\rangle$ それ自体も切片の一つと考え，他のものを真の切片と呼ぶこともあります．

この書き方は特に順序を扱うときに使います．整列順序の基本的な性質である《硬さ》は次のようにあらわされます．

補題 6.1. $\langle A, R\rangle$ を整列順序とするとき，いかなる $x \in A$ についても $\langle A, R\rangle \not\cong \langle \mathrm{pred}(A, x, R), R\rangle$ である．

【証明】 仮に $f: A \to \mathrm{pred}(A, x, R)$ が同型写像であったとして，集合 $\{y \in A : f(y) \neq y\}$ の R-最小要素を考えると矛盾に導かれる．□

補題 6.2. $\langle A, R\rangle$ と $\langle B, S\rangle$ を互いに同型な整列順序とするとき，いっぽうから他

方への同型写像はただ一つだけ存在する.

【証明】仮に二つの同型写像 f と g があったとして $f(y) \neq g(y)$ であるような A の要素 y のうち R-最小のものを考えると，矛盾に導かれる. □

補題 6.1 と補題 6.2 の証明は，超限帰納法による証明の例になっています.

整列順序に関する基本的な事実の一つとして，それらが必ず互いに比較可能であることがあげられます.

定理 6.3. $\langle A, R\rangle$ と $\langle B, S\rangle$ を二つの整列順序とするとき次の三つのうちどれか一つが必ず成立し，しかも二つ以上が同時に成立することはない：

(a) $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$,

(b) $\exists y \in B\,(\langle A, R\rangle \cong \langle \mathrm{pred}(B, y, S), S\rangle)$,

(c) $\exists x \in A\,(\langle \mathrm{pred}(A, x, R), R\rangle \cong \langle B, S\rangle)$.

【証明】次のように f を定める

$$f = \{\, \langle v, w\rangle : v \in A \wedge w \in B \wedge \langle \mathrm{pred}(A, v, R), R\rangle \cong \langle \mathrm{pred}(B, w, S), S\rangle \,\}.$$

すると，f は A のある切片から B のある切片への同型写像となるが，これら二つの切片の両方が真の切片となることはありえない. □

選択公理 (AC) を言い表わすには，整列順序の概念を用いるのが便利です.

公理 9. 選択

$$\forall A\, \exists R\,(R \text{ は } A \text{ を整列順序づけする}).\ \square$$

選択公理 (AC) にはたくさんの同値な別表現があります. たとえば [Jech 1973] [Rubin–Rubin 1963] を参照してください. また演習問題 9–11 を見てください.

この本ではもっぱら AC を用いる集合論を扱いますが，初等的な集合論がかなりの程度 AC を必要とせずに展開できるという事実に，少しばかり関心があります. そこで，この章ではどの結果の証明で AC が用いられたか，いちいち明記することにします. AC を ZF で証明することはできません. このことについては [Jech 1973] と第 VII 章の演習問題 E3 を見てください.

§7 順序数

フォンノイマンによる順序数の理論の基本的なところは，ここまでに紹介した公理を用いて展開できます．ただし，極限順序数の存在を主張する公理を，しかるべき時点で導入する必要があります．

定義 7.1. 集合 x が**推移的**であるとは，x のすべての要素が同時に x の部分集合でもある，ということである．□

第 6 節では，要素が $x, y, \ldots$，集合が $A, B, \ldots$，集合族が $\mathcal{F}$ というように，集合の《種別》に応じていろいろな字体を用いるように試みました．しかし定義 7.1 に照らして考えると，こういった書き分けをこの先も維持することは不可能です．

推移的集合の例として $0, \{0\}, \{0,\{0\}\}, \{\{\{0\}\},\{0\},0\}$ などがあげられます．いっぽう $\{\{0\}\}$ は推移的ではありません．もしも $x=\{x\}$ であれば x は推移的集合です．このおかしな例については第 III 章を参照してください．

定義 7.2. 集合 x が推移的であってしかも $\in$ によって整列順序づけされるとき，x を**順序数**と呼ぶ．□

x が $\in$ によって整列順序づけされるとは，もっと正式な言い方では，$\langle x, \in_x \rangle$ が整列順序であることをいいます．ただし $\in_x$ とは $\{\langle y,z\rangle \in x \times x : y \in z\}$ のことです．順序数の例として $0, \{0\}, \{0,\{0\}\}$ などがあげられます．いっぽう，$\{\{\{0\}\},\{0\},0\}$ は順序数ではありません．また，ここでは《順序》といえば狭義の (いいかえれば，非反射的な) 順序のことを意味すると決めてありますから，$x=\{x\}$ となるような集合 x は順序数ではありません．

順序数 x について議論する際には $\in_x$ にいちいち言及しません．たとえば $\langle x, \in_x\rangle \cong \langle A, R\rangle$ の代わりに $x \cong \langle A, R\rangle$ と書き，$y \in x$ の場合には $\mathrm{pred}(x, y, \in_x)$ の代わりに $\mathrm{pred}(x,y)$ と書きます．

定理 7.3.

(1) x が順序数で $y \in x$ なら，y も順序数で $y = \mathrm{pred}(x,y)$.

(2) x と y が順序数で $x \cong y$ であれば $x = y$ である．

(3) x と y が順序数なら $x \in y, y \in x, y = x$ のどれか一つだけが成立する．

(4) x と y と z が順序数で $x \in y, y \in z$ であれば，$x \in z$ である．

(5) C が順序数の空でない集合であれば，$\exists x \in C \forall y \in C (x \in y \vee x = y)$.

【証明】(3) について：(1) と (2) と定理 6.3 を用いれば 3 条件のうちの一つが成立することがわかる．二つ以上が両立しないことは，いかなる順序数も自分自身の元となることがないという事実から導かれる．これは，もしも $x \in x$ だったら $x \in_x x$ となり $\langle x, \in_x \rangle$ が狭義の全順序であるという事実に反するからである．(5) について：(3) によりこの結論部分は $\exists x \in C(x \cap C = 0)$ と同じことである．そこでまず C の任意の要素 x を考える．このとき x は $\in$ によって整列順序づけされるので，もしも $x \cap C \neq 0$ であれば $x \cap C$ の $\in$-最小要素 x' が存在し，この x' について $x' \cap C = 0$ となる．□

定理 7.3 は次のことを導きます．仮に順序数全体の集合が存在するとしたらそれ自身が順序数になるはずで，したがってそのようなものは存在しえません．もっと正確には，次のことが成立します：

定理 7.4. $\neg \exists z \forall x(x$ は順序数 $\rightarrow x \in z)$.

【証明】仮にそのような集合 z があると，集合

$$ON = \{x : x \text{ は順序数}\}$$

が得られる．集合 ON は定理 7.3 (1) により推移的であり，(3), (4), (5) により $\in$ によって整列順序づけされているので，ON は一つの順序数である．したがって $ON \in ON$ である．しかし，定理 7.3 の証明において指摘されたとおり，自分自身の元になるような順序数などは存在しない．□

この定理は，いわゆるブラリフォルティのパラドックスで，この定理やラッセルのパラドックス (定理 5.1) から，ある属性を有する要素全体の集合を作ろうとする際には十分注意を払わなければならないことがわかります．

ON は (集合としては) 存在しないのですが，その真の切片はどれでも一つの順序数となります．

補題 7.5. 順序数の集合 A が $\forall x \in A \forall y \in x(y \in A)$ をみたせば，A は一つの順序数である．□

定理 7.6. $\langle A, R \rangle$ が整列順序であれば，あるただ一つに定まる順序数 C について $\langle A, R \rangle \cong C$ となる．

【証明】そのようなCが一つしかないことは定理7.3 (2)から出てくる．少なくとも一

つは存在することを証明するために，$B=\{a\in A:\exists x(x$ は順序数 $\wedge\langle \mathrm{pred}(A,a,R)\rangle\cong x)\}$ とおく．集合 B の各要素 a に対して $f(a)$ を $\langle \mathrm{pred}(A,a,R)\rangle\cong x$ となる (ただ一つの) x のことだとして，B を定義域とする関数 f を定義する．そして $C=\mathrm{ran}(f)$ とおき，補題 7.5 を用いて C が順序数であること，f が $\langle B,R\rangle$ から C の上への同型写像であることを確かめる．最後に，$B=A$ であるか，またはある $b\in A$ が存在して $B=\mathrm{pred}(A,b,R)$ となることが確かめられるが，この両条件のうち後者からは $b\in B$ が導かれ矛盾にいたる．□

この定理 7.6 の証明では，f が集合として存在することをいうために，置換公理を本質的な仕方で用いています．より正式には次のとおりです．

$$\langle \mathrm{pred}(A,a,R),R\rangle\cong x$$

ということを主張する式 $\phi(a,x)$ を考えると，$\forall a\in B\exists!x\phi(a,x)$ なので，置換公理と内包性公理により $C=\{x:\exists a\in B\phi(a,x)\}$ を作ることができます．そうするとお目当ての f は定義から $f\subset B\times C$ をみたすことになるので，ふたたび内包性公理により集合として存在することになるのです．もしも ZFC から置換公理を取り除いても，たいていの《普通の数学》を展開するのにさしつかえはありませんが，定理 7.6 を証明することはできなくなってしまいます．このことについて詳しくは第 IV 章の演習問題 9 を見てください．

定理 7.6 により，順序数を整列順序の順序型の代表として用いることができます．

定義 7.7. 整列順序 $\langle A,R\rangle$ の**順序型** $\mathrm{type}(A,R)$ とは，$\langle A,R\rangle\cong C$ をみたすただ一つの順序数 C のことである．□

これから先，ギリシャ文字 $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ を順序数全体の上を動く変数として使うことにします．たとえば $\forall\alpha\cdots$ は $\forall x(x$ は順序数 $\rightarrow\cdots)$ をいいかえるものです．$\in$ は順序数の間の順序づけになっていますから，$\alpha\in\beta$ のかわりに $\alpha<\beta$ と書くほか，順序に関連する慣例に倣ったいろいろな書き方を用います．たとえば，$\alpha\geq\beta$ は $\beta\in\alpha\vee\alpha=\beta$ を意味します．

定義 7.8. 順序数の集合 X に対して $\sup(X)=\bigcup X$ とおく．また，$X\neq 0$ のときには $\min(X)=\bigcap X$ とおく．□

補題 7.9.

(1) $\forall\alpha,\beta(\alpha\leq\beta\leftrightarrow\alpha\subset\beta)$.

(2) 順序数の集合 X に対して $\sup(X)$ は X のどの要素よりも大きいかまたは等しい順序数のうち最小のものであり，$X \neq 0$ であれば $\min(X)$ は X に属する最小の順序数である．□

自然数が順序数のいちばん始めの部分を占めています．私たちは有限集合の中身を数えるために自然数を使っているわけですが，選択公理 AC を仮定すると任意の集合の要素を順序数を使って数えることができるようになります (第 10 節を見てください)．だからこそ，集合論において順序数が重要な役割を担うのです．

自然数の通常の算術演算の多くが順序数全体に対して定義できます．後続者から始めることにしましょう．

定義 7.10. $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$. □

補題 7.11. 任意の順序数 α について，$\alpha < S(\alpha)$ であり，$\forall\beta(\beta < S(\alpha) \leftrightarrow \beta \leq \alpha)$ である．

定義 7.12. $\exists\beta(\alpha = S(\beta))$ となるような順序数 α を**後続型順序数**という．0 でも後続型順序数でもない順序数を**極限順序数**という．□

定義 7.13. $1 = S(0), 2 = S(1), 3 = S(2), 4 = S(3)$, など．□

したがって，0 は空集合であり，$1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, 3 = \{0, 1, 2\}, 4 = \{0, 1, 2, 3\}$ などとなります．

定義 7.14. $\forall\beta \leq \alpha(\beta = 0 \vee \beta$ は後続型順序数) となるような順序数 α のことを**自然数**という．□

この定義からただちにわかることですが，自然数の全体は，順序数全体の一つの切片です．直観的には，自然数とは 0 に S を有限の回数適用して得られる順序数のことです．なぜなら，そのやり方で得られない順序数のうち最小のもの β を考えると，それは後続型順序数ではありえないので，β 自身を含めそれより大きな順序数はどれも定義 7.14 に当てはまらないからです．しかし《有限》ということばは，正式にはまだ定義されていません．むしろ有限という概念のほうこそ，第 10 節において，《自然数》の概念を用いることではじめて定義できるものなのです．

数学の多くの議論が《自然数全体の集合》にかかわる操作を用います．しかし，ここまでに提示した公理だけでは，この集合が存在することを証明できません (第

IV 章の補題 3.12 を見てください)．そこで，新しい公理が必要になります．

公理 7. 無限

$$\exists x(0\in x\land\forall y\in x(S(y)\in x)).\ \square$$

x がこの公理の条件をみたす集合であったとすると，《数学的帰納法によって》すべての自然数が x に含まれます．もっときちんと言うと次のとおりです．自然数 n について $n\notin x$ だったとします．$n\neq 0$ のはずですからある m について $n=S(m)$ となります．$m<n$ なので m も自然数で，x についての仮定から $m\notin x$ となります．つまり $n\setminus x\neq 0$ です．この集合の最小要素 n' を考えましょう．先ほどと同じ論法で $m'<n', m'\notin x$ となるような m' が得られますが，これは n' の決め方と矛盾しています．

さてそうすると，内包性公理によって，自然数全体の集合が存在することになります．上の段落のような不恰好な論法にとって代わる通常の数学的帰納法の原理は，この集合のことばで表明されるものです (定理 7.16 の (4))．

定義 7.15. ω は自然数全体の集合である．$\square$

ω は順序数であり，より小さい順序数 (つまり ω の要素) は 0 であるかまたは後続型順序数です．したがって ω は (もしもそれ自身後続型順序数なら定義により自然数となってしまうので) 極限順序数です．いいかえれば，ω は最小の極限順序数です．じつは，任意の極限順序数は無限公理に述べられている条件をみたすので，無限公理は極限順序数の存在を要請するのと同値になります．

この ω の要素が (いかなる意味にせよ)《本物の》自然数なのかなどという問いは，哲学的言いがかりにすぎません．大切なのは，それらが次に述べる**ペアノの公準**をみたすという点です．

定理 7.16.

(1) $0\in\omega$.

(2) $\forall n\in\omega(S(n)\in\omega)$.

(3) $\forall n,m\in\omega(n\neq m\to S(n)\neq S(m))$.

(4) (数学的帰納法)：$\forall X\subset\omega[(0\in X\land\forall n\in X(S(n)\in X))\to X=\omega]$.

【証明】 (4) について：$X\neq\omega$ だったら $\omega\setminus X$ の最小要素 γ を考え，それが ω より小さい極限順序数であることを示すことができる．$\square$

ペアノの公準をみたす自然数が得られたところで，いったん順序数の話から脇へそれて，初等数学を展開することもできます．整数と有理数を構成し，それから冪集合の公理を導入して実数全体の集合を作るわけです．そのためには，まず ω 上に加法 $+$ と乗法 $\cdot$ を定義することから始めることになるでしょう．しかし私たちはこのやり方を採用せず，すべての順序数のあいだの加法と乗法について論じることにしたいと思います．私たちのやり方でも，順序数の加法と乗法を定義するのに無限公理は使いませんが，そのこと自体はさほど重大ではありません．

加法を定義するためにまず $2+3=5$ が意味することを考えてみると，仮に二個のリンゴのあとに三本のバナナを並べると五個のフルーツの列ができるだろう，ということです．そのことを念頭において $\alpha+\beta$ を次のように定めます．

定義 7.17. $\alpha+\beta=\mathrm{type}(\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\},R)$．ただし

$$\begin{aligned}R=\{\langle\langle\xi,0\rangle,\langle\eta,0\rangle\rangle:\xi<\eta<\alpha\}\\ \cup\{\langle\langle\xi,1\rangle,\langle\eta,1\rangle\rangle:\xi<\eta<\beta\}\\ \cup[(\alpha\times\{0\})\times(\beta\times\{1\})].\end{aligned}$$ □

補題 7.18. 任意の α,β,γ について

(1) $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

(2) $\alpha+0=\alpha$.

(3) $\alpha+1=S(\alpha)$.

(4) $\alpha+S(\beta)=S(\alpha+\beta)$.

(5) β が極限順序数のとき $\alpha+\beta=\sup\{\alpha+\xi:\xi<\beta\}$.

【証明】 どれも，定義から直接導かれる．たとえば (1) についていえば，$\alpha+(\beta+\gamma)$ も $(\alpha+\beta)+\gamma$ も，ともに α 個のリンゴのあとに β 本のバナナ，そのあとに γ 粒のブドウ，という順序，つまり $\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\}\cup\gamma\times\{2\}$ に適切な順序を与えたものと同型になる．□

順序数の加法 $+$ は可換ではありません．たとえば $1+\omega=\omega\neq\omega+1$ です．自然数上では $+$ は可換になります (第 10 節を見てください)．

$\alpha\cdot\beta$ を計算するには，α 個のリンゴを β 回繰り返し数えます．たとえば $\omega\cdot2=\omega+\omega$ です．

定義 7.19. $\alpha\cdot\beta=\mathrm{type}(\beta\times\alpha,R)$. ただし R は $\beta\times\alpha$ 上の辞書式順序：

$$\langle\xi,\eta\rangle R\langle\xi',\eta'\rangle\leftrightarrow(\xi<\xi'\vee(\xi=\xi'\wedge\eta<\eta')).\ \square$$

順序数の乗法の次のような特性も，やはり定義にもとづいてチェックできます.

補題 7.20. 任意の α,β,γ について

(1) $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$.

(2) $\alpha\cdot 0=0$.

(3) $\alpha\cdot 1=\alpha$.

(4) $\alpha\cdot S(\beta)=\alpha\cdot\beta+\alpha$.

(5) β が極限順序数のとき，$\alpha\cdot\beta=\sup\{\alpha\cdot\xi:\xi<\beta\}$.

(6) $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$. $\square$

$2\cdot\omega=\omega\neq\omega\cdot 2$ なので，乗法は可換ではありません. $(1+1)\cdot\omega=\omega\neq 1\cdot\omega+1\cdot\omega$ なので，右側からの乗算に関しては分配則 (6) は成立しません. 自然数どうしの間では乗算は可換です (第 10 節を見てください).

自然数をつかえば有限列を扱えるようになります.

定義 7.21.

(a) A^n とは n から A への関数全体の集合のことである.

(b) $A^{<\omega}=\bigcup\{A^n:n\in\omega\}$. $\square$

この定義では A^2 と $A\times A$ とは同じではないのですが，両者の間には明らかな 1 対 1 対応があります.

定義 7.21 が意味をなすことの冪集合の公理 (これは第 10 節で導入されます) を用いない証明は，まったく自明というわけにはいきません.

訳注：A^n はある種の関数集合です. ただし，一般の関数集合 A^X が存在することは，冪集合の公理がなければ示すことができません.

まず

$$\forall s(s\in y\leftrightarrow s \text{ は } n \text{ から } A \text{ への関数})$$

をあらわす式を $\phi(n,y)$ とします. n に関する帰納法 (つまり，ペアノの公準 7.16 (4)) により，$\forall n\in\omega\exists y\phi(n,y)$ が示されます：帰納法のステップにおいては，置換公理と，$A^n\times A$ と A^{n+1} の間に一対一の対応を構成する論法が用いられます.

次に，外延性公理により $\forall n \in \omega \exists! y \phi(n,y)$ となるので，置換公理によって集合 $\{y : \exists n \in \omega \phi(n,y)\}$，つまり $\{A^n : n \in \omega\}$ を作ることができ，したがって和集合の公理により $\bigcup\{A^n : n \in \omega\}$，つまり $A^{<\omega}$ が存在するのです．

A^n の要素を A の要素の長さ n の列とみなすことがよくあります．

定義 7.22. 自然数 n に対して $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ とは，$s(0) = x_0, s(1) = x_1, \ldots, s(n-1) = x_{n-1}$ で定まる，n を定義域とした関数 s のことである．□

しかし $n=2$ のときの $\langle x,y\rangle$ のここでの定義は第 6 節での順序対の定義と食い違っています．関数とか関係の基本的な属性を見ているあいだは，より簡単な $\langle x,y\rangle = \{\{x\},\{x,y\}\}$ という定義が便利ですし，いろいろな長さの有限列を扱いたいと思うときには定義 7.22 のほうが有用です．どちらを意味しているかが本当に問題になりうるような場面では，どちらかはっきりさせることにしますが，そのような場面はそれほど多くありません．

もっと一般の場合，s が関数で $\mathrm{dom}(s) = I$ のとき，I を添字の集合，s を I に添字づけられた列とみなすことができます．こういう場合にはしばしば $s(i)$ のかわりに s_i と書きます．定義 7.22 で導入した書き方を拡張して，こうした関数の明示的な定義に用います．たとえば $\langle i \cup \{x\} : i \in I\rangle$ は，$\mathrm{dom}(s) = I$ であって各 i に対して $s(i) = i \cup \{x\}$ であるような関数 s のことです．

$\mathrm{dom}(s)$ が順序数 α であれば，s のことを長さ α の列とみなすことができます．さらに $\mathrm{dom}(t) = \beta$ であれば，列 s と列 t を**連結**して長さ $\alpha+\beta$ の列 $s^\frown t$ を作ることができます．

定義 7.23. s と t が関数で $\mathrm{dom}(s) = \alpha, \mathrm{dom}(t) = \beta$ であるとき，$s^\frown t$ は $\mathrm{dom}(s^\frown t) = \alpha+\beta$, $(s^\frown t)\restriction\alpha = s$, そして $\xi < \beta$ に対し $(s^\frown t)(\alpha+\xi) = t(\xi)$ と定められる関数である．□

§8　新しいことばの定義について

第 5 節で 0 と $\subset$ を定義したのをはじめとして，ここまでの節で多くの集合論上の定義を導入しました．ここではそうした扱いが正当化されるものかどうかという問いに答えることにしましょう．

新しい概念を導入するたびに語彙（ごい）を拡大することは数学者にとってまったくあたりまえの行為ですから，実在主義者の立場から言えば，この問いは単なる言いが

かりです．しかしながら，公理の取り扱いに関して，私たちは，第 2 節で定義された形式化された言語で表現できる属性にだけ，内包性図式と置換図式を適用できるものと明示的に表明しています．それなのに，新しい語彙を含んだ属性についての内包性公理や置換公理を，すでに私たちは何度も使っていて，それはあたかも，言語や公理の範囲が伸縮自在で，時に応じて拡大していくべきものだと思う必要があるかのようです．しかし，そのようなやり方は，まったく不恰好です．

この難点を回避するため，公式見解として，形式化された言語に変更が加わることは一切なく，新たに導入される記号は式を略記する新しい方法を示しているにすぎないという立場をとりましょう．新しい略記法を用いる理由は $\neg\exists\neg$ に替えて $\forall$ を用いる理由と同じく，スペースを節約し読みやすさを向上させるためです．新しい記号を用いてあらわされたどんな属性も，必要とあれば新しい記号を用いることなく表現できるという点が重要で，そのおかげでもともとの内包性図式と置換図式を適用できるわけです．

このことについてもう少し念を入れて説明しておくと，定義されて導入されることばには，定義された関係と定義された演算という二通りがあります．

対象間の関係を新たに定義によって導入するときには，私たちは単に，式を新しい記号によって略記する方法を定めているだけです．たとえば $x \subset y$ が $\forall z(z \in x \to z \in y)$ の省略形であるようにです．新しい《記号》は，日常言語の断片のこともあります．たとえば《x は空である》が $\forall z(z \notin x)$ のいいかえであるように．

$x \cap y, \{x\}, \alpha + \beta$ といった新しい演算，あるいは 0 とか ω のような新しい定数を定義して使うことは，そうした定義が意味をなすことが公理から証明できるときにだけ可能なので，関係の定義の場合より少しばかり厄介です．きちんといえば，変数 $x_1, \ldots, x_n, y$ 以外には自由変数をもたない式 $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ について，

$$S \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists! y \phi(x_1, \ldots, x_n, y)$$

となるような公理の集合 S があったとすれば，この公理系 S から出発して議論している場合には $F(x_1, \ldots, x_n)$ とは $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ となるような（ただ一つの）y のことであるという《定義》をしてよろしい，ということになります．そのうえで，記号 F を含む表現を，F を含まない表現の略記法とみなします．定数の導入はこれの $n=0$ の場合になっています．

たとえば $\forall v(v \in z \leftrightarrow v \in x \wedge v \in y)$ という式を $\phi(x, y, z)$ と書いたとしましょう．$\forall x \forall y \exists! z \phi(x, y, z)$ という文を証明するのに必要な内包性公理を備えた公理系 S か

ら出発して議論をしているときには，$x \cap y$ という書き方を用いることができます．このとき $x \cap y \in A \cap B$ のような式を $\cap$ という記号を用いないで書き表わす方法にはいろいろあって，たとえば

$$\exists z \exists C(\phi(x,y,z) \wedge \phi(A,B,C) \wedge z \in C) \tag{1}$$

とか

$$\forall z \forall C(\phi(x,y,z) \wedge \phi(A,B,C) \rightarrow z \in C) \tag{2}$$

がそうですが，$S \vdash \forall x \forall y \exists ! z \phi(x,y,z)$ なので，(1) と (2) は同値であることが S から証明できます．

また $\{\ :\cdots\}$ という書き方もこのような演算の定義とみることができます．つまり $\{x : \phi(x, y_1, \ldots, y_n)\}$ は $\forall x(x \in z \leftrightarrow \phi(x, y_1, \ldots, y_n))$ となるただ一つの z のことです．この書き方が使えるのは，S が外延性公理を含み，$S \vdash \forall y_1 \cdots \forall y_n \exists z \forall x(x \in z \leftrightarrow \phi(x, y_1, \ldots, y_n))$ となるときに限ります．

和 $\alpha + \beta$ は順序数に対してだけ定義されています．このような部分的に定義された演算は，その自然な定義域の外では 0 であるとみなします．したがって，$x+y$ はすべての x, y について定義されますが，両者がともに順序数になる場合でない限り，これは 0 です．

新しい記号の定義についてのきちんとした取扱いの詳細は，第 13 節を参照してください．

§9　クラスと再帰的定義

これまでに，$\{x : \phi(x)\}$ という形の集まりが集合として存在するとは限らないということを，$\{x : x = x\}$ をもっとも簡単な例として見てきました．このような集まりを考えること自体が悪いわけではありませんし，むしろそれが有用な動機づけになる場合もあるのですが，なにぶんそのような集まりは私たちが提示した公理の言及の範囲外にあるので，正式な形式的証明にそれらが登場することは決して許されません．

私たちは $\{x : \phi(x)\}$ という形の集まりを，非公式に**クラス**と呼びます．ϕ が x 以外に自由変数を含む場合も認めることにします．その場合はそれらの自由変数のことを，このクラスの依存するパラメータと考えます．集合をなさないクラス (《大きすぎる》クラス) のことを**真のクラス**といいます．内包性公理は，集合の部分ク

ラスは集合であるという主張です．

真のクラスを書き表わすときには太字を使うことにします．次に定義する二つのクラスは有用なものですが，これらは定理 5.2 と 7.4 により真のクラスです．

定義 9.1.

$$\mathbf{V} = \{x : x = x\},$$

$$\mathbf{ON} = \{x : x \text{ は順序数である}\}. \ \square$$

形式上は，真のクラスは存在せず，真のクラスを用いて書き表わされた表現は，それらを用いないで書かれたものの略記法と考えなければなりません．すなわち，$x \in \mathbf{ON}$ は x が順序数であるということを表現する式の省略形ですし，$\mathbf{ON} = \mathbf{V}$ は

$$\forall x (x \text{ は順序数である} \leftrightarrow x = x)$$

という (表現が略記しているところの，偽な) 文の省略形です．

正式な取り扱いのうえではクラスと式になんの違いもなく，両者の違いはそれらをどう言いあらわすかというところにだけ関わっています．定義 9.1 は《x は順序数である》という式の省略形として $\mathbf{ON}(x)$ を定義するものと考えることもできるでしょうが，$\mathbf{ON}$ をクラスと考えたほうが，($\{x \in y : x \text{ は順序数である}\}$ の略記として) $\mathbf{ON} \cap y$ というような表現を書きたい場合に有用です．私たちが定義する述語や関数はどれもクラスと考えることができるでしょう．たとえば，和集合演算のことをクラス $\mathbf{UN} = \{\langle\langle x, y\rangle, z\rangle : z = x \cup y\}$ を定義するものと考えることができるわけです．大雑把(おおざっぱ)にいえば $\mathbf{UN} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ ですから，このことに促されて，$\{\langle\langle x, y\rangle, z\rangle : z = x \cup y \wedge x \in a \wedge y \in b\}$ を意味する略記法として $\mathbf{UN} \restriction (a \times b)$ を用いようということになります．

クラスを用いる略記法は，クラスの一般的性質を論じる際には非常に有用となります．ある言明が《あらゆるクラスについて》真であると主張することは，一つの**定理図式**を主張するのと同等です．その例として $\mathbf{ON}$ 上の帰納法と再帰の原理を述べてみましょう．

定理 9.2. ON 上の超限帰納法． 任意のクラス $\mathbf{C} \subset \mathbf{ON}$ について，もしも $\mathbf{C} \neq 0$ であれば $\mathbf{C}$ は最小要素をもつ．

【証明】 $\mathbf{C}$ が集合である場合について同じことを主張する定理 7.3 (5) の証明とまったく同様．$\mathbf{C}$ の要素 α を考えなさい．もしも α が $\mathbf{C}$ の最小要素でなかったとした

ら，β を $\alpha \cap \mathbf{C}$ の最小要素としなさい．そうすれば β が $\mathbf{C}$ の最小要素である．□

定理 7.3 (5) と定理 9.2 は，数学的な内容についてはたいへん似ていますが，形式上は大きな違いがあります．定理 7.3 (5) は証明可能な一つの文の省略形でしたが，定理 9.2 は定理図式，つまり無限に多くの定理の集まりを表現するものです．クラスを使わずに定理 9.2 を言い表わそうとすると，《任意の式 $\mathbf{C}(x, z_1, \ldots, z_n)$ について

$$\begin{aligned}\forall z_1, \ldots, z_n \{[\forall x(\mathbf{C} \to x \text{ は順序数である}) \wedge \exists x \mathbf{C}] \\ \to [\exists x(\mathbf{C} \wedge \forall y(\mathbf{C}(y, z_1, \ldots, z_n) \to y \geq x))]\}\end{aligned} \tag{1}$$

は定理である》とでも言わねばならないところです．ここでは $\mathbf{C}$ のことを，$z_1, \ldots, z_n$ をパラメータとして，クラス $\{x : \mathbf{C}(x, z_1, \ldots, z_n)\}$ を定義するものと考えているわけです．

クラスの定義にパラメータを使ってもよいという事実からわかることですが，定理 9.2 のようなすべてのクラスに対する図式は，一つの特別な場合として，すべての集合に対する普遍的な言明を含みます．すなわち，$\mathbf{C}(x, z)$ として $x \in z$ を考えると，(1) は

$$\forall z \{[z \text{ は順序数の空でない集合である}] \to [\exists x \in z \forall y \in z (y \geq x)]\}$$

と同値で，これは定理 7.3 (5) そのものです．

《順序数 α に関する超限帰納法による証明》は，任意の α について

$$(\forall \beta < \alpha \, \psi(\beta)) \to \psi(\alpha)$$

となることを示せば $\forall \alpha \psi(\alpha)$ を確かめられるというものです．その理由は，もしも $\exists \alpha \neg \psi(\alpha)$ だったら，$\neg \psi(\alpha)$ となる最小の α を考えることによって矛盾に導かれるからです．

同様の結果に，順序数 α の関数を，その関数自身の α 未満の範囲での情報から再帰的に定義できる，というものがあります．

定理 9.3. ON 上の超限再帰. $\mathbf{F} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ に対して

$$\forall \alpha [\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G} \restriction \alpha)] \tag{2}$$

をみたす $\mathbf{G} : \mathbf{ON} \to \mathbf{V}$ がただ一つ定まる．

【証明】 唯一性については，仮に $\mathbf{G}_1$ と $\mathbf{G}_1$ がいずれも (2) をみたしたとすると，

$\forall\alpha(\mathbf{G}_1(\alpha)=\mathbf{G}_2(\alpha))$ が α に関する超限帰納法によって証明される．

存在を確かめるために，順序数 δ を定義域とする関数 g が

$$\forall\alpha<\delta[g(\alpha)=\mathbf{F}(g\restriction\alpha)]$$

となっているときこの g を《δ-近似》と呼ぶことにする．g が δ-近似，g' が δ'-近似であるとすると $g\restriction(\delta\cap\delta')=g'\restriction(\delta\cap\delta')$ となる．そのことは $\mathbf{G}$ の唯一性を示した前の段落の証明と同じようにしてわかる．次に，各順序数 δ に対して δ-近似が存在する (そしてただ一つに定まる) ことを，δ に関する超限帰納法を用いて示しなさい．あとは，どれかの (どれを選んでもよい) $\delta>\alpha$ に対する δ-近似 g の値 $g(\alpha)$ として $\mathbf{G}(\alpha)$ を定めなさい．□

定理 9.3 は，クラス記号を用いないでもっと冗長に言い表わすこともできます．与えられた式 $\mathbf{F}(x,y)$ (他の自由変数を含むかもしれません) に対して，式 $\mathbf{G}(v,y)$ を (先ほど $\mathbf{G}$ を定めた方法で) 明示的に定義して

$$\forall x\exists!y\mathbf{F}(x,y)\rightarrow[\forall\alpha\exists!y\mathbf{G}(\alpha,y)\wedge\forall\alpha\exists x\exists y(\mathbf{G}(\alpha,y)\wedge\mathbf{F}(x,y)\wedge x=\mathbf{G}\restriction\alpha)] \qquad (3)$$

が定理となるようにできます．ここで $x=\mathbf{G}\restriction\alpha$ は

$$x \text{ は関数である} \wedge \operatorname{dom} x=\alpha\wedge\forall\beta\in\operatorname{dom} x\,\mathbf{G}(\beta,x(\beta))$$

の省略形です．定理 9.3 で唯一性を主張する部分を言い表わすために，$\mathbf{G}'(v,y)$ を他の任意の式として，(3)′ を (3) の $\mathbf{G}$ の代わりに $\mathbf{G}'$ を使って得られる式のことだとします．すると

$$[\forall x\exists!y\mathbf{F}(x,y)\wedge(3)']\rightarrow\forall\alpha\forall y(\mathbf{G}(\alpha,y)\leftrightarrow\mathbf{G}'(\alpha,y))$$

も，やはり定理です．

クラスに関する数学的な議論のなかで，クラスを用いずに済ませるための翻訳をする必要に迫られることは，幸いにしてほとんどありません．しかしそれが原則として実行できると知っておくことは大切です．

順序数の演算 $\alpha+\beta$ と $\alpha\cdot\beta$ については，第 7 節で与えた定義から直接その性質を引き出してくるというやり方が簡単ですが，その他に，α をパラメータとする β に関する超限再帰によって定義する方法もあります．再帰による定義の非公式な普通の述べ方を，仮にその必要があったとして，いかにして定理 9.3 に帰着させればよいか例示するために，$\alpha+\beta$ の再帰による定義についていくぶん詳細にお話しましょう．

非公式には，順序数の和 $\alpha+\beta$ を

$$\alpha+0=\alpha,$$

$$\alpha+S(\beta)=S(\alpha+\beta),$$

$$\beta \text{ が極限順序数の場合は } \alpha+\beta=\sup\{\alpha+\xi:\xi<\beta\}$$

という具合に β に関する再帰で定義することもできたわけです．定義 7.17 で定義された演算 $+$ がこれらの条項を (補題 7.18 (2), (4), (5) により) みたすので，この二通りの定義は同等です．

もっと正式にするために，次の定義を差しはさみます．

定義 9.4. $\beta-1$ とは，β が極限順序数あるいは 0 のときは β のこと．また，$\beta=S(\gamma)$ となる γ があればその γ のことである．□

さて，各順序数 α について $\mathbf{F}_\alpha:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ を次のように定義されたものとしましょう．x がなんらかの順序数 β を定義域とした関数でない場合には $\mathbf{F}_\alpha(x)=0$ とします．そして，x がそのような関数である場合には，$\beta=0$ なら $\mathbf{F}_\alpha(x)=\alpha$, β が後続型順序数なら $\mathbf{F}_\alpha(x)=S(x(\beta-1))$, β が極限順序数なら $\mathbf{F}_\alpha(x)=\bigcup\{x(\xi):\xi<\beta\}$ とします．すると定理 9.3 により，$\forall\beta[\mathbf{G}_\alpha(\beta)=\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{G}_\alpha\restriction\beta)]$ であるような $\mathbf{G}_\alpha:\mathbf{ON}\to\mathbf{V}$ がただ一つ定まります．この $\mathbf{G}_\alpha$ の唯一性と補題 7.18 (2), (4), (5) から，$\forall\alpha\beta[\mathbf{G}_\alpha(\beta)=\alpha+\beta]$ が導かれます．

さらにもっと正式には，ここで添字として書かれた α は，先ほど述べた定理 9.3 の形式的な記述にあらわれた式 $\mathbf{F}$ の，もう一つの自由変数ということになります．

補題 7.20 の (2), (4), (5) を使えば，順序数の乗法もまた再帰によって定義できます．再帰のもっと有用な利用法の一つが，順序数の冪を定義することです．というのも，α^β の組み合わせ論的で直接的な定義はいくぶん複雑だからです (章末の演習問題 7 を見てください)．

定義 9.5. 順序数の冪 α^β を β に関する次の再帰によって定義する：

(1) $\alpha^0=1$,

(2) $\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\cdot\alpha$,

(3) β が極限順序数のときは，$\alpha^\beta=\sup\{\alpha^\xi:\xi<\beta\}$. □

ここで $2^\omega=\omega$ であることに注意しましょう．この定義を基数の冪 (第 10 節を参照) と混同してはいけません．

定理 9.3 をちょっと手直ししたものが，順序数 δ 上の超限再帰です．$\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$

とすると，δ を定義域とする関数 g で $\forall\alpha<\delta[g(\alpha)=\mathbf{F}(g\restriction\alpha)]$ をみたすものがただ一つあります．これを示すためには $\mathbf{G}:\mathbf{ON}\to\mathbf{V}$ を定理 9.3 (2) をみたす関数として $g=\mathbf{G}\restriction\delta$ とおきましょう．置換公理によって，g は集合となります．

一つの重要なケースとして，$\delta=\omega$ の場合が算術においてよく用いられます．たとえば，私たちは $n!$ を

$$0!=1,$$

$$(n+1)!=n!\cdot(n+1)$$

によって定義します．$\alpha+\beta$ についてやったように，これをもっと形式的に定理 9.3 の形で述べることも可能です．ここには条項が二つしかありませんが，それは ω 未満の極限順序数が存在しないからです．

§10 基数

集合のサイズを比較するには 1 対 1 関数を使います．

定義 10.1.

(1) $A\precsim B$ とは A から B への 1 対 1 関数があるということである．

(2) $A\approx B$ とは A から B の上への 1 対 1 関数があるということである．

(3) $A\prec B$ とは $A\precsim B$ かつ $B\not\precsim A$ ということである．□

簡単にわかることですが，$\precsim$ は推移的であり，$\approx$ は同値関係です．これよりはるかに深遠な結果が，次の定理の中で与えられています．

定理 10.2. (シュレーダーとベルンシュタイン)

$$A\precsim B, B\precsim A\to A\approx B.$$

【証明】 章末の演習問題 8. □

有限集合のサイズを決定するには中身を数え上げればよろしい．もっと一般に，集合 A が整列順序づけできるものであれば，ある順序数 α について $A\approx\alpha$ ですから (定理 7.6)，そのような α のうち最小のものがあります．それを A の**濃度**と呼びます．

定義 10.3. A が整列順序づけ可能であるとすると，$|A|$ とは $\alpha\approx A$ となるような最小の順序数 α のことである．□

この記号 $|A|$ を用いてなにか言明を書いたとき，たとえば $|A|<\alpha$ と書いたときには，A が整列順序づけ可能であることが前提されているものと解釈します．

選択公理 AC のもとでは，すべての集合 A に対して $|A|$ が定義されます．$A\approx B\to|A|=|B|$ それに $|A|\approx A$ ですから，AC のもとで，$|A|$ という演算は各 $\approx$-同値類から一個づつ代表を選びだしていることになります．

AC があってもなくてもすべての順序数 α について $|\alpha|$ は定義され，それは α 以下の順序数になります．

定義 10.4. α が**基数**であるとは $|\alpha|=\alpha$ ということである．□

同じことになりますが，α は $\forall\beta<\alpha(\beta\not\approx\alpha)$ のとき，そのときに限り基数です．今後，κ と λ を基数をあらわす文字として用います．

補題 10.5. もしも $|\alpha|\leq\beta\leq\alpha$ なら $|\beta|=|\alpha|$ である．

【証明】 $\beta\subset\alpha$ なので $\beta\precsim\alpha$ であり，$\alpha\approx|\alpha|\leq\beta$ なので $\alpha\precsim\beta$ である．それゆえ定理 10.2 により $\alpha\approx\beta$ である．□

補題 10.6. $n\in\omega$ とすると，

(1) $n\not\approx n+1$.

(2) $\forall\alpha(\alpha\approx n\to\alpha=n)$.

【証明】 (1) は n に関する帰納法による．(2) には補題 10.5 から従う．□

系 10.7. ω は基数である．ω の要素はいずれも基数である．□

定義 10.8. 集合 A は $|A|<\omega$ のとき**有限**である．$|A|\leq\omega$ のとき**可算**である．**無限**であるとは有限でないという意味である．**不可算**であるとは可算でないというという意味である．□

これまでに与えられた公理を基にして不可算な集合が存在することを証明することはできません (第 IV 章の系 6.7 を見てください)．

基数の乗法や加法は，順序数の演算とは区別しなければなりません．

定義 10.9.

(1) $\kappa\oplus\lambda=|\kappa\times\{0\}\cup\lambda\times\{1\}|$.

(2) $\kappa\otimes\lambda=|\kappa\times\lambda|$. □

順序数の演算と異なり $\oplus$ と $\otimes$ は可換であることが，定義から容易にチェックできます．また，順序数の加法 $+$ と乗法 $\cdot$ の定義 (7.17 と 7.19) は，$|\kappa+\lambda|=|\lambda+\kappa|=\kappa\oplus\lambda$ と $|\kappa\cdot\lambda|=|\lambda\cdot\kappa|=\kappa\otimes\lambda$ ということを含意します．そこで，たとえば $\omega\oplus 1=|1+\omega|=\omega<\omega+1$ それに $\omega\otimes 2=|2\cdot\omega|=\omega<\omega\cdot 2$ ということになります．

補題 10.10. $n,m\in\omega$ について，$n\oplus m=n+m<\omega$ そして $n\otimes m=n\cdot m<\omega$.

【証明】まず $n+m<\omega$ を m に関する帰納法によって示し，次に $n\cdot m<\omega$ を m に関する帰納法によって示しなさい．あとのことは 10.6 (2) から従う．□

では次に無限な基数についての $\oplus$ と $\otimes$ を検討しましょう．

補題 10.11. すべての無限な基数は極限順序数である．

【証明】仮に $\kappa=\alpha+1$ であったとすると，$1+\alpha=\alpha$ であることから $\kappa=|\kappa|=|1+\alpha|=|\alpha|$. これは矛盾. □

基数のクラスは順序数のクラスでもあるので，超限帰納法の原理 (定理 9.2) を基数についての結果を証明するために適用することもできる，ということを指摘しておきましょう．このことは，次の定理に描き出されています．

定理 10.12. κ が無限な基数であれば $\kappa\otimes\kappa=\kappa$.

【証明】κ に関する超限帰納法による．このことが κ より小さい無限基数すべてについて成立したと仮定しよう．すると，各 $\alpha<\kappa$ に対して $|\alpha\times\alpha|=|\alpha|\otimes|\alpha|<\kappa$ となる (α が有限な場合は補題 10.10 を適用すればよい)．$\kappa\times\kappa$ の整列順序づけ $\lhd$ を次のように定義しよう．$\langle\alpha,\beta\rangle\lhd\langle\gamma,\delta\rangle$ は

$$\max(\alpha,\beta)<\max(\gamma,\delta)\vee[\max(\alpha,\beta)=\max(\gamma,\delta)$$

$$\wedge\langle\alpha,\beta\rangle \text{ は辞書の順序で } \langle\gamma,\delta\rangle \text{ に先立つ}]$$

ということである．どの $\langle\alpha,\beta\rangle\in\kappa\times\kappa$ も $\lhd$ の意味で $|(\max(\alpha,\beta)+1)\times(\max(\alpha,\beta)+1)|$ 個 (これは κ 個よりも少ない) より多くの先行者をもたないので $\mathrm{type}(\kappa\times\kappa,\lhd)\leq\kappa$, したがって $|\kappa\times\kappa|\leq\kappa$ となる．いっぽう $|\kappa\times\kappa|\geq\kappa$ は明らかだから，$|\kappa\times\kappa|=\kappa$. □

系 10.13. κ と λ が無限な基数であるとき

(1) $\kappa\oplus\lambda=\kappa\otimes\lambda=\max(\kappa,\lambda)$.

(2) $|\kappa^{<\omega}| = \kappa$ (定義 7.21 を参照).

【証明】 (2) について．n に関する帰納法により，定理 10.12 の証明を利用して 1 対 1 写像 $f_n : \kappa^n \to \kappa$ を定義しなさい．これにより 1 対 1 写像 $f : \bigcup_n \kappa^n \to \omega \times \kappa$ が得られ，そこから $|\kappa^{<\omega}| \le \omega \otimes \kappa = \kappa$ となる．□

これまでに提示された公理 (ZFC$^-$ − P) は，ω 以外の無限基数は存在しないという主張と両立してしまいます (第 VI 章の 6.7 を参照).

公理 8．冪集合

$$\forall x \exists y \forall z (z \subset x \to z \in y). \ \square$$

定義 10.14. $\mathcal{P}(x) = \{ z : z \subset x \}$. □

この定義は冪集合の公理と内包性公理によって正当化できます．演算 $\mathcal{P}$ は，いくらでも大きな濃度の集合を作ることのできる方法を与えてくれます．

定理 10.15. (カントール)　$x \prec \mathcal{P}(x)$. □

選択公理 AC があれば，定理 10.15 からただちに ω より大きな基数があることがいえますが，じつをいうとこれには AC は必要ありません．

定理 10.16. $\forall \alpha \exists \kappa (\kappa > \alpha \wedge \kappa$ は基数である$)$.

【証明】 $\alpha \ge \omega$ と仮定しなさい．$W = \{ R \in \mathcal{P}(\alpha \times \alpha) : R$ は α を整列順序づけする$\}$, $S = \{ \mathrm{type}(\alpha, R) : R \in W \}$ とおく (この S は置換公理によって集合として存在する)．このとき $\sup(S)$ は α より大きな基数である．□

定義 10.17. α^+ は α より大きな基数のうちで最小のもののことである．ある順序数 α について $\kappa = \alpha^+$ となるとき κ を**後続型基数**という．基数 κ が ω より大きくしかも後続型基数ではないとき，κ を**極限基数**という．□

定義 10.18. $\aleph_\alpha$ あるいは ω_α は，α に関する次のような超限再帰によって定義される．

訳注：$\aleph$ はヘブライ語の文字で，アレフ (aleph) と読みます．

(1) $\omega_0 = \omega$.

(2) $\omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+$.

(3) 極限順序数 γ については $\omega_\gamma = \sup\{\omega_\alpha : \alpha < \gamma\}$. □

補題 10.19.

(1) どの ω_α も基数である.

(2) どんな無限基数もある α についての ω_α に等しい.

(3) $\alpha < \beta \to \omega_\alpha < \omega_\beta$.

(4) ω_α が後続型基数であるのは α が後続型順序数であるちょうどそのときであり, ω_α が極限基数であるのは α が極限順序数であるちょうどそのときである. □

基数の基本的な性質の多くは AC を必要とします. 文献 [Jech 1973] では, AC がないとどんなことが起こるか論じられています.

補題 10.20. (AC)　X から Y の上への関数 f があるなら, $|Y| \leq |X|$ である.

【証明】 R が X を整列順序づけするものとしなさい. $f^{-1}(\{y\})$ の R-最小要素を $g(y)$ として $g : Y \to X$ を定義しなさい. そうすれば, g は 1 対 1 なので $Y \precsim X$ となる. □

定理 10.16 の証明と同様にすれば, $\mathcal{P}(\omega)$ から ω_1 の上への写像があることは, AC がなくても証明できます. しかし ω_1 から $\mathcal{P}(\omega)$ の中への 1 対 1 写像を作ってみせることはできません.

補題 10.21. (AC)　もしも $\kappa \geq \omega$ でどの $\alpha < \kappa$ についても $|X_\alpha| \leq \kappa$ なら, $\left|\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha\right| \leq \kappa$ である.

【証明】 各 α について X_α から κ の中への 1 対 1 写像 f_α を選びなさい. それらを $\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ から $\kappa \times \kappa$ の中への 1 対 1 写像を定めるために用いなさい. f_α の選択は $\mathcal{P}\left(\bigcup_\alpha X_\alpha \times \kappa\right)$ の整列順序づけを用いてなされる. □

レヴィによると, $\mathcal{P}(\omega)$ や ω_1 が可算個の可算集合の和集合になるということも ZF と両立します.

補題 10.21 のたいへん重要な変形の一つが, モデル理論における下向きのレーヴェンハイムとスコーレムとタルスキの定理で, これは集合論でも頻繁に利用されます (たとえば第 IV 章の 7.8 など). 定理 10.23 はこの定理の純粋に組み合わせ論的なバージョンです.

定義 10.22. 集合 A 上の n-**元関数**とは，$n>0$ のときは $f:A^n\to A$ のような f のこと，$n=0$ のときは A の要素のことである．$B\subset A$ なる B が f のもとで**閉じている**とは，$f''B^n\subset B$ ということ ($n=0$ の場合は $f\in B$ ということ) である．**有限的関数**とはいろいろな自然数 n についての n-元関数の総称である．$\mathcal{S}$ が有限的関数からなる集合で $B\subset A$ であるとき，B の $\mathcal{S}$ に関する**閉包**とは，$B\subset C\subset A$ であってしかも $\mathcal{S}$ に属するすべての関数について閉じているような C のうち，最小のもののことである．□

最小の C は必ずあるということに注意しましょう．つまり $\bigcap\{D: B\subset D\subset A\wedge$ D は $\mathcal{S}$ について閉じている$\}$ がそうです．

定理 10.23. (AC)　κ を無限基数としなさい．$B\subset A, |B|\le\kappa$ とし，$\mathcal{S}$ を A 上の κ 個以下の有限的関数の集合としなさい．このとき B の $\mathcal{S}$ に関する閉包の濃度は κ 以下である．

【証明】 $f\in\mathcal{S}, D\subset A$ のとき，$f*D$ とは，f が n-変数のときは $f''(D^n)$ のこと，f が 0-変数のときは $\{f\}$ のこと，としよう．このとき $|D|\le\kappa\to|f*D|\le\kappa$ となることに注意．$C_0=B, C_{n+1}=C_n\cup\bigcup\{f*C_n: f\in\mathcal{S}\}$ とおきなさい．補題 10.21 と n に関する帰納法によって，すべての $n\in\omega$ について $|C_n|\le\kappa$ となる．$C_\omega=\bigcup_n C_n$ とおきなさい．すると C_ω は B の $\mathcal{S}$ に関する閉包で，10.21 によりその濃度は κ 以下である．□

定理 10.23 の簡単な例として，無限な群はいつでも可算な無限部分群をもつ，という事実があります．これを確かめるには，$B\subset G$ を $|B|=\omega$ であるような任意の部分集合とし，$\mathcal{S}$ をその群の 2 元の積の演算と逆元を求める演算とからなるものとして，定理 10.23 を適用します．

本当は，定理 10.23 は群ではなく集合論のモデルに応用しようと思って用意したものです．

次に基数の冪に目を転じましょう．

定義 10.24. $A^B={}^BA=\{f: f$ は関数である $\wedge\,\mathrm{dom}(f)=B\wedge\mathrm{ran}(f)\subset A\}$．□

$A^B\subset\mathcal{P}(B\times A)$ なので，冪集合の公理によって A^B は集合として存在します．

定義 10.25. (AC)　$\kappa^\lambda=|{}^\lambda\kappa|$．□

A^B と ${}^BA$ のどちらの書き方もいろいろな本でよく用いられています．基数の冪

を問題にしているときは，κ^λ を基数の意味，${}^\lambda\kappa$ を関数の集合の意味で用いることによって，混乱を避けることができます．

補題 10.26. $\lambda \geq \omega, 2 \leq \kappa \leq \lambda$ であれば ${}^\lambda\kappa \approx {}^\lambda 2 \approx \mathcal{P}(\lambda)$.

【証明】 部分集合をその特徴関数と同一視することから ${}^\lambda 2 \approx \mathcal{P}(\lambda)$ がしたがい，それから

$${}^\lambda 2 \precsim {}^\lambda\kappa \precsim {}^\lambda\lambda \precsim \mathcal{P}(\lambda \times \lambda) \approx \mathcal{P}(\lambda) \approx {}^\lambda 2. \ \square$$

基数の冪は順序数の冪 (定義 9.5) とは別物です．順序数の 2^ω は ω ですが，基数の 2^ω は $|\mathcal{P}(\omega)|$ なので ω より大きくなります．この本では順序数の冪はほとんど使われないので，特に断わりのない限り，κ^λ は基数の冪を意味します．

$m, n \in \omega$ であれば順序数と基数の n^m は等しくなります (章末の演習問題 13).

有限な基数の冪を扱うためのよく知られた指数法則は，一般の場合にも成立します．

補題 10.27. (AC)　κ, λ, σ を任意の基数として

$$\kappa^{\lambda \oplus \sigma} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\sigma \ \text{そして}\ (\kappa^\lambda)^\sigma = \kappa^{\lambda \otimes \sigma}.$$

【証明】 AC を用いるまでもなく

$$(B \cap C = 0 \ \text{という仮定のもとで})\ {}^{(B \cup C)}A \approx {}^B A \times {}^C A$$

と，それから

$${}^C({}^B A) \approx {}^{C \times B} A$$

は容易にチェックできる．□

カントールは，$2^{\omega_\alpha} \geqq \omega_{\alpha+1}$ を証明できたのに 2^{ω_α} と $\omega_{\alpha+1}$ の間にある基数を作り出すことはできなかったので，$2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$ に違いないと予想しました．

定義 10.28. (AC)　**連続体仮説** CH とは，$2^\omega = \omega_1$ という言明のことである．**一般連続体仮説** GCH とは，$\forall\alpha(2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1})$ という言明のことである．□

GCH のもとで κ^λ を求めるのは簡単ですが，それには共終数ということばを導入しておかなければなりません．

定義 10.29. $f : \alpha \to \beta$ のとき f が α を β の中へ**共終に写す**とは，$\mathrm{ran}(f)$ が β の中で非有界であることをいう．□

定義 10.30. 順序数 β の**共終数** (記号は $\mathrm{cf}(\beta)$) とは，α を β の中へ共終に写す写像があるような順序数 α のうち最小のもののことである．□

そこで，$\mathrm{cf}(\beta) \le \beta$ です．β が後続型順序数の場合 $\mathrm{cf}(\beta) = 1$ です．

補題 10.31. 狭義増加であるような共終写像 $f:\mathrm{cf}(\beta) \to \beta$ $(\xi < \eta \to f(\xi) < f(\eta))$ がある．

【証明】 なんらかの共終写像 $g:\mathrm{cf}(\beta) \to \beta$ をとり，

$$f(\eta) = \max(g(\eta), \sup\{f(\xi) + 1 : \xi < \eta\})$$

によって f を再帰的に定義しなさい．□

補題 10.32. α が極限順序数で $f:\alpha \to \beta$ が狭義増加な共終写像だとすると，$\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$.

【証明】 $\mathrm{cf}(\alpha)$ から α の中への共終写像を f と合成したものを考えることにより $\mathrm{cf}(\beta) \le \mathrm{cf}(\alpha)$ がしたがう．逆向きの $\mathrm{cf}(\alpha) \le \mathrm{cf}(\beta)$ を見るために $g:\mathrm{cf}(\beta) \to \beta$ を共終写像とし，$h(\xi)$ を $f(\eta) > g(\xi)$ となるような最小の η としなさい．そうすると，$h:\mathrm{cf}(\beta) \to \alpha$ は共終写像である．□

系 10.33. $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\beta)) = \mathrm{cf}(\beta)$.

【証明】 補題 10.31 により存在が保証される狭義増加かつ共終な写像 $f:\mathrm{cf}(\beta) \to \beta$ に，補題 10.32 を適用しなさい．□

定義 10.34. 順序数 β が**正則**であるとは，それが極限順序数であってしかも $\mathrm{cf}(\beta) = \beta$ となることである．□

系 10.33 により，すべての極限順序数 β について $\mathrm{cf}(\beta)$ は正則です．

補題 10.35. 順序数 β が正則であれば，β は基数である．□

補題 10.36. ω は正則である．□

補題 10.37. (AC)　κ^+ は正則である．

【証明】 写像 f が α を κ^+ の中へ共終に写すとして，しかも $\alpha < \kappa^+$ だとしたら

$$\kappa^+ = \bigcup\{f(\xi) : \xi < \alpha\}$$

となるが，高々 κ 個の濃度 κ 以下の集合の和集合の濃度も，(補題 10.21 により) やはり κ 以下の濃度を有するはずである．□

選択公理 AC がなければ $\mathrm{cf}(\omega_1)=\omega$ も集合論の他の公理と矛盾しません．ZF において共終数が不可算な基数の存在を証明できるかどうかは，わかっていません．

訳注： 原書の出版後ほどなくして，すべての無限な基数の共終数が ω であるという言明と ZF とが両立することが，ある巨大基数公理の無矛盾性の仮定のもとで，ギティックによって証明されました ([Gitik 1980])．

訳注： 本来なら，補題 10.35 のすぐ後かこの次のパラグラフで定義されてしかるべき言葉ですが，正則でない基数のことを**特異基数**といいます．「正則」と訳される "regular" と「特異」と訳される singular が対をなす言葉であることは英語圏の人にとっては自明のこととして，定義が省略されたのかもしれません．

極限基数は正則でないこともしばしばあります．たとえば $\mathrm{cf}(\omega_\omega)=\omega$ です．もっと一般に次のことが成立します．

補題 10.38. α が極限順序数であれば $\mathrm{cf}(\omega_\alpha)=\mathrm{cf}(\alpha)$.

【証明】 補題 10.32 による．□

そこで，ω_α が正則な極限基数であれば $\omega_\alpha=\alpha$ です．しかしこの等式は正則極限基数の十分条件ではありません．たとえば $\sigma_0=\omega, \sigma_{n+1}=\omega_{\sigma_n}$, そして $\alpha=\sup\{\sigma_n : n\in\omega\}$ としましょう．この α は $\omega_\alpha=\alpha$ をみたす最初の順序数ですが，$\mathrm{cf}(\alpha)=\omega$ となっています．最初の正則極限基数は，かなり大きいのです．

定義 10.39.

(1) 基数 κ が**弱到達不能基数**であるとは，κ が正則な極限基数であるということである．

(2) (AC) κ が**強到達不能基数**であるとは，$\kappa>\omega$ で κ は正則であり，しかも

$$\forall\lambda<\kappa(2^\lambda<\kappa)$$

となるということである．□

そこで，強到達不能基数は弱到達不能基数でもあります．GCH のもとでは両者は一致します．2^ω が弱到達不能である，あるいは，最初の弱到達不能基数よりも大きいということも，集合論の公理と矛盾しません (第 VII 章の 5.16 を見てください)．弱到達不能基数の存在を ZFC から証明することはできません (第 VI 章の

4.13 を見てください).

カントールの対角線論法をすこし手直しすると $(\omega_\omega)^\omega > \omega_\omega$ が得られます．一般に，次のことが成立します．

補題 10.40. (ケーニヒ (König) の補題) (AC)　κ が無限基数で $\mathrm{cf}(\kappa) \le \lambda$ であれば，$\kappa^\lambda > \kappa$.

【証明】 なんらかの共終な写像 $f:\lambda \to \kappa$ を固定して考える．写像 $G:\kappa \to {}^\lambda\kappa$ が与えられたとしなさい．G が上への写像になりえないことを証明しよう．$h(\alpha)$ を

$$\kappa \setminus \{(G(\mu))(\alpha) : \mu < f(\alpha)\}$$

の最小要素と定めて，$h:\lambda \to \kappa$ を定義しなさい．このとき $h \notin \mathrm{ran}(G)$ である．□

系 10.41. (AC)　$\lambda \ge \omega$ のとき $\mathrm{cf}(2^\lambda) > \lambda$.

【証明】 $(2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \otimes \lambda} = 2^\lambda$ なので，$\kappa = 2^\lambda$ とおいて補題 10.40 を適用しなさい．□

補題 10.42. (AC＋GCH)　基数 κ, λ はいずれも 2 以上で，少なくともどちらか一方は無限であると仮定する．そのとき，

(1) $\kappa \le \lambda \to \kappa^\lambda = \lambda^+$.

(2) $\kappa > \lambda \ge \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa^\lambda = \kappa^+$.

(3) $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa^\lambda = \kappa$.

【証明】 (1) は補題 10.26 による．(2) について，補題 10.40 から $\kappa^\lambda > \kappa$ だが，$\kappa^\lambda \le \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$ でもある．(3) について，$\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ より ${}^\lambda\kappa = \bigcup\{{}^\lambda\alpha : \alpha < \kappa\}$ で，各 $\alpha < \kappa$ について $|{}^\lambda\alpha| \le \max(\alpha, \lambda)^+ \le \kappa$ である．□

次の定義もいろいろな場合に有用です．

定義 10.43. (AC)

(a) ${}^{<\beta}A = A^{<\beta} = \bigcup\{{}^\alpha A : \alpha < \beta\}$.

(b) $\kappa^{<\lambda} = |{}^{<\lambda}\kappa|$.　□

$\kappa \ge \omega$ のときには，$\kappa^{<\omega} = \kappa$ (系 10.13 (2))，$\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\theta : \theta < \lambda \wedge \theta \text{ は基数}\}$ (章末の演習問題 15) となります．そこで，10.43 (b) はもっぱら λ が極限基数のときに用いられます．

定義 10.44. (AC)　順序数 α に関する次のような超限再帰によって，$\beth_\alpha$ を定義

する.

訳注：$\beth$ はヘブライ語の文字で，ベート (beth) と読みます.

(1) $\beth_0 = \omega$.

(2) $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$.

(3) 極限順序数 γ については $\beth_\gamma = \sup\{\beth_\alpha : \alpha < \gamma\}$. □

したがって，GCH は $\forall\alpha(\beth_\alpha = \omega_\alpha)$ という言明と同値になります.

§11 実数

定義 11.1. $\mathbb{Z}$ は整数全体のなす環，$\mathbb{Q}$ は有理数全体のなす体，$\mathbb{R}$ は実数全体のなす体，$\mathbb{C}$ は複素数全体のなす体である. □

これらのものを自然数の全体から定義する方法はいろいろあり，どれでも適当な方法を用いてよいのですが，ここでは考えをまとめるため次のように考えます. 自然数の対 $\langle m,n\rangle$ によって整数 $m-n$ をあらわすつもりで同値関係 $\sim$ を適切に定めた上で，同値類の集合 $\omega\times\omega/\sim$ を $\mathbb{Z}$ とし，加法 $+$ と乗法 $\cdot$ をしかるべく定義します. 同様に，整数の対 $\langle x,y\rangle$ によって分数 x/y をあらわすつもりで同値関係を定義し，$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\}))/\simeq$ と定めます.

$$\mathbb{R} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) : X \neq 0 \wedge X \neq \mathbb{Q} \wedge \forall x \in \mathbb{Q}(x \in X \leftrightarrow \exists y \in X(x < y))\}.$$

つまり，$\mathbb{R}$ をデデキントの切断の左組全体の集合とします. 最後に，$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上に体の演算を普通どおりに定めたものとします.

§12 補遺 1：ZF 以外の集合論

クラスの存在を正式に認める点で ZF と異なる集合論の体系を 2 種類，ここで手短かに論じます. どちらの理論でもすべての集合はクラスですが，すべてのクラスが集合であるわけではありません. ここではさしあたり，クラスをあらわす変数として大文字を使うことにします. クラス X が集合であることを $\exists Y(X\in Y)$ と定義し，集合を表すために小文字を用いることにします. どちらの体系でも，集合の全体は通常の ZF の公理をみたします. そして，集合とクラスの共通部分はまた集合となります.

フォンノイマンとベルナイスとゲーデルの体系 NBG ([Gödel 1940] を参照) で

は，自由変数としてはクラスをあらわす変数を含んでいても，束縛変数としては集合を表わすものしか含まないような式 ϕ に限って，

$$\exists X \forall y (y \in X \leftrightarrow \phi(y))$$

の全称化をクラスに関する内包性公理として認めます．NBG は ZF の**保守拡大**です．すなわち，集合変数のみを含む文 ψ について，NBG$\vdash\psi$ となるのは ZF$\vdash\psi$ となるときだけです ([Wang 1949], [Shoenfield 1954] を参照)．ZF と違って，NBG は有限公理化可能です．

モースとケリーの体系 MK ([Kelly 1955] の付録を参照) は，クラス内包性公理に任意の式 ϕ が表れることを許すことによって NBG を強化したものといえます．MK は ZF の保守拡大ではありませんし，有限公理化可能でもありません (章末の演習問題 25 と 26)．

これら三つの体系，ZF, NBG, MK はどれも，これこそ《正解》だといえる決め手を欠いています．ZF はクラスを扱うために第 9 節でやったようなメタ理論を用いた韜晦(とうかい)を強いられるので，不恰好に見えます．ひとたびクラスの存在を正式に認めたなら，クラス内包性公理にあらわれる式 ϕ に対し NBG が課している制限を正当化するのは困難ですから，MK が適切な理論のように見えます．しかし，いったんクラスの存在を全面的に認めようと決心してしまったら，クラスのいろいろな性質を検討して

$$\{\mathbf{R} \subset \mathbf{ON} \times \mathbf{ON} : \mathbf{R} \text{ は } \mathbf{ON} \text{ を整列順序づけする}\}$$

のような超-クラスを形成してみたくなるのが自然な成りゆきです．ところが MK ではこのような対象はメタ理論での不恰好な韜晦を通じて扱うしかありません．

ZF と NBG と MK は同じ基礎概念の上に打ち立てられたものですので，この本での ZF についての証明は簡単に他の二つに対するものに直せます．ただし，技術的には ZF が多少扱いやすいのです．

ZF とは原理的に異なる集合論の一つとして，クワインの新基礎論 NF があります ([Quine 1937], [Quine 1951], [Rosser 1953] を参照)．ZF 同様 NF も集合だけを扱いますが，万有集合が存在します：$\exists v \forall x (x \in v)$．ZF と違って，NF で $\{x : \phi(x)\}$ の形成する際の制限は，サイズに関するものではなく ϕ の構文上の形式に関するものです．ϕ は《階層化》されていなくてはなりません．これは，大雑把にいうと，型理論の式から型を消し去ることによって ϕ を得ることができることを意味します．$x = x$ は階層化されていますが $x \in x$ や $x \notin x$ は階層化されていないので，ラッ

セルのパラドックスは回避されます．Con(ZF) の仮定の下ですら，NF が矛盾を含まないかどうかは知られていません．NF$\vdash\neg$AC であることがわかっています [Specker 1953]．この理由と，もう一つには，ZF において基礎の公理を用いるとき私たちが手にしているような，記述している対象の明瞭なイメージ (第 III 章を参照) を NF の場合には思い描けないという理由のため，NF は数学の基礎として一般には受け入れられていません．

集合論のいろいろな公理化についてのもっと詳しい議論は [Fraenkel–Bar-Hillel–Lévy 1973] にありますので，そちらを見てください．

§13　補遺 2：定義されたことばの除去

私たちの ZF 集合論の展開に厳密さを欠くように見えるところがあるとしたら，それは第 8 節で述べた定義されたことばの扱いでしょう．通常これはメタ理論における以下のような議論によって取り扱われます．形式化された言語を，そこで用いられる (論理記号を除く) すべての記号の集合 $\mathcal{L}$ を取り決めることによって定義します．$\mathcal{L}$ に属する記号として認められるのは，有限の n についての n-元の述語記号や n-元の関数記号です．0-元の関数記号は定数記号と呼ばれます．等号 $=$ は，論理記号とみなされます．そこで，集合論の言語の場合は $\mathcal{L}=\{\in\}$ です．

S を，言語 $\mathcal{L}$ の文のなんらかの集合としましょう．新しいことばを定義することで S を拡張することを考えます．$\mathcal{L}$ に属さない n-元の述語記号 P が加わって $\mathcal{L}'=\mathcal{L}\cup\{P\}$ となっているとしましょう．$\phi(x_1,\ldots,x_n)$ を $x_1,\ldots,x_n$ 以外の自由変数をもたないような $\mathcal{L}$ の式だとして，S の公理に

$$\forall x_1\cdots x_n[\phi(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow P(x_1,\ldots,x_n)]$$

を添加したものが，述語記号の添加による S の《一段階の》拡大をなします．$\mathcal{L}$ に属さない n-元の関数記号 f を加えて $\mathcal{L}'=\mathcal{L}\cup\{f\}$ としたとしましょう．$\phi(x_1,\ldots,x_n,y)$ を，$x_1,\ldots,x_n,y$ 以外の自由変数をもたないような $\mathcal{L}$ の式で，

$$S\vdash\forall x_1\cdots x_n\exists!y\phi(x_1,\ldots,x_n,y)$$

をみたすものだとします．このとき，S の公理に

$$\forall x_1\cdots x_n,y[y=f(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\phi(x_1,\ldots,x_n,y)]$$

を添加したものが，関数記号の添加による S の《一段階の》拡大をなします．次に，$\mathcal{L}=\mathcal{L}_0\subset\mathcal{L}_1\subset\mathcal{L}_2\subset\cdots\subset\mathcal{L}_n=\mathcal{L}'$，そして $S=S_0\subset S_1\subset S_2\subset\cdots\subset S_n=S'$ で，

各々の $\mathcal{L}_{i+1}$ が $\mathcal{L}_i$ に一個の新しい記号を添加したものであり，また，各々の S_{i+1} がその新しい記号の添加による S_i の一段階の拡大をなす場合，言語 $\mathcal{L}'$ の文の集合 S' のことを，S の**定義による拡大**と呼びます．

この本のあらゆる場所でこのような ZF (あるいは ZFC とか ZF^- とか) の有限段階の定義による拡大を用いて議論しています．その際，論理学の次のような定理を暗黙のうちに適用しているのです．

定理 13.1. 言語 $\mathcal{L}'$ の文の集合 S' が言語 $\mathcal{L}$ の文の集合 S の定義による拡大であるとき，$\mathcal{L}'$ の任意の式 $\psi'(x_1,\ldots,x_n)$ に対して $\mathcal{L}$ の式 $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ があって

$$S' \vdash \forall x_1,\ldots,x_n(\psi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \psi'(x_1,\ldots,x_n))$$

が成り立つ．□

集合論の場合は S が ZF で $\mathcal{L}$ が $\{\in\}$ であるわけですが，内包性公理や置換公理を $\mathcal{L}'$ の式 ψ' に適用しようとするときこの定理が関わってきます．式 ψ が存在することにより，S' を基礎にした議論では，もとの言語についての公理で十分だということになるわけです．しかしそうすると，今度は S' が本質的に新しいことをなにも付け加えないという意味の結果が必要になってきます．

定理 13.2. $\mathcal{L}'$ の文の集合 S' が $\mathcal{L}$ の文の集合 S の定義による拡大ならば，S' は S の保守拡大である．つまり，ϕ が $\mathcal{L}$ の文で $S' \vdash \phi$ ならば，じつは $S \vdash \phi$ である．□

定理 13.1 の証明は簡単で，拡大の段階数に関する数学的帰納法と，各段階の処理のために ψ' に関する数学的帰納法を用います．S のどんなモデルもあたらしい記号の解釈を付けくわえて S' をみたす拡張モデルにできるので，定理 13.2 はモデル論的には簡単です．しかし有限主義的に証明にはひと工夫が必要です．[Shoenfield 1967] を見てください．

超限再帰によって関数を定義することを述べた定理 9.3 は，形式上は，定義による関数の導入の図式とみなされます．F が ZF あるいは $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$ の定義による拡大 S において導入されたなんらかの $(n+1)$-変数の関数記号だとして，この定理が主張することは，あらたに $(n+1)$-変数の関数記号 G を導入することにより S を一段階拡大した S' へ移って

$$S' \vdash \forall x_1,\ldots,x_n \forall \alpha [G(x_1,\ldots,x_n,\alpha) = F(x_1,\ldots,x_n,G\restriction\alpha)]$$

とできる，ということです．ただし，$G\restriction\alpha$ は

$$\{\langle \xi, G(x_1,\ldots,x_n,\xi)\rangle : \xi < \alpha\}$$

を意味するものとします．定理 9.3 の証明を詳しく吟味することにより，この G を定義する $\mathcal{L}$ の式を得ることができます．

§14 補遺 3：メタ理論の形式化について

ZF 集合論を展開するために片付けておくべき点がもう一つあります．それは，メタ理論のオブジェクト (対象／もの) と形式化された理論のなかのオブジェクトの混同です．この点を注意深く吟味していくと，ゲーデルの二つの不完全性定理や，真偽の定義の不可能性に関するタルスキの定理に導かれます．

これらの定理について論じるには，**再帰的集合**(あるいは**決定可能な集合**) という概念が必要となります．大雑把にいえば，自然数の集合 R が再帰的であるとは，自然数 n を入力したら，$n \in R$ のときに《イエス》，$n \notin R$ のときに《ノー》を出力するようなコンピュータのプログラムを書けることを (メタ理論において) 意味します．たとえば，偶数全体の集合は再帰的です．再帰的集合の概念は，他の有限主義的オブジェクトにストレートに拡張できます．たとえば，述語論理の式全体の集合は再帰的です．入力された記号列が式であるか否かを答えさせるようにコンピュータをプログラムできるからです．同様に，ZF の公理全体の集合も再帰的です．こうした点についてのよりきちんとした議論は，[Enderton 1972], [Kleene 1952], [Shoenfield 1967] にあります．

これらの事項に関する重大な結果の一つとして，Con(ZF) を仮定する限り ZF の定理全体の集合は再帰的**ではない**，ということがあります．より一般に，T を，ZF を拡大する公理の無矛盾な集合とするとき，$\{\phi : T \vdash \phi\}$ は再帰的でありません．証明は上記の三つの文献か，章末の演習問題 24 を見てください．この結果からの一つの帰結が，ゲーデルの**第一不完全性定理**です．すなわち，そのような T が再帰的である限り，$T \nvdash \phi$ かつ $T \nvdash \neg\phi$ となるような文 ϕ が存在するという意味において，T は**不完全**なのです．証明は次のとおりです：そうした文 ϕ がなかったとすると，任意の文 ϕ について $T \vdash \phi$ あるいは $T \vdash \neg\phi$ が成立し，また，どちらかだけが成立します．そうすると，次のようにコンピュータをプログラムすることができ (したがって定理の集合が再帰的となり) ます．すべての形式的演繹をリストアップさせ，ϕ か $\neg\phi$ の証明が見つかった時点で停止すればよいのです．

もちろん，T が ZF そのものであった場合，この本でこれから示すとおり，T

から証明も反証もできない文 ϕ を具体的にあげることができます．たとえば AC がそうです．また T が ZFC だったら，ϕ として CH をとればよろしい．しかしながら，ここが第一不完全性定理の重要な点なのですが，ZF を再帰的で無矛盾な T にどのように拡張しても，T によって決定できない文が必ず残ります．それゆえ，《真であることすべて》の再帰的な公理化は，存在しません．

ゲーデルの第二不完全性定理は，手短にいうと，Con(ZF) には初等的証明がない，ということを主張します．実際には，ZF の枠組み内で形式化できるような方法による証明がまったくないのです．この定理とタルスキの定理をよりよく理解するためには，メタ理論のオブジェクトと形式化された理論の中で定義されたオブジェクトとの関係を，もっと詳しく見ておかなければなりません．

たとえば，数 1 を用いる方法は二つあります．一方では，メタ理論での概念として，たとえば《式 $x \in x$ は 1 個の自由変数をもつ》というように．他方では，形式化された理論 ZF の中で定義された対象としての 1, すなわち $\{0\}$ があります．

このように，二つの使い道が混乱を生みそうな場合には，両者を区別するために (クワインのかぎカッコ記法と呼ばれる) 次のような書き方をします．メタ理論の有限主義的オブジェクト Ob に対して $\ulcorner\mathrm{Ob}\urcorner$ を，ZF のある定義による拡大においてこのオブジェクトを意味する定数記号として用います．

具体的には，たとえば 0 を形式化される前の概念をあらわすためだけに用い，他方の $\ulcorner 0\urcorner$ を公理

$$\forall y\,(y = \ulcorner 0\urcorner \leftrightarrow \forall x(x \notin y))$$

によって導入された定数記号として用いるのです．同様に，ZF における 1, 2, 3 等の定義 (定義 7.13) は，実際には新しい定数記号 $\ulcorner 1\urcorner, \ulcorner 2\urcorner, \ulcorner 3\urcorner$ 等を公理

$$\forall y(y = \ulcorner 1\urcorner \leftrightarrow y = S(\ulcorner 0\urcorner))$$

$$\forall y(y = \ulcorner 2\urcorner \leftrightarrow y = S(\ulcorner 1\urcorner))$$

等々によって導入する，メタ理論における図式と考えるべきです．

もう一つの有限的オブジェクトとして自然数の有限列があります．これは ZF の中では $\omega^{<\omega}$ の要素として定式化されています (定義 7.21)．メタ理論で考えた自然数の有限列を s としたとき，形式化されたオブジェクトを，ここでも $\ulcorner s\urcorner$ と書くことにします．たとえば $\ulcorner\langle 8,1,5\rangle\urcorner$ は

$$\forall y[y = \ulcorner\langle 8,1,5\rangle\urcorner \leftrightarrow (y \text{ は関数} \wedge \mathrm{dom}(y) = \ulcorner 3\urcorner$$

$$\wedge y(\ulcorner 0 \urcorner) = \ulcorner 8 \urcorner \wedge y(\ulcorner 1 \urcorner) = \ulcorner 1 \urcorner \wedge y(\ulcorner 2 \urcorner) = \ulcorner 5 \urcorner)]$$

という定義により導入されます．

集合論の言語の式は，$\wedge, \neg$ といった記号の有限列です (第 2 節)．それでは，記号とはなんでしょうか．この問いをかわすために，メタ理論において，$\wedge$ とは数 1, $\neg$ は数 3, $\exists$ は数 5, そして，記号 (,), $\in$, $=$ とはそれぞれ数 7, 9, 11, 13 のことであると**定義**してしまいます (数とはなにか，ということはおいておきます)．いっぽう，変数 v_i は数 $2i$ のことだとします．そうすると，$v_3 = v_3$ は列 $\langle 6, 13, 6 \rangle$ です．こうしてすべての式が数の有限列となり，$\ulcorner \phi \urcorner$ が先ほどのように定義されます．

これと同様に，自然数の有限列の有限列 Υ, たとえば形式的演繹などに対して，しかるべきやり方で $\ulcorner \Upsilon \urcorner$ を導入することができます．

こうしてメタ理論のいろいろな有限的オブジェクトに形式化された理論の中で名前をつけることができたので，次には，こうしたオブジェクトの諸属性が，形式的定理にどのように反映されるだろうか，と問えるのです．この点を調べるにあたって，二つの水準を区別する必要があります．

第一の水準の例として，$\chi_{\mathrm{even}}(x)$ を $\exists y \in \omega\,(x = \ulcorner 2 \urcorner \cdot y)$ という式だとできるでしょう．そうすれば $\mathrm{ZF} \vdash \chi_{\mathrm{even}}(\ulcorner 8 \urcorner)$ や $\mathrm{ZF} \vdash \neg \chi_{\mathrm{even}}(\ulcorner 7 \urcorner)$ となることがチェックできるはずです．もっと一般に次のことが成り立ちます．

定理 14.1. 自然数の再帰的集合 R が任意に与えられたとすると，次に言う意味においてこの R を表現する式 $\chi_R(x)$ が存在する．すなわち，任意の自然数 n について

$$n \in R \rightarrow (\mathrm{ZF} \vdash \chi_R(\ulcorner n \urcorner)) \quad \text{かつ} \quad n \notin R \rightarrow (\mathrm{ZF} \vdash \neg \chi_R(\ulcorner n \urcorner))$$

が成立する．

有限列の再帰的集合や多変数の再帰的述語も，同様にして表現可能である．□

定理 14.1 は，再帰性の定義のどれかを用いれば (メタ理論において) 簡単に証明できます．

第二の水準の例としては次のことが成立します

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall n \in \omega (\chi_{\mathrm{even}}(x) \vee \chi_{\mathrm{even}}(x + \ulcorner 1 \urcorner)).$$

もっと一般に，A が再帰的述語をめぐるメタ理論での主張であれば，その述語を表現する式を用いて，対応する文 A^* を集合論の言語で書き下せます．有限主義的な方法のすべてを含み，もっとたくさんのことが ZF 集合論には取り入れられてい

るはずです (これには，述語を表現する式を《適切に》選ぶことが前提となります．章末の演習問題 22 を見てください)．ですから，もし A を有限主義的な論法で証明できれば，$\mathrm{ZF} \vdash A^*$ となることが期待されます．第一の水準と違って，第二の水準は一つの定理で精確に言いあらわすのには向いていません．これは，有限主義的ということばが厳密に定義されていないことによるのですが，それでも第二の水準での主張は必要に応じて個別に検証できます．ゲーデルの第二不完全性定理を得るためには，特に，初等論理学のおもな構文論的な結果がすべて ZF において証明可能であることを確かめる必要があります．

第二不完全性定理と真偽の定義不可能性に関するタルスキの定理の背後にある基本的な結果を，ここで述べることができます．

定理 14.2. (ゲーデル)　変数 x をただ一つの自由変数とする任意の式 $\phi(x)$ に対して，文 ψ が存在して

$$\mathrm{ZF} \vdash \psi \leftrightarrow \phi(\ulcorner \psi \urcorner)$$

が成立する．

【**証明**】式 $\phi(v(\ulcorner v \urcorner))$ を $\sigma(v)$ とおきなさい．すると一個の自由変数をもつ任意の式 θ について $\mathrm{ZF} \vdash \sigma(\ulcorner \theta \urcorner) \leftrightarrow \phi(\theta(\ulcorner \theta \urcorner))$ である．特に

$$\mathrm{ZF} \vdash \sigma(\ulcorner \sigma \urcorner) \leftrightarrow \phi(\ulcorner \sigma(\ulcorner \sigma \urcorner) \urcorner)$$

となるので，文 $\sigma(\ulcorner \sigma \urcorner)$ を ϕ とすればよい．

さて，この σ の定義には多少の説明が必要かもしれません．各々の式 θ に対して定数 $\ulcorner \theta \urcorner$ を定義によって導入できますが，文 $\theta(\ulcorner \theta \urcorner)$ はもともとの集合論の言語の文でなければならないので，定義された定数を定理 13.1 を用いて除去することによって，$\theta(\ulcorner \theta \urcorner)$ を得ることになります．このとき写像 $\theta \mapsto \theta(\ulcorner \theta \urcorner)$ は再帰的写像であり，式 $\chi(v, w)$ によって表現できます．すなわち，任意の文 τ について，τ が $\theta(\ulcorner \theta \urcorner)$ と一致することと $\mathrm{ZF} \vdash \chi(\ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \tau \urcorner)$ とが必要十分となります．特に $\mathrm{ZF} \vdash \chi(\ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \theta(\ulcorner \theta \urcorner) \urcorner)$ です．また，(第二の水準の例として) $\mathrm{ZF} \vdash \forall v \exists! w \chi(v, w)$ です．したがって任意の θ について

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall w (\chi(\ulcorner \theta \urcorner, w) \leftrightarrow w = \ulcorner \theta(\ulcorner \theta \urcorner) \urcorner)$$

が成立します．そこで，$\sigma(v)$ とは $\exists w (\chi(v, w) \wedge \phi(w))$ のことだとしましょう．このとき任意の θ について，

$$\mathrm{ZF} \vdash \sigma(\ulcorner\theta\urcorner) \leftrightarrow \exists w\,(\chi(\ulcorner\theta\urcorner, w) \wedge \phi(w)),$$

したがって

$$\mathrm{ZF} \vdash \sigma(\ulcorner\theta\urcorner) \leftrightarrow \phi(\ulcorner\theta(\ulcorner\theta\urcorner)\urcorner)$$

となります. □

いま $\chi(x)$ を自由変数を一つだけもつ任意の式とすれば，定理 14.2 を $\neg\chi(x)$ に適用することによって**真偽の定義不可能性に関するタルスキの定理**が得られます. すなわち，なんらかの文 ψ については

$$\mathrm{ZF} \vdash \psi \leftrightarrow \neg\chi(\ulcorner\psi\urcorner).$$

実在主義的に解釈すれば，これは，どんな式 $\chi(x)$ も《x は正しい文である》とは読めない，ということです. なぜなら，$\chi(\ulcorner\psi\urcorner)$ と ψ 自身との真偽が一致しないような文 ψ が必ずあるからです.

次に，第二不完全性定理について論じましょう. ZF の再帰的な拡張 T を一つ決めて考えます. 式 $\chi^T_{\mathrm{pf}}(v,w)$ によって,《Υ は ψ の T からの形式的証明である》という述語を表現したとしましょう. これによると，$\mathrm{ZF} \vdash \chi^T_{\mathrm{pf}}(\ulcorner\Upsilon\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner)$ となるのは Υ が ψ の T からの形式的証明であるときで，またそのときに限ります. 式 $\varphi^T(w)$ とは $\neg\exists v\chi^T_{\mathrm{pf}}(v,w)$ のことだとします. すると $\varphi^T(w)$ は《w は T から証明できない》と読めることになります. さらに，CON^T を $\varphi^T(\ulcorner\exists v(v \neq v)\urcorner)$ のことだとしましょう. すると CON^T は，ある特定の論理的に反証されうる文が T から証明できない，いいかえれば，T は無矛盾である，と主張しています.

定理 14.3. (ゲーデルの第二不完全性定理) T が ZF 集合論の再帰的で無矛盾な拡張であれば $T \nvdash \mathrm{CON}^T$.

【証明】 定理 14.2 を φ^T に適用して $\mathrm{ZF} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi^T(\psi)$ をみたす文 ψ を作りなさい. まず,

$$\mathrm{Con}(T) \rightarrow T \nvdash \psi \tag{$*$}$$

となることに注意しなさい. これを確かめるために，$T \vdash \psi$ と仮定し Υ を ψ の T からの形式的証明としなさい. すると $\mathrm{ZF} \vdash \chi^T_{\mathrm{pf}}(\ulcorner\Upsilon\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner)$, したがって $\mathrm{ZF} \vdash \neg\varphi^T(\ulcorner\psi\urcorner)$ だから $\mathrm{ZF} \vdash \neg\psi$, したがって $T \vdash \neg\psi$ となって T は矛盾する.

上記の (∗) の証明はメタ理論で行なわれたが，第二水準の分析を注意深く行なえば，これを ZF 内で形式化することができ

$$\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{CON}^T \to \varphi^T(\ulcorner \psi \urcorner)$$

が得られる．ところが，ψ と $\varphi^T(\ulcorner \psi \urcorner)$ は ZF のもとで同値性が証明でき，しかも T は ZF より強い理論だから，

$$T \vdash \mathrm{CON}^T \to \psi.$$

このことから，(*) の ψ を CON^T に書き換えてよいことがいえて，

$$\mathrm{Con}(T) \to (T \nvdash \mathrm{CON}^T)$$

が得られる．□

ここでじつは

$$T \vdash \mathrm{CON}^T \leftrightarrow \psi$$

です．なぜならば，T において ψ と $\varphi^T(\ulcorner \psi \urcorner)$ が同値であり，後者は，なんらかの文が T から証明できないと読め，そうであるからには T は無矛盾であるはずだからです．自分自身の T からの証明不可能性を主張する文のことを T のゲーデル文といいますが，T のすべてのゲーデル文は T のもとで (じつは ZF のもとで) CON^T との同値性が証明でき，したがって，それらすべてがお互いに同値ということになります．

第二不完全性定理を実在主義的にみると，第一定理と同じく，公理の再帰的集合によってすべての真理をとらえきることはできないことを示しています．それはこういうことです．公理の集合 T があって，私たちが T に属する公理をすべて真と認めるのであれば，T から証明される文もまたすべて真です．このとき T は無矛盾なはずで，だから CON^T は正しい文だけれども，T から証明できないということになります．ここで実際には T は ZF 全体の拡大である必要は必ずしもありません．一階述語計算の基本的な事項を証明するのに必要な有限の組み合わせ論が T 内で展開できることが必要とされるだけです．

第 I 章の演習問題

特にことわりのない限り ZFC で考えなさい．基礎の公理が関わってくる箇所は全然ありませんが，選択公理 AC が必要になる箇所はいくつかあります．

[1] $z = \langle\langle x, y\rangle, \langle v, w\rangle\rangle$ をあらわす式を $\in$ と $=$ だけを使って書き下しなさい．

[2] $\alpha < \beta$ ならば $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$ かつ $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ であることを示しなさい．この

"$\leq$" を "$<$" にはできないことの例をあげなさい．また，

$$\alpha \leq \beta \rightarrow \exists ! \delta (\alpha + \delta = \beta)$$

を示しなさい．

[3] $\gamma > 0$ のとき，$\alpha < \beta$ ならば $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$ かつ $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ であることを示しなさい．この "$\leq$" を "$<$" にはできないことの例をあげなさい．また，

$$(\alpha \leq \beta \wedge \alpha > 0) \rightarrow \exists ! \delta, \xi (\xi < \alpha \wedge \alpha \cdot \delta + \xi = \beta)$$

を示しなさい．

[4] 順序数の冪が

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} \quad と \quad (\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$$

をみたすことを確かめなさい．

[5] α を極限順序数とするとき，次が同値であることを示しなさい．

(a) $\forall \beta, \gamma < \alpha (\beta + \gamma < \alpha)$.
(b) $\forall \beta < \alpha (\beta + \alpha = \alpha)$.
(c) $\forall X \subset \alpha (\mathrm{type}(X) = \alpha \vee \mathrm{type}(\alpha \setminus X) = \alpha)$.
(d) (順序数の冪の意味で) $\exists \delta (\alpha = \omega^{\delta})$.

このような α を**分解不能**であるといいます．

[6] カントールの標準形定理と呼ばれる次の定理を証明しなさい：ゼロでない任意の順序数 α は

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot \ell_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot \ell_n,$$

ただし $1 \leq n < \omega$, $\alpha \geq \beta_1 > \cdots > \beta_n$, という形式で表示できる．また，この表示は一意的である．$n = 1$, $\ell_1 = 1$, $\beta_1 = \alpha$ (つまり $\omega^{\alpha} = \alpha$) となるような順序数 α のことを**イプシロン数** といいます．κ が不可算基数ならば κ はイプシロン数であり，しかも κ より小さいイプシロン数が κ 個あることを示しなさい．特に，最初のイプシロン数 ϵ_0 は可算です．この演習問題では，冪はすべて順序数の冪を意味するものとします．

[7] 順序数の冪を次のように定義しても定義 9.5 と同等であることを示しなさい．

$$F(\alpha, \beta) = \{ f \in {}^{\beta}\alpha : |\{ \xi : f(\xi) \neq 0 \}| < \omega \}$$

とおきなさい．$f, g \in F(\alpha, \beta)$, $f \neq g$ のとき，$f \lhd g$ を $f(\xi) \neq g(\xi)$ となる最大の ξ に

おいて $f(\xi)<g(\xi)$ となることだとしなさい．そして $\alpha^\beta=\mathrm{type}(\langle F(\alpha,\beta),\lhd\rangle)$ と定めなさい．

[8] シュレーダーとベルンシュタインの定理 10.2 を ZF^- 集合論において証明しなさい．

[ヒント] $f:A\to B, g:B\to A$ であって，f も g も 1 対 1 写像だったとしなさい．$A_0=A$, $B_0=B$, $A_{n+1}=g''B_n$, $B_{n+1}=f''A_n$, $A_\infty=\bigcap_n A_n$, $B_\infty=\bigcap_n B_n$ とおきなさい．$h(x)$ を $x\in A_\infty\cup\bigcup_n(A_{2n}\setminus A_{2n+1})$ のときは $f(x)$ と定め，それ以外のときは $h(x)=g^{-1}(x)$ と定めなさい．このとき $h:A\to B$ であり，h は 1 対 1, 上への写像になります．

[9] ZF^- 集合論において，次が同値であることを証明しなさい．

(a) X は整列順序づけできる．

(b) $\forall Y\subset X(Y\neq 0\to C(Y)\in Y)$ をみたす関数 $C:(\mathcal{P}(X)\setminus\{0\})\to X$ が存在する．

(b)→(a) の [ヒント] $p\neq X$ を固定し $Y\notin\mathcal{P}(X)\setminus\{0\}$ の場合には $C(Y)=p$ とおきなさい．超限再帰により

$$F(\alpha)=C(X\setminus\{F(\xi):\xi<\alpha\})$$

と定義しなさい．

[10] ZF^- 集合論において，次が同値であることを証明しなさい．

(a) AC.

(b) $\forall\mathcal{S}[0\notin\mathcal{S}\to\exists C(C:\mathcal{S}\to\bigcup\mathcal{S}\wedge\forall Y\in\mathcal{S}(C(Y)\in Y))]$.

(c) 空でない集合の (任意個数の) 積集合が空でないこと．

(d) ティコノフの定理．

訳注：一般の集合族の積集合は，第 II 章 1.9 などで使用されているにも関わらず，本文中で定義されていません．集合の集合 $\{X_i:i\in I\}$ が与えられたとき，$\mathrm{dom}(f)=I$ かつ $\forall i\in I\,(f(i)\in X_i)$ をみたす関数 f 全体の集合を $\{X_i:i\in I\}$ の積集合と呼び，$\prod_{i\in I}X_i$ と書きます (演習問題 18). 各 X_i がコンパクト位相空間であれば，それらの積集合 $\prod_{i\in I}X_i$ に直積位相を与えたものもまたコンパクト位相空間である，というのがティコノフの定理です．証明はたとえば [松坂 1967] の第 5 章第 2 節にあります．

[ヒント] (ケリーによる (d)→(c) の証明の概略) $A_i\,(i\in I)$ が，空でない集合だと

します．$p \notin \bigcup_i A_i$ を固定しなさい．$X_i = A_i \cup \{p\}$ とおき，p の X_i における近傍としては補集合が有限になるような集合を考えなさい．$\prod_i A_i \neq 0$ を証明するために $\prod_i X_i$ のコンパクト性を用いなさい．［コメント］ コンパクトなハウスドルフ空間に制限したティコノフの定理は，選択公理 AC を導きません (ハルペンとレヴィの結果，[Jech 1973] を見てください)．

[11] $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(A)$ が**有限性の**集合族であるとは，すべての $X \subset A$ について

$$X \in \mathcal{F} \leftrightarrow \forall Y \subset X(|Y| < \omega \rightarrow Y \in \mathcal{F})$$

となることだとします．**ツォルンの補題**の一つの別表現である**タッキーの補題**は，任意の有限性の集合族 $\mathcal{F}$ について

$$\forall X \in \mathcal{F} \exists Y \in \mathcal{F}(X \subset Y \wedge \forall Z \in \mathcal{F}(Y \subset Z \rightarrow Y = Z))$$

が成り立つ，ということを言います．ZF^- 集合論において AC$\leftrightarrow$タッキーの補題を証明しなさい．［ヒント］ $\rightarrow$ のためには $A = \{a_\xi : \xi < \kappa\}$ と整列して，

$$(X \cup \{a_\eta : \eta < \xi \wedge a_\eta \in Y\} \cup \{a_\eta\}) \in \mathcal{F}$$

のときに $a_\xi \in Y$ というように，再帰的に Y を構成すればよろしい．$\leftarrow$ のためには，問題 10 (b) を参照：C を，$\mathcal{S}$ 上の極大な部分選択関数としなさい．

[12] ZF^- 集合論において，$\aleph(X) = \sup(\{\alpha : \exists f \in {}^\alpha X(X$ は 1 対 1 写像$)\})$ と定義しなさい (これをハルトークスのアレフ関数と呼びます)．次のことを証明しなさい．

*(a) $\aleph(X) < \aleph(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))$ ($\aleph(X) < \aleph(\mathcal{P}^4(X))$ のほうが簡単です)．

(b) $\forall n \in \omega(\mathcal{P}(X_{n+1}) \precsim X_n)$ となるような集合列 $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ は存在しない．

(c) 選択公理 AC からは，X が無限集合ならばいつでも $\aleph(X) = |X|^+$ となることが導かれる．

[13] $n, m \in \omega$ のとき順序数と基数の n^m が一致することを証明しなさい．［ヒント］ m に関する帰納法を用いなさい．

[14] 無限基数 $\lambda \leq \kappa$ について $|\{X \subset \kappa : |X| = \lambda\}| = \kappa^\lambda$ を証明しなさい．

[15] λ が無限基数，κ が任意の基数のとき

$$\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\theta : \theta < \lambda \wedge \theta \text{ は基数}\}$$

となることを証明しなさい.

*[16] CH を仮定し，GCH は仮定しないで，$1 \le n < \omega$ ならばいつでも $(\omega_n)^\omega = \omega_n$ となることを証明しなさい.

[17] 次の集合の濃度が 2^ω であることを証明しなさい.

(a) $\mathbb{R}$.

(b) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : f$ は連続$\}$.

*(c) $\{X \subset \mathbb{R} : X$ はボレル集合$\}$.

[18] 各 $i \in I$ に対して κ_i を基数として，

$$\sum_i \kappa_i = |\bigcup\{\{i\} \times \kappa_i : i \in I\}|$$

および

$$\prod_i \kappa_i = |\{f : \mathrm{dom}(f) = I \wedge \forall i(f(i) \in \kappa_i)\}|$$

を定義します.

(a) $\forall i \in I(\theta_i < \kappa_i)$ のとき

$$\sum_i \theta_i < \prod_i \kappa_i$$

となることを証明しなさい.

(b) ケーニヒの補題 (10.40) を，この (a) から直接導き出しなさい.

[ヒント] (a) のためには 10.40 の証明を一般化してみなさい. (b) のためには，$\kappa_i = \kappa$, $I = \lambda$ とし，κ において非有界な $\{\theta_i : i \in I\}$ を考えなさい.

*[19] κ を無限基数とし $\lhd$ を κ 上の任意の整列順序関係とするとき，部分集合 $X \subset \kappa$ で，$|X| = \kappa$ であってしかも $\lhd$ が X では $<$ と一致するようなものがあることを示しなさい.

*[20] ラドーとミルナーのパラドックスと呼ばれる次の言明を証明しなさい：κ を任意の無限基数とするとき，もしも $\kappa \le \alpha < \kappa^+$ ならば，集合列 $X_n \subset \alpha$ $(n \in \omega)$ が存在して $\alpha = \bigcup_n X_n$ かつ $\mathrm{type}(X_n) \le \kappa^n$ となる． [ヒント] α に関する帰納法を用いなさい.

[21] 代数的トポロジーやホモロジー代数などでは，(空間や環などの) 集合につい

ての定理を証明するために真のクラスである圏 (category) を用いる．こうした分野を ZFC の枠内でいかにして形式化できるかを示しなさい．

[22] Con(ZF) を仮定する．次のような式 $\psi(x)$ が存在することを示しなさい：ψ は定理 14.1 の意味で集合 $\{n : n$ は偶数$\}$ を表現するが，

$$\mathrm{ZF} \nvdash \forall x \in \omega(\psi(x) \vee \psi(x + \ulcorner 1 \urcorner))$$

である．

[23] ゲーデルの不完全性定理と真偽の定義不可能性に関するタルスキの定理は，$\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ の任意の再帰的拡張において成立することを示しなさい．

[24] T を ZF の任意の無矛盾な拡大とします．文の集合 $\{\psi : T \vdash \psi\}$ が再帰的でないことを証明しなさい．［ヒント］もしもこの集合が再帰的ならば，定理 14.1 により式 $\chi(x)$ が存在して，任意の ψ について

$$(T \vdash \psi) \rightarrow (\mathrm{ZF} \vdash \chi(\ulcorner \psi \urcorner))$$

かつ

$$(T \nvdash \psi) \rightarrow (\mathrm{ZF} \vdash \neg\chi(\ulcorner \psi \urcorner))$$

となります．定理 14.2 により $\mathrm{ZF} \vdash \phi \leftrightarrow \neg\chi(\ulcorner \psi \urcorner)$ となるような文 ψ があり，したがって T が矛盾することが示されます．

[25] MK 集合論が ZF 集合論の無矛盾性を証明すること，したがってそれは ZF 集合論の保守拡大ではないことを示しなさい．［ヒント］MK 集合論において，集合に対する変数のみからなる式の充足性を定式化してみなさい．

[26] MK 集合論が有限公理化可能ではないことを証明しなさい．［ヒント］MK がそれ自身の任意の有限部分理論の無矛盾性を証明することを示しなさい．

第II章
無限集合の組み合わせ論

独立性証明が話題になる前の時代に集合論の名で呼ばれていた研究領域のことを，無限集合の組み合わせ論と呼ぶことにしましょう．第I章第10節で論じた基数の算術のいろいろな結果はそのわかりやすい例ですが，まだほんのとっかかりにすぎません．

組み合わせ論と独立性証明の関わりあいは，次の二つの面から語ることができます．一つには，従来の組み合わせ論で提出されていた未解決問題のうちの多くがZFCと独立であることが，第VI章～第VIII章の方法を用いることによって，いまでは知られています．もう一つには，独立性証明を実行するために，従来の組み合わせ論で知られていたさまざまな事実が利用されています．さらに，組み合わせ論と独立性証明のこのような関わりあいから，$\diamondsuit$ (ダイアモンド) とかMA (マーティンの公理) といった新しい組み合わせ論的原理が生まれました．これらの原理はいずれも，従来の方法で発見されていてもおかしくなかったものですが，実際には，独立性証明以前の時代には知られていませんでした ($\diamondsuit$ は第7節，MAは第2節で扱います)．

この章の題材は第VI章以降との関係を優先して選んだため，組み合わせ論そのものとしては重要なたくさんのトピックを，割愛してしまいました．そうした話題も含めてもっと詳しいことが知りたい場合は，[Erdös–Hajnal–Máté–Rado 1984] や [Kunen 1977] を見てください．

組み合わせ論に特に興味はないという読者は，この章をまるごと飛ばして進み，後から必要に応じて戻ってきて参照してもいいでしょう．続きを読むのにどうしても必要になるのは，MAを扱った第2節だけです．それも，ここでの内容が第VII

章での強制法の扱いの下敷きになっているためですから，第 2 節の内容のうち測度論やトポロジーの技術的な細かい議論は省略しても大丈夫です.

この章の議論は ZFC$^-$ の基礎の上に建てられていると考えることができます. たいていの数学と同様に，ここでも基礎の公理はまったく関係しません.

§1 ほとんど交わりがない集合族と，交わりが一定の集合族

定義 1.1. κ を無限基数とする. κ の部分集合 x と y が**ほとんど交わりがない**とは，$|x \cap y| < \kappa$ ということである. **ほとんど交わりがない集合族**とは，$\mathcal{P}(\kappa)$ の以下の条件をみたすような部分集合 $\mathcal{A}$ のことである：$\forall x \in \mathcal{A}(|x| = \kappa)$ であって，さらに $\mathcal{A}$ に属する相異なる二つの要素はいつでも互いにほとんど交わりがない. ほとんど交わりがない集合族は，他のいかなるほとんど交わりがない集合族にも真に含まれることがないとき，**極大**であると言われる (このような集合族は，また **m.a.d. 集合族**と呼ばれる). □

《ほとんど交わりがないこと》と《交わらないこと》は，単に名前の上で似ているにすぎません. というのも，交わらないことについて言えば，κ の，互いに交わらない κ 個より多くの部分集合からなる集合族がありえないことは明らかです. また $|\kappa \times \kappa| = \kappa$ であることから，互いに交わらない κ 個の部分集合のなす集合族で，その和集合がちょうど κ 全体になるものがあり，そのような集合族はもちろん互いに交わらない集合族のうちでは極大になっています. ところが，ほとんど交わりがないことについては，次の定理が成立します.

定理 1.2. κ を正則な無限基数とする. このとき，

(a) $\mathcal{A}$ が，$\mathcal{P}(\kappa)$ に含まれるほとんど交わりがない集合族であって $|\mathcal{A}| = \kappa$ となるものであれば，極大ではない.

(b) κ の部分集合からなる，κ^+ 以上の濃度をもつ m.a.d. 集合族 $\mathcal{B}$ が存在する.

【証明】 (b) は (a) とツォルンの補題から次のようにしてすぐに導くことができる. $\mathcal{A}$ を，κ の部分集合からなるサイズ κ の交わらない集合族 (あるいは，ほとんど交わりがない集合族でもよい) としよう. 次に $\mathcal{B}$ を $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ となるような m.a.d. 集合族としよう. すると，(a) より $|\mathcal{B}| > \kappa$ である.

(a) の証明には対角線論法を用いる．$\mathcal{A}=\{A_\xi:\xi<\kappa\}$ としよう．$B_\xi=A_\xi\setminus\bigcup_{\eta<\xi}A_\eta$ とおけば，$B_\xi\neq 0$ である．というのも，$B_\xi=A_\xi\setminus\bigcup_{\eta<\xi}(A_\xi\cap A_\eta)$ であって $|A_\xi|=\kappa$ であり，また κ が正則基数であることより $\left|\bigcup_{\eta<\xi}(A_\xi\cap A_\eta)\right|<\kappa$ であるから．そこで B_ξ から要素 β_ξ をとろう．このとき，B_ξ たちが互いに交わらないので β_ξ たちは互いに異なる．そこで，集合 D を $D=\{\beta_\xi:\xi<\kappa\}$ と定義すればこれは濃度 κ をもつ．$\beta_\xi\in A_\eta$ となるのは $\eta\geq\xi$ のときに限るから，$D\cap A_\eta\subset\{\beta_\xi:\xi\leq\eta\}$ となる．したがって，どの η についても D と A_η はほとんど交わりがない．□

一般連続体仮説 GCH が正しいと仮定しない限り，定理 1.2 はいろいろな疑問を投げかけてきます．第一に，κ の 2^κ 個の部分集合の，ほとんど交わりがない族は存在するでしょうか．$\kappa=\omega$ の場合，答えはイエスです．$\kappa=\omega_1$ の場合も，連続体仮説 CH を仮定すれば，(2^{ω_1} の大きさには関係なく) 答えはやはりイエスです．より一般には，次のことが成立します．

定理 1.3. $\kappa\geq\omega$ かつ $2^{<\kappa}=\kappa$ だったとする．このとき，$\mathcal{P}(\kappa)$ に含まれるほとんど交わりがない集合族 $\mathcal{A}$ で $|\mathcal{A}|=2^\kappa$ をみたすものが存在する．

【証明】 $I=\{x\subset\kappa:\sup(x)<\kappa\}$ としよう．$2^{<\kappa}=\kappa$ であるから $|I|=\kappa$ となる．κ の部分集合 X に対して $A_X=\{X\cap\alpha:\alpha<\kappa\}$ とおけば，$|X|=\kappa$ のとき $|A_X|=\kappa$ となる．もしも $X\neq Y$ であれば $|A_X\cap A_Y|<\kappa$ であることが次のようにしてわかる．すなわち，$\neg(\beta\in X\leftrightarrow\beta\in Y)$ をみたす β をとれば

$$A_X\cap A_Y\subset\{X\cap\alpha:\alpha\leq\beta\}$$

となるからである．そこで $\mathcal{A}=\{A_X:X\subset\kappa\wedge|X|=\kappa\}$ とおけば，$|\mathcal{A}|=2^\kappa$ であり，$\mathcal{A}$ は I の部分集合からなるほとんど交わりがない集合族である．あとは，I から κ の上への 1 対 1 関数 f を用いて $\{f''A:A\in\mathcal{A}\}$ を考えれば，これは κ の 2^κ 個の部分集合のほとんど交わりがない集合族となる．□

ここで，$2^{<\kappa}=\kappa$ という仮定は欠かすことができません．というのも，ω_1 の 2^{ω_1} 個の部分集合からなるほとんど交わりがない集合族が存在するかどうかは，$2^\omega=2^{\omega_1}=\omega_3$ という仮定のもとでは証明も反証もできないからです (第 VIII 章の演習問題 B5)．

$2^\kappa>\kappa^+$ のとき起こるもう一つの疑問は，濃度が κ^+ の m.a.d. 集合族はあるか，

というものです．この問いに対する答えも集合論の公理とは独立です (第 2 節と，第 VIII 章の 2.3 を見てください)．

《交わり》に関連した名前をもつもう一つの属性として，《交わりが一定であること》があります．

定義 1.4. 集合族 $\mathcal{A}$ が **Δ-システム**，あるいは**交わりが一定の集合族**であるとは，次のことである．すなわち，Δ-システムの**根**と呼ばれる集合 r が存在し，$\mathcal{A}$ の相異なる元 a と b に対してつねに $a \cap b = r$ が成立する (図 1.1 を参照)．□

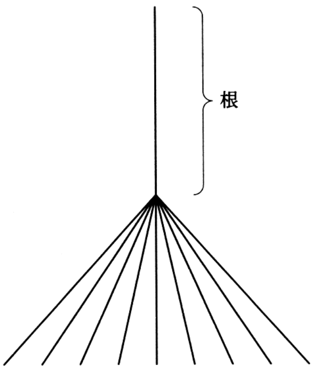


図 1.1　Δ-システム．

Δ-システムについての主要な結果が，いわゆる《Δ-システム補題》です．これについては，もっとも頻繁に引用される特別な場合を先に述べましょう．

定理 1.5. $\mathcal{A}$ を有限集合からなる不可算な集合族とする．このとき $\mathcal{A}$ は Δ-システムをなすような不可算な部分集合 $\mathcal{B}$ を含む．

この定理 1.5 は，次の定理 1.6 において $\kappa = \omega, \theta = \omega_1$ とすることによって直ちに出てくる系です．定理 1.5 には比較的易しい直接証明があります．演習問題 1 を見てください．

定理 1.6. κ を無限基数とする．θ は κ より (真に) 大きな正則基数で，条件 $\forall \alpha < \theta(|\alpha^{<\kappa}| < \theta)$ をみたすとする．条件 $|\mathcal{A}| \geq \theta$ と $\forall x \in \mathcal{A}(|x| < \kappa)$ をみたす任意の集合族 $\mathcal{A}$ に対して，それに含まれ，$|\mathcal{B}| = \theta$ であって Δ-システムをなすような部分族 $\mathcal{B}$ が存在する．

【証明】 もしも必要なら $\mathcal{A}$ をそれに含まれる小さい集合族で置き換えればよいので，一般性を損なわずに $|\mathcal{A}|=\theta$ と仮定できる．このとき $|\bigcup\mathcal{A}|\leq\theta$ となる．$\mathcal{A}$ の要素がなにかはここでの議論に無関係なので，一般性を損なわずに $\bigcup\mathcal{A}\subset\theta$ と仮定できる．このとき $\mathcal{A}$ の要素 x は θ の部分集合であり，なんらかの順序型を有する．しかもその順序型は κ 未満の順序数である．θ は正則基数であって κ より大きいから，κ より小さいある順序数 ρ については，集合族 $\{x\in\mathcal{A}:x$ の順序型は ρ である$\}$ (これを $\mathcal{A}_1$ と書くことにしよう) の濃度が θ になる．この証明の残りの部分ではそのような ρ を固定し，$\mathcal{A}$ の代わりに $\mathcal{A}_1$ を扱うことにする．

$\alpha<\theta$ のとき，仮定より $|\alpha^{<\kappa}|<\theta$ であり，このことから次のことが導かれる．すなわち，$\mathcal{A}_1$ の要素のうちで α の部分集合となるものは θ 個より少ない．したがって，$\bigcup\mathcal{A}_1$ は θ の中で上に有界ではない．

さて，$x\in\mathcal{A}_1$ かつ $\xi<\rho$ であるとき，x の下から ξ 番めの要素を $x(\xi)$ とあらわすことにしよう．θ は正則基数なので，すくなくとも一つの ξ については $\{x(\xi):x\in\mathcal{A}_1\}$ が θ の中で上に有界でないはずだ．そのような ξ のうちで最小のもの (それはゼロのこともありうる) を ξ_0 と書こう．次に，

$$\alpha_0=\sup\{x(\eta)+1:x\in\mathcal{A}_1\wedge\eta<\xi_0\}$$

とすると，$\alpha_0<\theta$ であり，また $\mathcal{A}_1$ のすべての要素 x と ξ_0 未満のすべての η に対して $x(\eta)<\alpha_0$ となる．

θ までの順序数 μ に関する超限再帰によって，$\mathcal{A}_1$ の次のような要素 x_μ を見つけよう．すなわち，$x_\mu(\xi_0)>\alpha_0$ であって，また $x_\mu(\xi_0)$ はそれ以前に選ばれたどの x_ν $(\nu<\mu)$ のどの要素よりも真に大きい．いいかえれば

$$x_\mu(\xi_0)>\max(\alpha_0,\sup\{x_\nu(\eta):\eta<\rho\wedge\nu<\mu\})$$

となるように x_μ を選ぼう．そして $\mathcal{A}_2=\{x_\mu:\mu<\theta\}$ とおこう．すると $|\mathcal{A}_2|=\theta$ であり，また，x と y が $\mathcal{A}_2$ の相異なる 2 要素であれば必ず $x\cap y\subset\alpha_0$ である．ここで，$|\alpha_0^{<\kappa}|<\theta$ より，α_0 のある部分集合 r と $\mathcal{A}_2$ のある部分族 $\mathcal{B}$ について $|\mathcal{B}|=\theta$ かつ $\forall x\in\mathcal{B}(x\cap\alpha_0=r)$ となる．このとき $\mathcal{B}$ は r を根とする Δ-システムをなす．□

定理 1.5 のトポロジーへの応用を紹介してこの節の結びとしましょう．

定義 1.7. 位相空間 X が**可算鎖条件** (短く c.c.c. と書かれる) をもつとは，次のことである．すなわち，X の不可算個の互いに交わらない開部分集合からなる集合族がないということ．□

《鎖》という言葉は，通常は全順序づけのことを指し，それを用いた c.c.c. の別表現もあります．演習問題 6 を見てください．

もしも空間 X が可算なら，X が c.c.c. であるのは単に当たり前です．X が不可算であれば，c.c.c. でない可能性が出てきます．たとえば X が離散位相をもつ場合には，単元集合の全体が不可算個の互いに交わらない開部分集合からなる集合族をなします．

これほど自明ではない c.c.c. 空間の例として，実数全体の空間 $\mathbb{R}$ があります．$\mathbb{R}$ が c.c.c. をもつのは，それが**可分**であるから，つまり，稠密(ちゅうみつ)な可算部分集合をもつからです．一般に，次のことが成立しています．

補題 1.8. 空間 X が可分であれば，X は c.c.c. をもつ．

【証明】 D が X の中で稠密な可算な部分集合だったとする．もしも U_α (ただし $\alpha<\omega_1$) が互いに交わらない空でない開集合であったとすると，共通部分 $U_\alpha \cap D$ から一点 d_α を選ぶことができるだろう．すると，d_α はすべて互いに異なるはずで，D が可算であるという前提と矛盾している．□

位相空間の属性についてしばしば問われる自然な疑問の一つに，その属性が直積に際して保存されるかどうか，というのがあります．たとえばよく知られたティコノフの定理は，どんな個数の直積に際してもコンパクト性は保たれる，というものです．二つの可分空間の直積は可分になります．というのも，D が X の中で稠密であり E が Y の中で稠密であるならば，$D\times E$ は $X\times Y$ の中で稠密だからです．しかし可分性はあらゆる個数の直積に際して保たれるわけではありません (直積因子の数が 2^ω 個以下ならよいのですが，$(2^\omega)^+$ 個だとだめです (演習問題 3 と 4))．

二つの c.c.c. 空間の直積が必ずまた c.c.c. になるという主張が正しいかという問題は，ZFC と独立です．この主張は $\mathrm{MA}+\neg\mathrm{CH}$ のもとで正しく (定理 2.24 を見てください)，CH が成立しているときは正しくありません (第 VIII 章の演習問題 8)．ススリンの仮説 (Suslin's Hypothesis) が成立していないときもだめです (補題 4.3 を見てください)．ところが，c.c.c. という属性は次のような奇妙な性質をもっています．もしも，この属性が二つの空間の直積に際していつでも保存されるなら，あらゆる個数の直積に際して保存されるのです．このことを証明するためにまず次のことに注意しましょう．任意の二つの c.c.c. 空間の直積がまた c.c.c. であるとすれば，帰納法によって，任意の n 個の c.c.c. 空間の直積がまた c.c.c. であること

がわかります (ただし $n \in \omega$ とします). そうすると, 次の定理により, あらゆる個数の直積へとただちに移行できるのです.

定理 1.9. 位相空間の族 X_i $(i \in I)$ があって, I の任意の有限部分集合 r について直積 $\prod_{i \in r} X_i$ が c.c.c. であると仮定する. このとき全体の直積 $\prod_{i \in I} X_i$ も c.c.c. である.

【証明】 (仮に結論を否定して,) ω_1 までの各順序数 α に対応して, $\prod_{i \in I} X_i$ の互いに交わらない空でない開部分集合 U_α があったとする. 必要があれば U_α をそれに含まれる基本開集合によって置き換えることができるから, もともと U_α は基本開集合であると仮定しても一般性は失われない. このとき各 U_α は座標 (添字) の有限集合 a_α (ただし $a_\alpha \subset I$) に依存する. Δ-システム補題 (定理 1.5) により, $\{a_\alpha : \alpha \in A\}$ が Δ-システムをなすような不可算集合 $A \subset \omega_1$ が存在する. この Δ-システムの根を r としよう. $a_\alpha \cap a_\beta = 0$ からは $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ が導かれてしまうから, r は空ではない. いま, U_α の $\prod_{i \in r} X_I$ への射影を $\pi(U_\alpha)$ と書こう. すると, A に属する α に対応する $\pi(U_\alpha)$ は, $\prod_{i \in r} X_i$ の不可算個の互いに交わらない空でない開部分集合となる. □

定理 1.9 のわかりやすい例として, ${}^{\kappa}2$ は任意の κ について c.c.c. です. ただし, 2 とは $\{0,1\}$ に離散位相を与えた空間のことを意味するものとします. ここで $\kappa > 2^\omega$ であれば, (演習問題 4 により) この ${}^{\kappa}2$ が可分でない c.c.c. 空間の例となります.

§2　マーティンの公理

連続体仮説 CH が成り立たないとすると, 2^ω より小さい基数をめぐって多くの疑問が沸き起こってきます. それらのうち, いくつかは純粋に組み合わせ論的なもので, たとえば次のようなものです.

(第 1 の疑問)　$\kappa < 2^\omega$ だったら $2^\kappa = 2^\omega$ となるでしょうか.

(第 2 の疑問)　$\kappa < 2^\omega$ だったら, サイズ κ のほとんど交わりがない集合族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\omega)$ は極大になりえないでしょうか.

その他に, 測度論に関係したいくつかの問題があります. たとえば次のようなものです.

(第 3 の疑問)　$\kappa < 2^\omega$ だったら, $\mathbb{R}$ の κ 個のルベーグ測度ゼロの部分集合の和

集合も，また測度ゼロになるでしょうか．

ベールの類について同じ主旨の問いを立てることもできます．

(第 4 の疑問)　$\kappa < 2^\omega$ だったら，$\mathbb{R}$ の κ 個の第一類の部分集合の和集合も，また第一類になるでしょうか．

これらの問いの答えは，$\kappa = \omega$ の場合はイエスであることが明らかですから，興味は $\omega < \kappa < 2^\omega$ の場合に限られます．ところが，そのような κ をめぐる上記の問いのどれにも，ZFC$+\neg$CH という公理系では決着をつけられないことが，強制法を用いることによって知られているのです．

これら四つの疑問への答えは，2^ω 未満のすべての基数 κ について《イエス》であろう，いいかえると 2^ω 未満の無限基数はどれも ω と同じような振る舞いを見せるだろうというのが多くの人がもつ感じのようです．第 1 の疑問に対する《イエス》と $\neg$CH とが矛盾しないことは，コーエンによる $\neg$CH の最初のモデルの構成から導けます．(第 VII 章第 5 節)．第 2 から第 4 までの疑問については,《イエス》という答えが $\neg$CH と矛盾しないことを示すことはずっと難しいのですが，ソロヴェイは，タネンバウムと共同で開発した反復強制法を用いることでこれを証明しました．その際に，マーティンはこれらすべての《イエス》という答えを一つの公理の中へ溶かし込んでしまえることに気がついたのです．この公理が，こんにちマーティンの公理 (Martin's Axiom, MA) と呼ばれているものです．こうして，MA$+\neg$CH の無矛盾性を示すために一度だけ反復強制法を適用し (これについては第 VIII 章を見てください)，あとは第 1 から第 4 までの疑問への《イエス》を MA から組み合わせ論的な方法を用いるだけで導いてくる，ということが可能になったのです．

主張している内容を理解するのに強制法の知識が必要でないことから，MA は多くの人たちによって研究され，数多くの重大な結果が MA から導かれることがわかりました．それらは，組み合わせ論と集合論的トポロジーに関するものを主として，代数学や解析学にまで及んでいます．ここにあげたもの以外の例は [Martin–Solovay 1970], [Rudin 1977], [Shoenfield 1975] で見ることができます．

ZFC の公理とは違って，MA は直観的に明白な原理には見えません．実際，一見したところ奇妙だし動機も薄弱そうです．じつは，この公理のもともとの動機づけは強制法の技術的細部を検討するところから生まれてきたものなのです．もっ

とも，本書では逆に MA の扱いをとおして強制法の動機づけを与えるのですが．

MA を，c.c.c. をもつコンパクトなハウスドルフ空間は 2^ω 個未満の至るところ非稠密な閉集合の和集合になることがない，という主張のことだと簡単に定義してしまうことも可能です．しかし残念ながら，この形の MA を実際の問題に直接に応用することはまずできません．私たちが用いる MA の公式版は半順序の用語で述べてあって少々わかりにくいのですが，こちらのほうが，一度理解してしまえば利用するのは楽です．これら二つの表現が同等であることの証明は定理 3.4 でなされています．

半順序についての記号と用語を定めることから始めます．順序づけについて考えるときには，$<$ よりも $\leq$ を基本にして考える方が便利です．

定義 2.1.

(a) **半順序**とは対 $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ のこと．ただし $\mathbb{P} \neq 0$ であり，$\leq$ は $\mathbb{P}$ 上の推移的で反射的な二項関係である (**反射的**とは $\forall p \in \mathbb{P}(p \leq p)$ ということ)．$p \leq q$ のことを《p は q を**拡大する**》と読む．$\mathbb{P}$ の要素は**条件**とも呼ばれる．

(b) 半順序 $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ が**狭義の半順序**であるとは次のことである．すなわち，それは単に半順序であるだけでなく

$$\forall p, q \in \mathbb{P} \, (p \leq q \wedge q \leq p \rightarrow p = q)$$

をもみたすということ．その場合には，$p < q$ を $p \leq q \wedge p \neq q$ を意味するものと定義する．□

前後の文脈から $\leq$ や $\mathbb{P}$ がなんであるかはっきりしている場合には，記号の使い方をゆるめて《半順序 $\mathbb{P}$》または《半順序 $\leq$》と書くこともあります．

$\mathbb{P}$ 上の半順序のつまらない一例として $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ つまり $\forall p, q(p \leq q)$ というのがあります．しかし，私たちが今後あつかう半順序はたいてい狭義の半順序です．この場合は $<$ は推移的かつ非反射的 (つまり $\forall p(p \not< p)$ ということ) であり，また $p \leq q$ が $p < q \vee p = q$ と同じことになるという点に注意しておいてください．順序の定義をゆるめて，狭義の半順序以外のものを含む一般論を述べておくのは，後々の便宜 (第 VIII 章第 5 節を見てください) を考えてのことであり，このように一般化することで私たちのこの場での手間が増えることはありません．

定義 2.2. $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ を半順序とする．部分集合 $C \subset \mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$ 内の**鎖**であるとは，$\forall p, q \in C(p \leq q \vee q \leq p)$ となることをいう．二つの条件 p と q は $\exists r \in \mathbb{P}(r \leq p \wedge r \leq q)$ とな

るときに**両立する**といい，そうでなくて $\neg\exists r\in\mathbb{P}(r\leq p\wedge r\leq q)$ となるときに**両立しない** (相容れない) という．これを記号では $p\perp q$ と書く．部分集合 $A\subset\mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$ 内の**反鎖**であるとは，$\forall p,q\in A(p\neq q\to p\perp q)$ となることをいう．□

定義 2.3. 半順序 $\langle\mathbb{P},\leq\rangle$ 内のどの反鎖も高々可算集合である場合に，$\langle\mathbb{P},\leq\rangle$ は**可算鎖条件** (短く c.c.c. と書かれる) をもつという．□

(例 1) $\mathbb{P}=\omega_1$ をふつうの順序のもとで考えましょう．この場合 $\mathbb{P}$ のどの部分集合も (全順序づけられているので) 鎖であり，反鎖の濃度は 1 以下となります．したがって，$\mathbb{P}$ は c.c.c. をもちます．

(例 2) X を空でない任意の集合として $\mathbb{P}=\mathcal{P}(X)\setminus\{0\}$ とおき，順序を $p\leq q\leftrightarrow p\subset q$ と定めると，$p\perp q$ となるのは $p\cap q=0$ となるちょうどそのときです．部分集合 $A\subset\mathbb{P}$ は，そのどの要素も互いに交わらない場合に反鎖をなします．したがって，$\mathbb{P}$ が c.c.c. をもつのは X が可算集合であるときで，またその場合に限ります．

(例 3) X を任意の位相空間として $\mathbb{P}=\{p\subset X : p$ は開集合$\wedge p\neq 0\}$ とおき，順序を $p\leq q\leftrightarrow p\subset q$ と定めましょう．例 2 と同じく $p\perp q$ は $p\cap q=0$ のことですから，$\mathbb{P}$ が c.c.c. をもつのは X が (定義 1.7 の意味で) c.c.c. をもつちょうどそのときです．

(例 4) 任意のブール代数 $\mathcal{B}$ について $\mathbb{P}=\mathcal{B}\setminus\{0\}$ とおき，順序は $\mathcal{B}$ の順序と同じものとします．この場合，$p\perp q$ は $p\wedge q=0$ のことです．

c.c.c. は鎖よりも反鎖に関わる属性ですから，本当は《可算反鎖条件 (c.a.c.)》と呼ぶべきかもしれません．実際そのように呼んでいる文献もあります．例 3 と例 4 においては，c.c.c. と《整列順序づけされた鎖》との関連が見い出されます．これについては演習問題 5 と 7 を見てください．

例 1 から 4 は，定義 2.1 から 2.3 までを説明するための例として出してきたのですが，定理 2.22 を出発点として MA について抽象的に論じる段階になると，例 3 と例 4 が重要な役割を担うようになってきます．次にもう少し MA の応用例らしい色合いをもった 5 番目の例を述べますが，その前に MA とはなにであるか，ここで言ってしまうことにします．

定義 2.4. $\langle\mathbb{P},\leq\rangle$ を半順序とする．$\mathbb{P}$ の部分集合 D が $\mathbb{P}$ の中で**稠密**であるとは $\forall p\in\mathbb{P}\exists q\leq p(q\in D)$ となることをいう．$\mathbb{P}$ の部分集合 G が $\mathbb{P}$ の**フィルター**であるとは次の条件をみたすことをいう．すなわち，

(a) $\forall p, q \in G \exists r \in G (r \leq p \wedge r \leq q)$ かつ

(b) $\forall p \in G \forall q \in \mathbb{P} (p \leq q \rightarrow q \in G)$

となることである. □

定義 2.5. 次の言明のことを $\mathrm{MA}(\kappa)$ と書く：$\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ が空でない c.c.c. をもつ半順序であって，$\mathcal{D}$ が $\mathbb{P}$ の高々 κ 個の稠密部分集合の集合族であるとすると，$\mathbb{P}$ のフィルター G で条件 $\forall D \in \mathcal{D} (G \cap D \neq 0)$ をみたすものが存在する．**マーティンの公理** (MA) とは，$\forall \kappa < 2^{\omega} (\mathrm{MA}(\kappa))$ という言明のことである. □

$\mathbb{P}$ の要素つまり条件は，G について，あるいは私たちが G から直接に構成しようと企てているなんらかのオブジェクトについて，なにかを言おうとするものだと直観的には考えることができます．p が q を拡大するときに，p は q よりも多くのことを言っている，と考えるわけです．以下の例は，こうした着想を説明するための例になっています．

(例 5) $\mathbb{P}$ を ω から 2 への有限な部分的関数の全体がなす集合とします．きちんと書けば，

$$\mathbb{P} = \{ p : p \subset \omega \times 2 \wedge |p| < \omega \wedge p \text{ は関数である} \}.$$

ということです．$p \leq q$ とは $q \subset p$ ということ，いいかえれば p が関数として q を拡張したものになっていることだとします．二つの条件 p と q が両立するのは両者が $\mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)$ 上で一致するちょうどそのときですが，その場合 $p \cup q$ は p と q の両方に共通の拡大になります．$\mathbb{P}$ は可算集合ですから，もちろん c.c.c. をもちます．次に，G が $\mathbb{P}$ のフィルターだとしましょう．G の要素はすべて互いに両立します．$f = f_G = \bigcup G$ とおきましょう．すると，f_G は $\mathrm{dom}(f_G) \subset \omega$ をみたす関数になっています．この例では，私たちの関心は G ではなく f に向くことになります．$p \in \mathbb{P}$ であれば，p は f に対する有限の近似と考えることができ，その意味で，少々大雑把に p は《$p \subset f$》を**強制する**ということができます．これは，もしも $p \in G$ なら $p \subset f_G$ である，ということです．つまり，p は $\mathrm{dom}(p)$ へ f を制限したらなんになるかを告げているのです．そこで，もしも $q \leq p$ であれば，q は f について p が言っているよりたくさんのことを言っていることになるわけです．

$\mathrm{dom}(f_G)$ が ω のごく小さな部分集合になることもありえます．たとえば空集合 0 は一つのフィルターであり，対応する関数 $\bigcup 0$, つまり 0 は空な関数です．しかし，G が多くの稠密集合と交わりをもつという要請によって，こうしたおかしな

例を避けることができ，f を非常にジェネリックなもの (よくある関数の代表例といってもいいでしょう) とすることができます．まず，ω に属する n について，$D_n=\{p\in\mathbb{P}:n\in\mathrm{dom}(p)\}$ とおきましょう．どんな p も，定義域に n を含む条件に拡大できるので，D_n は稠密です．もしも $\forall n\in\omega(G\cap D_n\neq 0)$ なら，f_G の定義域は ω 全体となります．またいかにも ω から 2 への関数らしい関数といえば，おそらく定数関数 0 ではないでしょう．いま $E=\{p\in\mathbb{P}:\exists n\in\mathrm{dom}(p)\,(p(n)=1)\}$ とおきましょう．E は稠密です．そして，もしも $G\cap E\neq 0$ なら，f_G は 1 をどこかで値としてとります．

訳注：ジェネリック (generic) とは,「これといって特徴のない」「汎用の」「一般的な」といった意味をもつ形容詞です．強制法の理論の鍵となる重要概念なのですが，残念なことにうまい訳語を思いつきません．英単語としてはごくふつうの，それこそ generic な単語なので，目を引くような珍妙な新語を作って当てるわけにもいかず，かといって,「一般的」と言ってしまっては，general という単語の訳語とぶつかってしまいます．仕方なしにカタカナにして「ジェネリック」と書くことにしました．この表現はもちろん日本語として据わりが悪いのですが，近年ではそれでも「ジェネリック医薬品」という形でカタカナ語として定着する傾向にあります．

同じようにして，いかにも ω から 2 への関数らしい関数は，前もって知られているなんらかの関数と等しいはずはないと考えられます．このことは $\mathrm{MA}(2^\omega)$ から矛盾を引き出します．というのも，$h:\omega\to 2$ のとき $E_h=\{p\in\mathbb{P}:\exists n\in\mathrm{dom}(p)\,(p(n)\neq h(n))\}$ とおけば，E_h は稠密で，もしも $G\cap E_h\neq 0$ なら $f_G\neq h$ となるはずですから．いま $\mathcal{D}=\{D_n:n\in\omega\}\cup\{E_h:h\in{}^\omega 2\}$ とすると $|\mathcal{D}|=2^\omega$ です．もしも G がフィルターで $\mathcal{D}$ に属するすべての D について $G\cap D\neq 0$ であるなら，f_G は ω から 2 への関数であって，しかも，ω から 2 へのいかなる関数とも等しくないものになります．そんなことは不可能です．

ここでこの個別の例から離れて，次のような結果に到着します．

補題 2.6.

(a) $\kappa<\kappa'$ のとき $\mathrm{MA}(\kappa')\to\mathrm{MA}(\kappa)$.

(b) $\mathrm{MA}(2^\omega)$ は成立しない．

(c) $\mathrm{MA}(\omega)$ は成立する．

【証明】 (a) は明らか．(b) はさきほど示したとおり．(c) は以下のとおり．$\mathcal{D}=\{D_n:n\in\omega\}$ とするとき，n に関する帰納法によって $\mathbb{P}$ の要素 p_n を次のように求める．p_0 は $\mathbb{P}$ の任意の要素 (空集合でないからなにか一つはある) とする．p_{n+1}

は p_n の拡大で，$p_{n+1} \in D_n$ をみたすようなものとする．これは D_n が稠密なので可能である．こうして $p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq \cdots$ が求められたら，G を $\{p_n : n \in \omega\}$ によって生成されるフィルター，つまり $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega (q \geq p_n)\}$ としよう．すると，G は $\forall n \in \omega (G \cap D_n \neq 0)$ をみたすフィルターとなる．□

補題 2.6 の (a) と (b) により，MA つまり $\forall \kappa < 2^\omega \mathrm{MA}(\kappa)$ が，このタイプの主張のうち明白な矛盾を含まない最強のものです．また補題 2.6 (c) によれば，MA は CH から導かれます．このことは，MA が 2^ω 未満の無限基数に ω と類似の属性があると言っているのだと考えれば驚くに当たりません．第 VIII 章第 6 節では，大まかに言うと，2^ω が $\omega_2, \omega_5, \omega_{\omega+1}$ あるいは最小の弱到達不能基数などおよそ任意の正則基数に一致するという主張と MA が矛盾しないということを証明しています．なお，MA は 2^ω が正則であるということを導きます．これについては系 2.19 をみてください．

補題 2.6 (c) の証明で $\mathbb{P}$ が c.c.c. である必要はなかったことから，MA(κ) からこの要請を除いてもっと強いものにしようと，人は試みるかもしれません．しかしながら，ω より大きな κ に対してこのように強化された主張は矛盾を導きます．次の例はそのことを示すものです．

(例 6) $\mathbb{P}$ を次のように定義しましょう：

$$\mathbb{P} = \{p : p \subset \omega \times \omega_1 \wedge |p| < \omega \wedge p \text{ は関数である}\}.$$

これは例 5 と似ていますが，今回の条件は，ω から ω_1 の関数について語るものになります．このとき，適度に一般的 (ジェネリック) な関数は全射となるはずですが，それは不可能です．もっときちんと書くと次の通りです．G を $\mathbb{P}$ のフィルターであるとすると，$\bigcup G$ は関数で $\mathrm{dom}(\bigcup G) \subset \omega$ かつ $\mathrm{ran}(\bigcup G) \subset \omega_1$ となります．次に $\alpha < \omega_1$ のときに $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \alpha \in \mathrm{ran}(p)\}$ と定義しましょう．すると D_α は稠密です．どんなフィルター G も，ω_1 未満のすべての順序数 α に対応した D_α の全部と交わりをもつことはできません．なぜなら，そのことは $\mathrm{ran}(\bigcup G) = \omega_1$ を意味するからです．もちろん，$\mathbb{P}$ は c.c.c. ではありません．というのも ω_1 未満の順序数 α に対応づけられた $\{\langle 0, \alpha \rangle\}$ という形の不可算個の条件が，互いに両立しないからです．

以上で MA についての初歩的な議論はおしまいです．次は，MA の応用例について，特に，最初に述べた四つの疑問にいかにして答えるのかという話に進みましょう．第 1, 第 2, 第 4 の疑問には，同じ一つの半順序を用いて答えることができ

ます．ただし，これからそのために定義する半順序は，一見したところ，第 2 の疑問にだけ関係しているとしか思えないようなものです．

定義 2.7. $\mathcal{A}$ を $\mathcal{P}(\omega)$ の一つの部分集合とする．**ほとんど交わりがない集合を付け加える半順序** $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ とは，集合としては

$$\mathbb{P}_{\mathcal{A}} = \{\langle s,F\rangle : s\subset\omega\wedge|s|<\omega\wedge F\subset\mathcal{A}\wedge|F|<\omega\}$$

であり，これに次のように順序を定めたものである．すなわち $\langle s,F\rangle\leq\langle s',F'\rangle$ となるのは

$$s\subset s'\wedge F\subset F'\wedge\forall x\in F(x\cap s'\subset s)$$

となるときとする．□

直観的にいうと，この半順序 $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ は，条件 $\langle s,F\rangle$ が $\mathcal{A}$ のどの要素ともほとんど交わりがない ω の部分集合 d についての記述になるように意図されています．$\langle s,F\rangle$ は $s\subset d$ かつ $\forall x\in F(d\cap x\subset s)$ を《強いる》ものです．そのため，$n\in x\setminus s$ となる $x\in F$ があるときには，必ず $n\notin d$ であることをも《強いる》必要があります．このことからここでの順序 $\leq$ の定め方の説明がつけられます．$\langle s,F\rangle$ を拡大して $\langle s',F'\rangle$ を得るときには，s と F をより大きな s' と F' に拡大するわけですが，もしも数 n を d に入れないことを $\langle s,F\rangle$ がすでに《強制している》ならば，n を s' に入れることは許されないわけです．それで，私たちは $\forall n\in x\setminus s(n\notin s')$, いいかえれば $x\cap s'\subset s$ を要請するのです．

補題 2.8. $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ の条件 $\langle s_1,F_1\rangle$ と $\langle s_2,F_2\rangle$ が両立するのは

$$\forall x\in F_1(x\cap s_2\subset s_1)\wedge\forall x\in F_2(x\cap s_1\subset s_2)$$

となるとき，ちょうどそのときに限る．その際には $\langle s_1\cup s_2,F_1\cup F_2\rangle$ が両者に共通の拡大となる．□

補題 2.8 を確かめるのは，$\leq$ の定義にもとづいてチェックするだけなので簡単です．二つの条件が両立するための上記の必要十分条件は

$$\forall x\in F_1\forall n\in x\setminus s_1(n\notin s_2)\wedge\forall x\in F_2\forall n\in x\setminus s_2(n\notin s_1)$$

と書いても同じです．これは，どんな数 n も，いっぽうの条件によって d に属さないことを強いられながら，もういっぽうの条件によって d に属することを強いられることはないということです．それではこれから，条件が《強いる》ことについてのここまでの直観的な議論を精密化していきましょう．

定義 2.9. $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ のフィルター G に対して $d_G = \bigcup\{s : \exists F(\langle s, F\rangle \in G)\}$ と定める．□

補題 2.10. $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ のフィルター G と G に属する $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ の条件 $\langle s, F\rangle$ について

$$\forall x \in F\,(x \cap d_G \subset s)$$

が成立する．

【証明】$\langle s', F'\rangle \in G$ であれば $\langle s, F\rangle$ と $\langle s', F'\rangle$ が両立するから，補題 2.8 により，$x \in F$ のとき $x \cap s' \subset s$ となる．□

定義 2.11. $\mathcal{A}$ の要素 x に対し，$D_x = \{\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} : x \in F\}$ と定める．□

補題 2.12. G が $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ のフィルターで $G \cap D_x \neq 0$ となるものとすれば，$|x \cap d_G| < \omega$ である．

【証明】補題 2.10 による．□

補題 2.13. $\mathcal{A}$ の任意の要素 x について，D_x は $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ の中で稠密である．

【証明】$\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ の任意の要素 $\langle s, F\rangle$ について $\langle s, F \cup \{x\}\rangle \leq \langle s, F\rangle$ である．□

補題 2.14. $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ は c.c.c. をもつ．

【証明】ω_1 未満の順序数 ξ に対応づけられた互いに両立しない $\langle s_\xi, F_\xi\rangle$ があったとすると，補題 2.8 により s_ξ がすべて互いに異なるはずだが，それは不可能である．□

すでに MA を適用できる段階にほぼ到達しています．もしも $|\mathcal{A}| \leq \kappa$ であって MA(κ) が成立しているなら，$\mathcal{A}$ の要素 x に対応した D_x すべてと交わりをもつフィルター G が存在し，このとき d_G は $\mathcal{A}$ のどの要素ともほとんど交わりのない集合となります．ただし，それだけなら d_G は有限かもしれません．ひょっとして空集合ということもありえます．事実 $\mathcal{A}$ のある有限部分集合 F について，$\bigcup F$ が補有限 (補集合が有限という意味) になるならば，ω の無限部分集合 d が F のどの要素ともほとんど交わりがないなどということは，ありえないわけです．逆に，そのような F が存在しなければ d を無限集合にできることを，これから証明しましょう．より一般に，ω のある部分集合が $\mathcal{A}$ の有限個の要素の和集合によってほとんど覆われてしまうのでない限り，その集合と無限な交わりをもつような d を

得ることが可能です．

定理 2.15. MA(κ) が成立しているものとする．$\mathcal{A}$ と $\mathcal{C}$ を $\mathcal{P}(\omega)$ の部分集合で $|\mathcal{A}| \leq \kappa, |\mathcal{C}| \leq \kappa$ となるものとし，さらに，$\mathcal{C}$ のあらゆる要素 y と $\mathcal{A}$ のあらゆる有限部分集合 F について $|y \setminus \bigcup F| = \omega$ が成立しているとする．このとき，ω の部分集合 d で

$$\forall x \in \mathcal{A} (|x \cap d| < \omega) \text{ かつ } \forall x \in \mathcal{C} (|x \cap d| = \omega)$$

という性質をもつものが存在する．

【証明】 y を $\mathcal{C}$ の要素，n を ω の要素とするとき

$$E_n^y = \{ \langle s, F \rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} : s \cap y \not\subset n \}$$

とおこう．E_n^y は $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ の中で稠密である．なぜならば，$\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ の任意の条件 $\langle s, F \rangle$ について $|y \setminus \bigcup F| = \omega$ だから $m \in y \setminus \bigcup F$ かつ $m > n$ となるような数 m をとることができ，そのとき $\langle s \cup \{m\}, F \rangle$ は $\langle s, F \rangle$ の E_n^y に属する拡大となるから．

MA(κ) により，集合

$$\{ D_x : x \in \mathcal{A} \} \cup \{ E_n^y : y \in \mathcal{C} \wedge n \in \omega \}$$

に属するすべての稠密集合と交わりをもつような $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ のフィルター G が存在する．すでに示したとおり，$\mathcal{A}$ のすべての要素 x について $d_G \cap x$ は有限集合である．また，$y \in \mathcal{C}$ であれば，すべての数 n について $d_G \cap y \not\subset n$ であるから，$d_G \cap y$ は無限集合である．□

第 2 の疑問への答えはここからただちに得られます．

系 2.16. $\mathcal{P}(\omega)$ の部分集合 $\mathcal{A}$ は，濃度が κ の，ほとんど交わりがない集合族であるものとする．MA(κ) を仮定するとき，$\mathcal{A}$ は極大ではない．

【証明】 $\mathcal{C} = \{\omega\}$ とおく．$\mathcal{A}$ がほとんど交わりがない無限個の集合からなる族であることから，$\mathcal{A}$ の任意の有限部分集合 F について $|\omega \setminus \bigcup F| = \omega$ となる．そこで定理 2.15 を適用することにより，$\mathcal{A}$ のどの元ともほとんど交わりがない無限集合 d が得られる．□

第 1 の疑問にもここで決着をつけましょう．

補題 2.17. κ を 2^ω 未満の無限基数とする．$\mathcal{B}$ を $\mathcal{P}(\omega)$ の部分集合で，サイズ κ のほとんど交わりのない集合族をなすものとする．また，$\mathcal{A}$ を $\mathcal{B}$ の部分集合とする．

$\mathrm{MA}(\kappa)$ が成立していれば，ω の部分集合 d を

$$\forall x \in \mathcal{A}(|d \cap x| < \omega) \text{ かつ } \forall x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}(|d \cap x| = \omega)$$

をみたすようにとれる．

【証明】 $\mathcal{C} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ として定理 2.15 を適用してみよ．□

定理 2.15 から補題 2.17 までは，ソロヴェイによって得られた結果です．κ の部分集合を ω の部分集合にコード化してしまうために，ソロヴェイは補題 2.17 を用いたのでした．

定理 2.18.

$$\mathrm{MA}(\kappa) \to 2^\kappa = 2^\omega.$$

【証明】 ω の部分集合からなるサイズ κ のほとんど交わりのない集合族 $\mathcal{B}$ を考える．そのような $\mathcal{B}$ が存在することは定理 1.13 によって保証されている．$\mathcal{P}(\omega)$ から $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ への関数 Φ を $\Phi(d) = \{x \in \mathcal{B} : |d \cap x| < \omega\}$ によって定義する．補題 2.17 は，Φ が上への写像であるという主張であるから，$2^\kappa = |\mathcal{P}(\mathcal{B})| \leq |\mathcal{P}(\omega)| = 2^\omega$ となる．□

系 2.19.

$$\mathrm{MA} \to 2^\omega \text{ は正則基数である．}$$

【証明】 $\kappa < 2^\omega$ だとすると $2^\kappa = 2^\omega$ であり，ケーニヒの定理 (第 I 章の系 10.41) によって，$\mathrm{cf}(2^\omega) = \mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$ である．□

2^ω が特異基数であること，たとえば ω_{ω_1} と一致することは，ZFC とは矛盾しません．これについては第 VII 章の 5.16 を見てください．

集合 d が $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ の要素をほとんど含んでしまうようにすると，補題 2.17 をもっと強化できるんじゃないかと，読者は思うかもしれません．つまり

$$\forall x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}(|x \setminus d| < \omega)$$

とできないか，ということです．しかし，$\mathcal{A}$ か $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ のどちらかか可算である場合を除くと，この改良は矛盾を含みます (演習問題 9 と 10)．

次に，第 4 の疑問に答えます．

定理 2.20. $\mathrm{MA}(\kappa)$ が成立しているとする．κ 未満のすべての順序数 α に対して，

M_α を $\mathbb{R}$ の第 1 類の部分集合とする．このとき，和集合 $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ も第 1 類の集合である．

【証明】まず定義を再確認しておくと，$\mathbb{R}$ の部分集合 M が第 1 類であるとは，至るところ非稠密な閉集合 K_n が (各自然数 n に対応して) 与えられて $M\subset\bigcup_n K_n$ となるときにいう．ここでの M_α も，それぞれが可算個の至るところ非稠密な閉集合の和集合に含まれる．したがって，次のことが証明できれば十分である．すなわち，κ 個の至るところ非稠密な閉集合 K_α が (κ 未満の α に対応して) 与えられたときには，かならず，可算個の至るところ非稠密な閉集合 H_n (ただし $n\in\omega$) で

$$\bigcup_{\alpha<\kappa} K_\alpha \subset \bigcup_{n<\omega} H_n$$

をみたすものを見つけることができる，ということ．

訳注：また，$\mathbb{R}$ の部分集合 M が至るところ非稠密であるとは，空でないどんな開集合 U に対しても，$U\setminus M$ が空でない開集合を含むということ，いいかえれば M の閉包が内点をもたないこと．

至るところ非稠密な閉集合の補集合は稠密な開集合である．K_α と H_n を補集合でおきかえると，定理 2.20 は次のことをいえば証明できることがわかる．すなわち，$\mathbb{R}$ の稠密な開集合 U_α があったときに，ω に属する n に対応づけられた稠密な開集合 V_n で

$$\bigcap_{n<\omega} V_n \subset \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$$

となるようなものをかならず見つけることができる，ということである．

$\mathbb{R}$ の開区間のうち，空でなくて両端点が有理数であるようなもの全部を数え上げて，それらを B_i (ただし $i<\omega$) と書くことにする．これらは $\mathbb{R}$ の位相の基底をなす．つまり，任意の開集合 W について

$$W=\bigcup\{B_i : B_i\subset W\}$$

が成立する．

これから ω の部分集合 d をうまく選んで，$V_n=\bigcup\{B_i : i\in d\wedge i>n\}$ と定めたい．この d を選ぶために定理 2.15 を使おうというわけである．

自然数 j に対して $c_j=\{i\in\omega : B_i\subset B_j\}$ とおく．もしも $|d\cap c_j|=\omega$ であれば，どんな数 n に対しても，それより大きな数 i で $i\in d$ かつ $B_i\subset B_j$ となるものがあるので $V_n\cap B_j\neq 0$ である．そこで，もしもすべての自然数 j について $|d\cap c_j|=\omega$ で

あれば，$\forall n \forall j\,(V_n \cap B_j \neq 0)$ であり，したがってこの場合 V_n はすべての n について稠密な開集合となる．

κ 未満の各順序数 α に対して $a_\alpha = \{i \in \omega : B_i \not\subset U_\alpha\}$ とおこう．もしも $|d \cap a_\alpha| < \omega$ であればある数 n について $d \cap a_\alpha \subset n$ なので，$\forall i > n\,(i \in d \to B_i \subset U_\alpha)$，したがって $V_n \subset U_\alpha$ となる．そこで，もしもすべての α について $|d \cap a_\alpha| < \omega$ であれば

$$\bigcap_{n<\omega} V_n \subset \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$$

となる．

$\mathcal{C} = \{c_j : j < \omega\}$，そして $\mathcal{A} = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ とおいて，ここへ定理 2.15 を引用しよう．あとはこの定理 2.15 が適用できるかどうかチェックして，証明は完了である．すなわち，F が κ の任意の有限部分集合で，j が任意の自然数のときに例外なく $\left|c_j \setminus \bigcup_{\alpha \in F} a_\alpha\right| = \omega$ となればよい．ところが

$$c_j \setminus \bigcup_{\alpha \in F} a_\alpha = \left\{i \in \omega : B_i \subset \left(B_j \cap \bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha\right)\right\}$$

であり，これは無限集合である．というのは，$B_j \cap \bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha$ が $(B_j \neq 0$ であり $\bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha$ が稠密であることから$)$ 空でない開集合だからである．□

次に，別の半順序を用いて第 3 の疑問に答えましょう．

定理 2.21. MA(κ) が成立しているとする．κ 未満の順序数 α に対して，M_α を $\mathbb{R}$ の部分集合でルベーグ測度がゼロであるようなものとする．このとき $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ はルベーグ測度ゼロをもつ．

【証明】 ルベーグ測度を μ としよう．まず定義を確認しておくと，$\mathbb{R}$ の部分集合 M がルベーグ測度ゼロをもつとは，任意の正の数 ε に対して $\mathbb{R}$ の開集合 U で $M \subset U$ かつ $\mu(U) \leq \varepsilon$ となるものが存在するということであった．以下では一つの正の数 ε を固定して考える．$\mu(U) \leq \varepsilon$ かつ $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha \subset U$ となるような開集合 U を見つけよう．

$$\mathbb{P} = \{p \subset \mathbb{R} : p \text{ は開集合} \wedge \mu(p) < \varepsilon\}$$

とおく．$p \leq q$ とは $q \subset p$ のことだと定義する．したがって p と q が両立するのはちょうど $\mu(p \cup q) < \varepsilon$ が成り立つ場合であり，そのとき $p \cup q$ が両者に共通の拡大である．

直観的にいうと，p は (目標となる開集合 U に対して) $\langle\langle p\subset U\rangle\rangle$ を強いるものである．このことを正確に書くと次のようになる．$\mathbb{P}$ のフィルター G に対して $U_G=\bigcup G$ とおく．U_G が開集合であることは明らかである．また，$\mu(U_G)\leq\varepsilon$ であることをチェックしなければならない．そのために，まず $p,q\in G$ のとき，これらに共通の拡大 r が G に属することに注意する．このとき $r\leq p\cup q$ であるから，$p\cup q\in G$ となる．次に n に関する数学的帰納法により，$p_1,\ldots,p_n\in G$ であれば $p_1\cup\cdots\cup p_n$ が G に属し，したがってそれは $\mathbb{P}$ に属し，したがって $\mu(p_1\cup\cdots\cup p_n)<\varepsilon$ である．μ の可算加法性により，G の任意の可算部分集合 A について $\mu(\bigcup A)\leq\varepsilon$ となる．G 自身は可算でないが，ある可算部分集合 A について $\bigcup A=\bigcup G$ となることが，$\mathbb{R}$ の位相が可算な基底をもつという事実から，以下のようにして従う．$\mathcal{B}$ を，両端点が有理数であるような開区間の全体の集合とする．これは可算集合である．もしも，G に属するある p について $x\in p$ なら，$\mathcal{B}$ に属するある q について $x\in q$ かつ $q\subset p$ となる．このとき $q\geq p$ であって，G がフィルターであるから $q\in G$ となる．したがって $A=G\cap\mathcal{B}$ とおけば $\bigcup A=\bigcup G=U_G$ となり，これで $\mu(U_G)\leq\varepsilon$ が示された．

次に，$\mathbb{P}$ が c.c.c. をもつことをチェックしよう．これには測度空間としての $\mathbb{R}$ の (あるいは関数空間 $L^1(\mathbb{R})$ の) 可分性が用いられる．もっときちんと言うには次のようにする．先ほどの集合族 $\mathcal{B}$ の有限個の要素の和集合になっているような集合の全体の族を $\mathcal{C}$ としよう．V が開集合で (じつはルベーグ可測集合であればよい) δ が正の実数のとき，$\mu(C\triangle V)\leq\delta$ をみたすような $\mathcal{C}$ の要素 C が必ずある (ここで $\triangle$ は対称差を意味する)．ここで，$\{p_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ は互いに両立しない条件の族であると仮定してみよう．$\mu(p_\alpha)<\varepsilon$ であるから，ある正の数 δ について，$X=\{\alpha<\omega_1:\mu(p_\alpha)\leq\varepsilon-3\delta\}$ で定義された集合 X が不可算となる．以下この段落ではそのような δ を固定して考えよう．X に属する α の各々に対して，$\mu(C_\alpha\triangle p_\alpha)\leq\delta$ となるような $\mathcal{C}$ の要素 C_α を選んで対応させる．α と β が X の異なる 2 要素のとき $p_\alpha\perp p_\beta$ なので，$\mu(p_\alpha\cup p_\beta)\geq\varepsilon$ である．いっぽう $\mu(p_\alpha\cap p_\beta)\leq\varepsilon-3\delta$ なので $\mu(p_\alpha\triangle p_\beta)\geq 3\delta$ となる．$\mu(C_\alpha\triangle p_\alpha)\leq\delta$ かつ $\mu(C_\beta\triangle p_\beta)\leq\delta$ から $\mu(C_\alpha\triangle C_\beta)\geq\delta$ となり，したがって $C_\alpha\neq C_\beta$ である．こうして X の (不可算個の) 各要素 α に対応して選ばれた C_α が一つ一つ異なっていることが示されたが，これは ($\mathcal{C}$ が可算集合であるので) 矛盾である．

次はいよいよ稠密集合を決める番である．κ 未満の順序数 α に対して $D_\alpha=\{p:M_\alpha\subset p\}$ とおこう．D_α が稠密であることを示すために，$\mathbb{P}$ の要素 q を任意に固定

する．$\mu(q)<\varepsilon$ であるから，$\mathbb{R}$ のある開集合 V について $M_\alpha\subset V$ かつ $\mu(V)<\varepsilon-\mu(q)$ となるだろう．このとき $p=q\cup V$ とすればこれは ε 未満のルベーグ測度をもち，$\mathbb{P}$ の要素となる．それゆえこの p は D_α に属する q の拡大である．

$G\cap D_\alpha\neq 0$ であれば $M_\alpha\subset U_G$ である．MA(κ) によって，すべての D_α と交わりをもつフィルター G が存在する．そのとき U_G はルベーグ測度が ε 以下の開集合で，$\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha\subset U_G$ となる．□

ω と連続体への MA の応用についてはこれくらいにして，位相空間論への応用に移りましょう．次の定理は MA(κ) からの簡単な帰結ですが，もっとずっと難しい論証 (定理 3.4 を見てください) によると，実際には MA(κ) と同値な命題です．

定理 2.22. MA(κ) が成立しているとする．X を，c.c.c. をみたすコンパクトなハウスドルフ位相空間とする．κ 未満のすべての順序数 α について，U_α を X の稠密な開部分集合とする．このとき $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha\neq 0$ である．

【証明】 $\mathbb{P}=\{p\subset X: p \text{ は開集合} \wedge p\neq 0\}$ とおき $p\leq q\leftrightarrow p\subset q$ と定めよう (例 3 を参照)．すると $p\perp q\leftrightarrow p\cap q\neq 0$ である．X が c.c.c. をみたすので，$\mathbb{P}$ も c.c.c. をみたす．もしも G が $\mathbb{P}$ のフィルターなら，G は有限交叉性をもつので X のコンパクト性から $\bigcap\{\overline{p}: p\in G\}\neq 0$ である．各順序数 α に対し $D_\alpha=\{p\in\mathbb{P}: \overline{p}\subset U_\alpha\}$ としよう．U_α は空間 X の中で稠密であり，X は正則位相空間であるから，D_α は $\mathbb{P}$ の中で稠密である．もしも，フィルター G をすべての α について $G\cap D_\alpha\neq 0$ となるようにとったとすれば，$\bigcap\{\overline{p}: p\in G\}$ は $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$ に含まれる空でない集合になる．□

$\kappa=\omega$ だったら，定理 2.22 はベールのカテゴリー定理そのものですから，X が c.c.c. をみたす必要はありません．これは，MA(ω) を ZFC で証明する (補題 2.6) ときに $\mathbb{P}$ が c.c.c. である必要がなかったのと同様です．しかし c.c.c. の仮定をはずすと，$\kappa=\omega_1$ のときにも，たちまち定理 2.22 は偽となります．反例は $X=(\omega_1+1)^\omega$ とすることによって得ることができます (演習問題 11)．

定理 2.22 と定理 2.20 をよく見比べてみましょう．定理 2.22 の U_α を $X\setminus U_\alpha$ に置き換えて考えると，X は κ 個の至るところ非稠密な閉集合の和集合になりえないことがわかります．定理 2.20 の場合は，このような和集合がベールの第一類集合になると結論されたのですが，いまの場合はそこまでは言えません．反例は $X=[0,1]^{\omega_1}$ とすることによって得ることができます (演習問題 12)．この空間は，

定理 1.9 により c.c.c. をみたします．

定理 2.22 からすぐに (見たところ) もっと強い次の命題が導かれます．すなわち，X が c.c.c. をみたす局所コンパクトなハウスドルフ空間なら，X の κ 個の稠密な開部分集合の共通部分は X の中で稠密になります．

次に，$\mathrm{MA}(\omega_1)$ のもとで，どんな c.c.c. 位相空間のどんな直積も，また c.c.c. をみたすことを示しましょう (この問題を巡る議論が §1 にあるので見てください)．

補題 2.23. $\mathrm{MA}(\omega_1)$ が成立しているとする．X を c.c.c. をみたす位相空間とし，$\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ を X の空でない開部分集合からなる集合族とする．このとき，ω_1 の不可算なある部分集合 A について $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ は有限交叉性をもつ．

【証明】 $V_\alpha = \bigcup_{\gamma > \alpha} U_\gamma$ とおくと，$\alpha < \beta$ のとき $V_\beta \subset V_\alpha$ となる．まず最初に，

$$\forall \beta > \alpha \, (\overline{V_\beta} = \overline{V_\alpha}) \tag{$*$}$$

をみたす順序数 α が存在することをチェックしよう．仮にそのような α がなかったとすると，順序数の増大列 α_ξ ($\xi < \omega_1$) をうまく見つけて，すべての ξ について $\overline{V_{\alpha_{\xi+1}}} \neq \overline{V_{\alpha_\xi}}$ となるようにできる．このとき $V_{\alpha_\xi} \setminus \overline{V_{\alpha_{\xi+1}}} \neq 0$ であり，これらの集合は開であって互いに交わらないので，X が c.c.c. をみたすという事実と矛盾する．

次に $(*)$ をみたす α を固定して，$\mathbb{P} = \{p \subset V_\alpha : p$ は開集合 $\wedge \, p \neq 0\}$ とおく．X が c.c.c. をみたすので $\mathbb{P}$ も c.c.c. をみたす．もしも G が $\mathbb{P}$ のフィルターであるなら，G は有限交叉性をもつので

$$A = \{\gamma < \omega_1 : \exists p \in G \, (p \subset U_\gamma)\}$$

とおけば，$\{U_\gamma : \gamma \in A\}$ が有限交叉性をもつことになる．G が十分に一般的すなわちジェネリックであれば，A が ω_1 の中で非有界，したがって不可算となる．もっときちんというと次のようになる．各順序数 β に対して，

$$D_\beta = \{p \in \mathbb{P} : \exists \gamma > \beta \, (p \subset U_\gamma)\}$$

とおこう．D_γ が ($\mathbb{P}$ の中で) 稠密であることは次のようにしてわかる．$(*)$ より $\overline{V_\alpha} \subset \overline{V_\beta}$ なので，$p \in \mathbb{P}$ であれば $p \cap V_\beta \neq 0$ であり，したがって β より大きなある γ について $p \cap U_\gamma \neq 0$ である．このとき $p \cap U_\gamma$ は D_β に属する p の拡大ということになる．さて，$G \cap D_\beta \neq 0$ であれば，A は β より大きなある γ を含むことになる．そこで，すべての β について $G \cap D_\beta \neq 0$ であるなら，A は ω_1 の中で非有界である．□

定理 2.24. $\mathrm{MA}(\omega_1)$ が成立しているとすると，c.c.c. をみたす位相空間どうしの任意の個数の直積がまた c.c.c. をみたす．

【証明】 c.c.c. をみたす二つの位相空間の直積がふたたび c.c.c. をみたすことを示せば十分である．というのも，このことからただちに，有限個の直積についてこの定理が導かれ，定理 1.9 により任意個数の直積についても導かれるからである．

X と Y は c.c.c. をみたすが $X\times Y$ はみたさなかったと仮定しよう．$\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ を $X\times Y$ の空でなく互いに交わらない開部分集合からなる集合族だとする．各 α に対し W_α に含まれる空でない開矩形 $U_\alpha\times V_\alpha$ を選ぼう．補題 2.23 により，ω_1 の不可算部分集合 A であって $\{U_\alpha : \alpha\in A\}$ が有限交叉性をもつようなものがある．$\alpha, \beta\in A$ かつ $\alpha\neq\beta$ のとき $U_\alpha\cap U_\beta\neq 0$ で $U_\alpha\times V_\alpha\cap U_\beta\times V_\beta=0$ なので，$V_\alpha\cap V_\beta=0$ である．この $\{V_\alpha : \alpha\in A\}$ のふるまいは Y が c.c.c. をみたすことと矛盾する．□

§3　MA と同値な命題

MA と同値なものとして最初に紹介する補題 3.1 は，第 VII 章第 6 節で MA＋¬CH の無矛盾性を示す際に重要な意味をもってきます．というのも，この命題は，サイズが 2^ω 未満であるような半順序だけを考慮すればよいことを示しているからです．もう一つの同値な命題は，理論面で興味深いものであるとともに，強制法とブール値モデルとの関連 (第 VII 章第 7 節を見てください) を理解するうえで重要なものでもあります．

補題 3.1. $\mathrm{MA}(\kappa)$ を濃度が κ 以下であるような半順序に制限したものは，もとの $\mathrm{MA}(\kappa)$ と同値である．

【証明】 この制限のついた $\mathrm{MA}(\kappa)$ を仮定しよう．$\langle\mathbb{Q},<\rangle$ を，c.c.c. をみたす任意の濃度の半順序とし，$\mathcal{D}$ を，$\mathbb{Q}$ の中で稠密な高々κ 個の集合からなる集合族とする．制限つきの $\mathrm{MA}(\kappa)$ を $|\mathbb{P}|\leq\kappa$ であるような $\mathbb{Q}$ のある部分半順序 $\mathbb{P}$ に対して適用することで，$\mathcal{D}$ の全要素と交わりをもつ $\mathbb{Q}$ のフィルター H を見つけることにする．

まず，次のような部分集合 $\mathbb{P}$ が見つけられることを示そう．

(1) $|\mathbb{P}|\leq\kappa$.

(2) $\mathcal{D}$ のすべての要素 D について，$D\cap\mathbb{P}$ は $\mathbb{P}$ の中で稠密である．

(3) $p, q\in\mathbb{P}$ であって p と q が $\mathbb{Q}$ の中で両立するなら，両者は $\mathbb{P}$ の中でも両立

する．

モデル理論家なら，このことは $\langle\mathbb{Q};<,D\rangle_{D\in\mathcal{D}}$ に下向きのレーヴェンハイムとスコーレムとタルスキの定理を当てはめればすぐにわかると気づくだろうけれども，ここでは直接の証明を与えることにする．$\mathcal{D}$ に属する各 D に対して $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{Q}$ への写像 f_D を

$$\forall p\in\mathbb{Q}(f_D(p)\in D\wedge f_D(p)\leq p)$$

となるように，また，$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ から $\mathbb{Q}$ への写像 g を

$$\forall p,q\in\mathbb{Q}(p \text{ と } q \text{ が両立する}\rightarrow g(p,q)\leq p\wedge g(p,q)\leq q)$$

となるようにとる．そして $\mathbb{P}$ を，$|\mathbb{P}|\leq\kappa$ をみたし g とすべての f_D のもとで閉じているような $\mathbb{Q}$ の部分集合とする (このようなものが存在することは第 I 章の 10.23 から言える)．この $\mathbb{P}$ は，g のもとで閉じていることから (3) をみたし，f_D のもとで閉じていることから (2) をみたす．

(3) より $\mathbb{P}$ が c.c.c. をみたすことが導かれる．そこで，制限付きの MA(κ) を $\mathbb{P}$ に適用して，G を

$$\forall D\in\mathcal{D}(G\cap D\cap\mathbb{P}\neq 0)$$

となるような $\mathbb{P}$ のフィルターとする．そして H を G によって生成される $\mathbb{Q}$ のフィルター，すなわち

$$H=\{q\in\mathbb{Q}:\exists p\in G(p\leq q)\}$$

とすれば，H はすべての D と交わる $\mathbb{Q}$ のフィルターとなる．□

実際に MA(κ) を応用する場面では,《自然な》半順序の多くが κ より大きなサイズをもつものだということを，ここで注意しておきましょう (定理 2.21, 定理 2.22, 補題 2.23 を見てください).

次に，定理 2.22 の結論部分の命題が MA(κ) を導くことの証明に移りましょう．このことは直接証明することもできます．その証明は，ブール代数に関するストーンの表現定理と非常に似通っていて，ただそれよりも込み入っただけのものになることでしょう．そのような証明は，MA とブール代数の間の結びつき (そしてのちほど話題にする強制法とブール代数の結びつき) というたいへん重要な観点を見えにくくするだけなので，ここではブール代数を用いた証明を与えることにします．ただし，そのために読者にはブール代数の理論の初歩を知っておいてもらう必要が出てきます ([Halmos 1963] を見てください).

訳注：日本語で読めるブール代数への入門書としては，(コンピュータ科学に関するものを別にすれば) [Kopperberg 1986] や [田中俊一 2000] があります．

ブール代数の基本的な記号を復習しておきましょう．$\mathcal{B}$ をブール代数とするとき，$\mathcal{B}$ の順序をあらわすにはいつも $<$ を用います．$a, b \in \mathcal{B}$ のとき，$a \vee b$ が a と b の最小上界，$a \wedge b$ が最大下界です．a' は a の補元，$\mathbb{1}$ が $\mathcal{B}$ の最大要素，$\mathbb{0}$ が最小要素です．

$\mathcal{B}$ が**完備**であると言われるのは，$\mathcal{B}$ のすべての部分集合 S が上限 $\bigvee S$ と下限 $\bigwedge S$ をもつときです．

MA を応用するときに関わってくるのは，実際には $\mathcal{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ です (§2 の例 4 を見てください)．しかし，用語を拡大解釈して，$\mathcal{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ の部分集合 A が

$$\forall a, b \in A \, (a \neq b \to a \wedge b = \mathbb{0})$$

をみたすときに，これを $\mathcal{B}$ の反鎖と言うことにします (実際に A は $\mathcal{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ の反鎖です)．ブール代数 $\mathcal{B}$ のすべての反鎖が可算であるときに，$\mathcal{B}$ は c.c.c. をもつといいます．$\mathcal{B}$ のフィルターとは，定義 2.4 の意味でフィルターになっているような $\mathcal{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ の部分集合 G のことを言いますが，容易にわかるとおり，通常の意味でのブール代数のフィルターと同じになります．《完備ブール代数に制限された MA》とは，c.c.c. をもつなんらかの完備ブール代数 $\mathcal{B}$ について $\mathcal{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ の形で得られるような半順序に制限された MA という意味です．ここで注意をしておくと，ここまでに扱った半順序にはブール代数から得られたものは一つもありませんでした．それでも次のことが成立します．

定理 3.2. 任意の無限基数 κ に対して，MA(κ) は完備ブール代数に制限された MA(κ) と同値である．

これを証明するために，まず与えられた半順序に完備ブール代数を結び付ける一般的な手続きを述べることにしましょう．

補題 3.3. $\mathbb{P}$ を半順序とする．そのとき，以下のことをみたす完備ブール代数 $\mathcal{B}$ と $\mathbb{P}$ から $\mathcal{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ への写像 i が存在する．すなわち

(1) $i''\mathbb{P}$ は $\mathcal{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ の中で稠密である．

(2) $\forall p, q \in \mathbb{P} \, (p \leq q \to i(p) \leq i(q))$.

(3) $\forall p, q \in \mathbb{P} \, (p \perp q \leftrightarrow i(p) \wedge i(q) = \mathbb{0})$.

実際上重要な多くの場面において，i は 1 対 1 写像になっていて，しかも $\forall p, q \in$

$\mathbb{P}(p \leq q \leftrightarrow i(p) \leq i(q))$ が成立するので，$\mathbb{P}$ を $\mathcal{B}$ の部分順序とみなすことができます．しかし，たとえば仮に $\mathbb{P}$ のすべての要素が互いに両立したら $\mathcal{B}$ は二値代数になり，すべての要素 p について $i(p)=\mathbb{1}$ となります．補題 3.3 のような $\mathcal{B}$ は $\mathbb{P}$ の**完備化**と呼ばれ，同型の意味で一意に定まります (演習問題 18)．$\mathcal{B}$ の要素を，$\mathbb{P}$ のいろいろな部分集合の上限を求めることによって形作られるものとみなせるので，形式的上限のなすブール代数として $\mathcal{B}$ を構成するという方法で補題 3.3 を証明することも可能です (演習問題 19)．ここで与える証明は位相空間論の方法によるものです．

少し復習しておきましょう．X を任意の位相空間とするとき，X の正則開集合代数 $\mathrm{ro}(X)$ を定義することができます．$\mathrm{ro}(X)$ の要素は，X のすべての正則開部分集合 b です (b が正則開集合であるとは，$b=\mathrm{int}\,\mathrm{cl}(b)$ となること)．$b \leq c$ とは $b \subset c$ のことです．$\mathrm{ro}(X)$ のブール代数としての演算は次のとおりです：$b \wedge c = b \cap c$, $b \vee c = \mathrm{int}\,\mathrm{cl}(b \cup c)$, $b' = \mathrm{int}(X \setminus b)$．このとき $\mathrm{ro}(X)$ は完備であり，任意の部分集合 S に対して $\bigvee S = \mathrm{int}\,\mathrm{cl}(\bigcup S)$, $\bigwedge S = \mathrm{int}(\bigwedge S)$ となります．

訳注：ここで用いられている演算記号 int と cl は，それぞれ内部と閉包という意味です．

【補題 3.3 の証明】 $\mathbb{P}$ 上の位相を次のように定義しよう．$p \in \mathbb{P}$ のとき $N_p = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$ とする．$\{N_p : p \in \mathbb{P}\}$ を開集合の基底とするような位相を $\mathbb{P}$ に与えよう．N_p の全体が基底をなすのは，$q \in N_p \rightarrow N_q \subset N_p$ となることによる．この位相は通常はハウスドルフではないし，T_1 でさえない．各 p について，N_p は p を含む開集合のうちで最小のものである．

$\mathcal{B} = \mathrm{ro}(\mathbb{P})$ とおき $i(p) = \mathrm{int}\,\mathrm{cl}(N_p)$ としよう．まず (1) をチェックするために b を空でない任意の正則開集合とする．b の要素 p をとる．すると $N_p \subset b$ なので，$i(p) = \mathrm{int}\,\mathrm{cl}(N_p) \subset \mathrm{int}\,\mathrm{cl}(b) = b$ となる．(2) は明らか．(3) を示すためにまず p と q が両立する場合を考え，$r \leq p$ かつ $r \leq q$ をみたす要素 r をとる．このとき (2) により $i(r) \leq i(p)$ かつ $i(r) \leq i(q)$ だから $i(p) \wedge i(q) \neq 0$ である．逆に $p \perp q$ の場合を考える．このとき $N_p \cap N_q = 0$ である．N_q は開集合なので $\mathrm{cl}(N_p) \cap N_q = 0$, したがって $i(p) \cap N_q = \mathrm{int}\,\mathrm{cl}(N_p) \cap N_q = 0$ となる．また $i(p)$ も開集合なので，q について同様に議論すると $i(p) \wedge i(q) = i(p) \cap i(q) = 0$ が導かれる．□

【定理 3.2 の証明】 完備ブール代数に制限された $\mathrm{MA}(\kappa)$ が成立しているものとする．$\mathbb{P}$ を c.c.c. をみたす任意の半順序とし，$\mathcal{D}$ を κ 個以下の $\mathbb{P}$ の稠密部分集合か

らなる集合族とする．$\mathcal{B}$ と i を，補題 3.3 のとおりのものとする．このとき $\mathcal{B}$ は c.c.c. をみたす．なぜなら，仮に $\{b_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ が $\mathcal{B}$ の反鎖だったとして，(1) により $i(p_\alpha) \leq b_\alpha$ となるような p_α を見つければ，(2) によって $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ が $\mathbb{P}$ の反鎖となってしまうから．また，$D \in \mathcal{D}$ であれば，$i''D$ は $\mathcal{B}$ の中で稠密である．というのも，$b \in \mathcal{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ であれば，$i(p) \leq b$ となるような p があり $q \leq p$ かつ $q \in D$ となる q があって，$i(q) \leq b$ かつ $i(q) \in i''D$ となるから．さて，制限つきの MA によって $\mathcal{B}$ のフィルター G であって，$\mathcal{D}$ に属するすべての D について $G \cap i''D \neq 0$ となるようなものがある．$H = i^{-1}(G)$ とおこう．すると，すべての D について $H \cap D \neq 0$ である．

だが困ったことに，H がフィルターになり損なう場合が考えられる．フィルターの条件のうち

$$\forall p \in H \forall q \in \mathbb{P} \, (q \geq p \rightarrow q \in H) \tag{b}$$

を H がみたすことは，(2) により明らかだ．問題は

$$\forall p, q \in H \exists r \in H \, (r \leq p \wedge r \leq q) \tag{a}$$

という条件だ．$p, q \in H$ であれば (3) によって p と q は両立するけれども，共通の拡大を H の中にもたないかもしれない．ここを手直しするために，

$$D_{pq} = \{r \in \mathbb{P} : (r \leq p \wedge r \leq q) \vee r \perp p \vee r \perp q\}$$

とおく．$\mathbb{P}$ の任意の要素 p と q について D_{pq} は稠密である．これをみるために $\mathbb{P}$ の任意の要素 r_0 をとる．r_0 が，p か q のどちらかと両立しないような拡大をもつなら，その拡大が D_{pq} に属する．そうでない場合は，まず r_0 自身が p と両立するので，$r_1 \leq r_0$ かつ $r_1 \leq p$ をみたす r_1 がとれ，この r_1 は q と両立するので $r_2 \leq r_1$ かつ $r_2 \leq q$ をみたす r_2 がとれる．この r_2 は D_{pq} に属する r_0 の拡大である．

ここで，もしも $|\mathbb{P}| \leq \kappa$ ならば，D_{pq} が全部 $\mathcal{D}$ に属すると仮定してかまわない．なぜなら $\{D_{pq} : p, q \in \mathbb{P}\}$ を $\mathcal{D}$ に付け加えても $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ という事実に変わりがないから．そうなっているとして，H の要素 p と q に対して $H \cap D_{pq}$ に属する r をとろう．H の要素は互いに両立するから，$r \perp p$ でも $r \perp q$ でもありえない．そこで $r \leq p$ かつ $r \leq q$ となる．こうして条件 (a) がみたされ，H がフィルターとなる．

これで，完備ブール代数に制限された MA(κ) が，濃度 κ 以下の半順序に制限された MA(κ) を導くことが示された．補題 3.1 により，これから MA(κ) が導かれる．□

最後に，MA が純粋に位相空間論的な命題と同値であることを示します．ここまでの結果は次のようにまとめられます．

定理 3.4. 任意の無限基数 κ について，次の命題は互いに同値である．

(a) MA(κ).

(b) 濃度が高々 κ である半順序に制限された MA(κ).

(c) 完備ブール代数に制限された MA(κ).

(d) X がコンパクトで c.c.c. をみたすハウスドルフ位相空間であり，κ 未満のすべての順序数 α に対して U_α が X の稠密な開部分集合であるとき，$\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$ は空ではない．

【証明】補題 3.1 と定理 3.2 によって (a) と (b) と (c) は同値であり，定理 2.22 により (a)→(d) も成立する．ここでは (d)→(c) を示せばよい．$\mathcal{B}$ を c.c.c. をみたすブール代数，$\mathcal{D}$ を $\mathcal{B}\setminus\{\mathbb{0}\}$ の κ 個以下の稠密部分集合からなる集合族とする．(d) が成立しているという仮定のもとで，$\mathcal{D}$ のすべての要素と交わるような $\mathcal{B}$ のフィルター G を作り出そう．ここでは，$\mathcal{B}$ が完備である必要はない．

X を $\mathcal{B}$ のストーン空間としよう．つまり，X は $\mathcal{B}$ のすべての超フィルターを要素とする集合であり，b を $\mathcal{B}$ の任意の一つの要素とするとき，X の位相の基底に属する開集合の一つが

$$N_b=\{G\in X : b\in G\}$$

で与えられる (つまり，X にはこの形の集合の全体を基底とする位相を入れておく)．このとき，X はコンパクトなハウスドルフ空間である．また，$N_b\cap N_c=0$ と $b\wedge c=\mathbb{0}$ が同値であることから，X は c.c.c. をみたす．

$\mathcal{D}$ に属する D に対して

$$W_D=\bigcup\{N_b : b\in D\}$$

とおく．この W_D は明らかに開集合である．また，W_D は (位相空間 X の部分集合として) 稠密である．というのも，もしも N_c が W_D と交わらないとしたら，D に属するすべての b について $c\wedge b=\mathbb{0}$ のはずだが，D が (順序の意味で) 稠密で c の拡大を含む以上，そんなことはありえないからである．(d) により $\bigcap\{W_D : D\in\mathcal{D}\}$ に属する G がとれる．この G はフィルターであり (じつは超フィルターである)，$\mathcal{D}$ に属するすべての D について $G\in W_D$，したがって $\exists b\in D(G\in N_b)$，つまり $\exists b\in D(b\in G)$，すなわち $G\cap D\neq 0$ となっている．□

§4　ススリンの問題

位相空間の可分性と c.c.c. の間の関係について第 1 節で論じました．特に，可分な位相空間は c.c.c. をみたすけれども，逆に c.c.c. をみたす位相空間がいつも可分とは限らないと指摘しておきました．ところが，順序位相空間についてこの二つの属性が同値であるかないかという問題は，ZFC と独立です．

定義 4.1. **ススリン線**とは，全順序 $\langle X, < \rangle$ であって，X は順序位相に関して c.c.c. はみたすけれども可分ではない，という性質をもつもののことである．**ススリンの仮説** (SH) とは，《ススリン線は存在しない》という命題のことである．□

SH は，実数直線 $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ の順序型を特徴づけようという試みの中から自然にあらわれました．次の三つの条件

(a) X には最初の要素も最後の要素もない．

(b) 順序位相の意味で X は連結である．

(c) 順序位相の意味で X は可分である．

をみたす全順序 $\langle X, < \rangle$ が $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ と同型であること (演習問題 29) はよく知られていたので，[Suslin 1920] においてススリンはこの (c) をそれより弱い

(c′) 順序位相の意味で X は c.c.c. をみたす．

に置き換えられるのではないか，と問うたのです．SH のもとで，(c) と (c′) が同値であることは明らかです．それに，ススリン線が存在すれば (a) と (b) をみたすススリン線も存在します．それゆえ SH は，(a) と (b) と (c′) が $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ の順序を特徴づけるという主張と同値になっています．

SH は ZFC と独立であることが知られています．このあとすぐに示すとおり，MA＋¬CH から SH が導かれるので，SH は集合論と矛盾しません (第 VIII 章第 6 節)．イェンセンによって，SH が GCH と両立することも示されています ([Devlin–Johnsbråten 1974])．ところが，¬SH は (第 7 節で扱う) $\diamondsuit$ から導かれ，この $\diamondsuit$ も ZFC＋GCH と共存できるのです (第 VI 章)．

定理 4.2. $\mathrm{MA}(\omega_1) \to \mathrm{SH}$.

【証明】 定理 2.24 で示したとおり，$\mathrm{MA}(\omega_1)$ から c.c.c. をみたす二つの位相空間の直積もまた c.c.c. をみたすことが導かれるので，この定理は次の補題からただちに従う．□

補題 4.3. X がススリン線であれば，X^2 は c.c.c. をみたさない．

【証明】 $a,b\in X$ かつ $a<b$ のときに，開区間 $\{x\in X : a<x<b\}$ を (a,b) と表記する．a と b が隣り合っている場合には (a,b) は空である．

ω_1 未満の順序数 α に対応する次のような X の要素 $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$ を帰納法を用いて見つける．

(1) $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$.

(2) (a_α, b_α) も (b_α, c_α) も空ではない．

(3) $(a_\alpha, c_\alpha)\cap\{b_\xi : \xi<\alpha\}=0$.

このことができたものとして，$U_\alpha=(a_\alpha,b_\alpha)\times(b_\alpha,c_\alpha)$ とおく．(2) により $U_\alpha\neq 0$ である．$\xi<\alpha$ のとき $U_\xi\cap U_\alpha=0$ となることが次のようにしてわかる．すなわち，(3) により，$b_\xi\leq a_\alpha$ で $(a_\xi,b_\xi)\cap(a_\alpha,b_\alpha)=0$ となるか，そうでなければ $b_\xi\geq c_\alpha$ で $(b_\xi,c_\xi)\cap(b_\alpha,c_\alpha)=0$ となるからである．こうして $\{U_\alpha : \alpha<\omega_1\}$ が X^2 が c.c.c. であることの反証を与える．

a_α, b_α, c_α を見つけるために，まず X の孤立点の全体を W としよう．各々の孤立点は開集合をなし X は c.c.c. をみたすので，$|W|\leq\omega$ である．α より小さい ξ に対して a_ξ, b_ξ, c_ξ がすでに選ばれたものとしよう．X は可分でないので $X\setminus \mathrm{cl}(W\cup\{b_\xi : \xi<\alpha\})$ は空でない開集合であって，空でない開区間 (a_α,c_α) を含む．この開区間は孤立点を含まないので無限集合であり，それゆえ $(a_\alpha,b_\alpha)\neq 0$ かつ $(b_\alpha,c_\alpha)\neq 0$ をみたす要素 b_α を選ぶことができる．□

ここでのススリン線の定義は，非常に質(たち)の悪い線をも許容しています．たとえば X は隙間や孤立点を含むかもしれません．このような線を操作してもっと質のよいものにする方法を示します．

定理 4.4. ススリン線が一つでも存在すれば，次の二つの条件をみたすススリン線 X もまた存在する．

(1) X は自己稠密である (つまり $a<b$ なら開区間 (a,b) は空ではない).

(2) X の空でない開部分集合はどれも可分ではない．

【証明】 Y をなんらかのススリン線とする．Y 上の同値関係 $\sim$ を次のように定めよう．x と y の間の区間 ($x<y$ なら (x,y) のこと，$x>y$ なら (y,x) のこと) が可分であるときに $x\sim y$ と定める．X を $\sim$-同値類全体の集合とする．X の要素 I は

凸である．つまり，$x, y \in I \wedge x < y$ ならば $(x,y) \subset I$ である．X の要素 I と J について，I のある要素 (どれをとっても同じ) が J のある要素 (どれをとっても同じ) より小さいときに $I < J$ とみなして，X を全順序づけよう．

X の要素 I は可分である．これを見るために，I に属する x と y についての開区間 (x,y) の形で得られる互いに交わらない集合からなる極大な集合族 $\mathcal{M}$ を考える．Y が c.c.c. をみたすことから $\mathcal{M}$ は可算である．そこで $\mathcal{M} = \{(x_n, y_n) : n < \omega\}$ としよう．$x_n \sim y_n$ なので，(x_n, y_n) の可算な稠密部分集合 D_n をとることができる．$D = \bigcup_n D_n$ とおく．すると D は $\bigcup_n (x_n, y_n)$ の中で稠密である．$z \in I$ かつ $z \in (x,y) \subset I$ であったとすると，$\mathcal{M}$ の極大性から (x,y) はいずれかの (x_n, y_n) と交わる．このことから，z が I の最初の要素か最後の要素でない限り $z \in \overline{D}$ であることが導かれる．そこで I の最初の要素や最後の要素があればそれを D に加えることによって，I の可算な稠密部分集合を作ることができる．

X が自己稠密であることを示すために，仮に $I < J$ かつ $(I, J) = 0$ だったとしよう．I から要素 x, J から要素 y をとる．$(x,y) \subset I \cup J$ なのでこの開区間も可分で $x \sim y$ となる．これは矛盾を生じる．

条件 (2) を確かめるためには，$I < J$ のとき開区間 (I, J) が可分ではないことを示せばよい．仮に可分であったとしよう．$\{K_n : 2 \leq n < \omega\}$ が (I, J) の中で稠密だとする．また，$K_0 = I$, $K_1 = J$ とする．Y において D_n を K_n の可算な稠密部分集合とすると $\bigcup_n D_n$ は $\bigcup \{L : I \leq L \leq J\}$ の稠密な部分集合となり，I の点と J の点が同値となって矛盾にいたる．

最後に X が c.c.c. をみたすことを示すために，ω_1 より小さい順序数 α に対応して開区間 (I_α, J_α) を互いに交わりのないようにとれると仮定しよう．I_α から x_α, J_α から y_α をとると (x_α, y_α) は Y の互いに交わりのない空でない開区間になってしまう．□

この X に対してさらに操作を施せば，もっと質のよい順序集合が得られます．演習問題 30 をみてください．

§5　木

ススリンの仮説をはじめとする数々の組み合わせ論的命題は，なによりも木についての主張として知られています．

定義 5.1. **木**とは，(定義 2.1 でいう) 狭義の半順序 $\langle T, \leq \rangle$ であって，そのすべての要素 x について，集合 $\{y \in T : y < x\}$ が $<$ によって整列順序づけされているもののことである．□

よくある記号の拡大解釈として，$\langle T, \leq \rangle$ を意味するのに単に T と書きます．

定義 5.2. T を木とする．

(a) T の要素 x の**高さ** $\mathrm{ht}(x, T)$ とは $\mathrm{type}(\{y \in T : y < x\})$ のことである．

(b) 順序数 α に対して T の α 番目の**水準** $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ とは，集合 $\{x \in T : \mathrm{ht}(x, T) = \alpha\}$ のことである．

(c) 木 T の**高さ** $\mathrm{ht}(T)$ とは，$\mathrm{Lev}_\alpha(T) = 0$ となる最小の順序数 α である．

(d) T の**部分木**とは，条件

$$\forall x \in T' \forall y \in T (y < x \rightarrow y \in T')$$

をみたす T の部分集合 T' に T の順序を導入したものである．□

$\mathrm{ht}(T)$ は $\sup\{\mathrm{ht}(x, T) + 1 : x \in T\}$ とも一致します．T' が T の部分木であれば，T' の任意の要素 x について $\mathrm{ht}(x, T') = \mathrm{ht}(x, T)$ となります．

一つの簡単な木の例として，T を任意の集合とし，$<$ を空な順序としましょう．このとき任意の要素 x について $\mathrm{ht}(x, T) = 0$ なので $\mathrm{ht}(T) = 1$ となります．もう一つのつまらない例として，任意の順序数 δ の通常の順序があります．このとき $\mathrm{ht}(\alpha, \delta) = \alpha$ で，$\mathrm{ht}(\delta) = \delta$ となります．

もう少し意味のある木の例は，${}^{<\delta}I$ つまり $\bigcup\{{}^{\alpha}I : \alpha < \delta\}$ で，これは**高さ δ の完全 I-進木**というものです．${}^{\alpha}I$ の要素は I の要素からなる長さ α の列とみなされます．${}^{<\delta}I$ の順序 $s \leq t$ は $s \subset t$, つまり t が s の拡張になっていることと定められます．δ 未満の各順序数 α について $\mathrm{Lev}_\alpha({}^{<\delta}I) = {}^{\alpha}I$ であり，また $\mathrm{ht}({}^{<\delta}I) = \delta$ です．特に $I = 2$ のとき，${}^{<\delta}2$ は高さ δ の**完全二進木**と呼ばれます．

MA についての議論から用語を借用してきましょう．

定義 5.3. T を木とする．T の**鎖**とは T の順序によって全順序づけされるような T の部分集合 C のことである．T の**反鎖**とは，T の部分集合 A であって

$$\forall x, y \in A (x \neq y \rightarrow (x \not\leq y \wedge y \not\leq x))$$

となるものである．□

T の逆順序 $\langle T, \geq \rangle$ を $\mathbb{P}$ とおけば，これらの用語は定義 2.2 と正確に一致します．

x と y が $\mathbb{P}$ の中で両立する (つまり $\exists z(z\geq x\wedge z\geq y)$ が成立する) のは，両者が比較できる (つまり $x\leq y\vee y\leq x$ が成立する) ときに限ることに注意しましょう．こうなる理由は，いかなる要素 z についても，それに先立つ要素の全体が全順序づけされているからです．

ススリン線に類似の性質をもつ木として，ススリン木が考えられます．

定義 5.4. κ を無限基数とする．木 T の濃度 $|T|$ が κ であり，T のどんな鎖も反鎖もすべて濃度が κ 未満であるならば，T を **κ-ススリン木**と呼ぶ．□

ススリン木を初めて導入したのはクレパでした (たとえば [Kurepa 1936])．クレパは，ω_1-ススリン木があるとき，そしてそのときに限ってススリン線もあるということ (定理 5.13) を証明したのです．ひとまず κ-ススリン木と関連した用語の一般論を続けましょう．以下では κ が正則基数である場合に話を限定することにします．κ が特異基数であれば κ-ススリン木は存在します (演習問題 33) が，これはそれほど面白いものではありません．

まず，κ-ススリン木の形のおおまかな見取り図を得ることを考えます．

定義 5.5. κ を正則基数とするとき，**κ-木**とは，高さが κ の木で $\forall\alpha<\kappa(|\mathrm{Lev}_\alpha(T)|<\kappa)$ をみたすもののことである．□

補題 5.6. 任意の正則基数 κ について，すべての κ-ススリン木は κ-木である．

【証明】 まず，$\mathrm{Lev}_\kappa(T)=0$ である．なぜなら，仮に $x\in\mathrm{Lev}_\kappa(T)$ であれば，$\{y\in T:y<x\}$ が濃度 κ の鎖になってしまうから．それゆえ $\mathrm{ht}(T)\leq\kappa$ である．$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ は反鎖をなすから $|\mathrm{Lev}_\alpha(T)|<\kappa$ である．$|T|=\kappa$ かつ $T=\bigcup\{\mathrm{Lev}_\alpha:\alpha<\kappa\}$ なので，κ の正則性より $\mathrm{ht}(T)=\kappa$ が導かれる．□

次に，ω-ススリン木が存在しないことを示します．

補題 5.7. (ケーニヒ (König) の補題)　T が ω-木であれば，T は無限鎖を含む．

【証明】 $\mathrm{Lev}_0(T)$ の要素 x_0 を一つ選ぼう．その際，$\{y\in T:x_0\leq y\}$ が無限集合になるように選ぶ．これが可能なことは，$\mathrm{Lev}_0(T)$ が有限で T は無限，そして T のどの要素も $\mathrm{Lev}_0(T)$ のどれかの要素の後にあることによる．同様の議論により帰納的に $\mathrm{Lev}_n(T)$ の要素 x_n を選び，その際すべての n について $x_{n+1}>x_n$ かつ $\{y\in T:y\geq x_n\}$ が無限であるようにしよう．このとき $\{x_n:n\in\omega\}$ は T の無限鎖である．□

補題 5.7 では反鎖についてまったく言及していないので，ω-ススリンの不存在よりもっと強い結果が確立されています．

定義 5.8. 正則基数 κ に対して **κ-アロンシャイン木**とは，どんな鎖の濃度も κ 未満であるような κ-木のことである．□

したがって，κ-ススリン木は必ず κ-アロンシャイン木です．補題 5.7 は ω-アロンシャイン木が存在しないことを言っています．ところが ω_1 については事情が異なっていて，ω_1-ススリン木の存在は ZFC と独立ですが，ω_1-アロンシャイン木は必ず存在するのです．

定理 5.9. ω_1-アロンシャイン木は存在する．

【証明】

$$T=\{s\in{}^{<\omega_1}\omega : s \text{ は 1 対 1 関数}\}$$

とおく．したがって T は ${}^{<\omega_1}\omega$ の部分木である．ω_1 より小さなすべての順序数 α について α から ω への 1 対 1 関数があるから，$\mathrm{ht}(T)=\omega_1$ である．もしも C が T の不可算な鎖なら $\bigcup C$ は ω_1 から ω への 1 対 1 関数になってしまうから，T のどんな鎖も可算である．しかし T は ω_1-アロンシャイン木ではない．というのも ω_1-木でないからで，$\omega\leq\alpha<\omega_1$ のときじつは $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ が不可算なのである．それでも，T のある部分木を定義してそれがアロンシャイン木であることを示すことにしよう．

${}^{\alpha}\omega$ の要素 s と t について，$s\sim t$ とは集合 $\{\xi<\alpha : s(\xi)\neq t(\xi)\}$ が有限であることだと定める．ω_1 未満の順序数 α に対して次のような s_α を見出せる．すなわち

(i) $s_\alpha\in{}^{\alpha}\omega$ かつ s_α は 1 対 1 関数である．

(ii) $\alpha<\beta$ のとき $s_\alpha\sim s_\beta\restriction\alpha$ である．

(iii) $\omega\setminus\mathrm{ran}(s_\alpha)$ は無限集合である．

このような s_α が見い出されたとすれば，あとは

$$T^*=\bigcup_{\alpha<\omega_1}\{t\in\mathrm{Lev}_\alpha(T) : t\sim s_\alpha\}$$

とおけばよい．(ii) より T^* は T の部分木で (i) より $s_\alpha\in T^*$ だから，$\mathrm{Lev}_\alpha(T^*)\neq 0$ である．また T と違って T^* は ω_1-木である．というのも，$\{t\in{}^{\alpha}\omega : t\sim s_\alpha\}$ が可算であるから．こうして T^* は ω_1-アロンシャイン木である．

このような s_α を選ぶには，帰納法を用いる．s_α が与えられたとして $\omega\setminus\mathrm{ran}(s_\alpha)$

の任意の要素 n をとり，$s_{\alpha+1}=s_\alpha \cup \{\langle \alpha, n\rangle\}$ とおく．ここでは (iii) が用いられる．次に γ が極限順序数で，γ 未満の α についての s_α はすでにあるものとしよう．$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots, \lim \alpha_n = \gamma$ となるような順序数の列 α_n を決めておこう．$t_0 = s_{\alpha_0}$ とし，α_n から ω への 1 対 1 関数 t_n を，$t_n \sim s_{\alpha_n}$, $t_{n+1} \upharpoonright \alpha_n = t_n$ をみたすように帰納法で定める．$t = \bigcup t_n$ としよう．すると $t \in {}^{\gamma}\omega$ であり，t は 1 対 1 関数である．ここで $s_\gamma = t$ と定めると，$\alpha=\gamma$ とおいた (i) が成立し，$\alpha<\beta=\gamma$ とおいた (ii) も成立するが，(iii) は破れるかもしれない．そこを手直しするために，$s_\gamma(\alpha_n) = t(\alpha_{2n})$ と定め $\xi \notin \{\alpha_n : n \in \omega\}$ のときだけ $s_\gamma(\xi) = t(\xi)$ としよう．こうすれば

$$\{t(\alpha_{2n+1}) : n \in \omega\} \subset \omega \setminus \mathrm{ran}(s_\gamma)$$

となるから (iii) も成立する．□

定理 5.9 の証明の方法で構成された木は，決してススリン木にはなりません (演習問題 39)．

κ が ω_1 より大きい正則基数である場合を概観しておきましょう．$\kappa=\lambda^+$ で λ は $2^{<\lambda}=\lambda$ をみたす正則基数である場合，κ-アロンシャイン木は存在します (演習問題 37)．そこで GCH のもとでは，κ-アロンシャイン木が存在しないような正則基数 κ は，到達不能基数か，あるいは特異基数の次の基数に限られます．すべての特異基数の次の基数 κ に対し κ-アロンシャイン木が存在することが GCH から導かれるかどうかは不明ですが，イェンセンによると，すべてのそのような κ について κ-アロンシャイン木が存在するという命題は GCH と矛盾せず，じつはこの命題は第 VI 章で扱うゲーデルの構成可能性の公理 ($\mathbf{V}=\mathbf{L}$) から導かれるのです (証明は [Devlin 1973] にあります)．いっぽう，κ が強到達不能な基数であれば，(GCH を仮定しなくても) κ-アロンシャイン木が存在するか，さもなければ κ が弱コンパクト基数であることになります．この属性 (弱コンパクト性) からは，κ が κ 番目の到達不能基数であることなど，いろいろな結果が導かれます (演習問題 49 および [Kunen 1977])．

GCH を仮定しないときは ω_2-アロンシャイン木が存在しないことすらありえます．そのような木の存在は $\mathrm{ZFC}+2^\omega=\omega_2$ と矛盾はしませんが，そこから証明されることもないのです ([Mitchell 1972])．

次にススリン木に目を向けましょう．イェンセンが示したことですが，もしも $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ であれば，ω_1 以上の正則基数のうち弱コンパクトであるものを除くすべての κ について κ-ススリン木が存在します ([Devlin 1973])．$\mathbf{V}=\mathbf{L}$ から GCH が導か

れます (VI4.7) が，ω_1 より大きな弱コンパクトでない正則基数 κ について，κ-ススリン木が存在しないことが GCH と矛盾するかどうかはわかっていません．特に，ω_2-ススリン木の不存在が GCH と矛盾しないかどうかもわかっていません．これが CH と矛盾しないことはわかっています ([Laver–Shelah 1981]) が，CH からは ω_2-アロンシャイン木が存在することが導かれます (演習問題 37)．イェンセンは，ω_1-ススリン木の不存在が GCH と矛盾しないことを証明しました ([Devlin–Johnsbråten 1974])．

これから，ススリン線があるのは ω_1-ススリン木があるときで，しかもそのときに限るということを証明しますが，まずそのまえに注意しておくべきことがあります．

木を剪定(せんてい)して元気のない枝や実のつかない枝を取り除くことはよい習慣です．それと同時に，木の幹が一本だけであるという点も確かめておいてよいでしょう．

定義 5.10. **うまく刈り込まれた κ-木**とは，$|\mathrm{Lev}_0(T)|=1$ かつ

$$\forall x\in T\forall\alpha\,(\mathrm{ht}(x,T)<\alpha<\kappa\rightarrow\exists y\in\mathrm{Lev}_\alpha(T)(x<y)) \tag{$*$}$$

をみたすような κ-木 T のことである．□

補題 5.11. κ が正則基数で T が κ-木であるとき，T はうまく刈り込まれた κ-部分木を含む．

【証明】 T の要素 x のうち条件 $|\{z\in T:z>x\}|=\kappa$ をみたすものの全体を T' としよう．明らかに T' は T の部分木である．T' が条件 $(*)$ をみたすことを確かめたい．T' の要素 x をとり，α を $\mathrm{ht}(x,T)<\alpha<\kappa$ をみたす順序数としよう．$Y=\{y\in\mathrm{Lev}_\alpha(T):x<y\}$ とおこう．T' の定義と，すべての β について $|\mathrm{Lev}_\beta(T)|<\kappa$ であるという事実から，集合 $\{z\in T:z>x\wedge\mathrm{ht}(z,T)>\alpha\}$ は濃度 κ をもつ．この集合の各要素は，Y のどれかの要素の後にある．$|Y|<\kappa$ なので，Y のある要素 y について $|\{z\in T:z>x\}|=\kappa$ となる．この y は T' に属する．同様にして $\mathrm{Lev}_0(T')\neq 0$ が示され，$T'\neq 0$ がわかる．最後に，$\mathrm{Lev}_0(T')$ の任意の要素 x について集合 $\{y\in T':y\geq x\}$ は T のうまく刈り込まれた κ-部分木である．□

木を剪定すると，残された枝はよりよく繁る傾向があります．

補題 5.12. κ を正則基数，T をうまく刈り込まれた κ-アロンシャイン木，x を T の要素とするとき

$$\forall n<\omega \exists \alpha>\mathrm{ht}(x,T)\,(|\{y\in \mathrm{Lev}_\alpha(T): y>x\}|\geq n)$$

が成立する．

【証明】 $n=2$ の場合は，集合 $\{y: y>x\}$ が x より高いすべての水準と交わり，しかも鎖をなすことができないという事実から導かれる．2 より大きい n については帰納法で進む．n について補題が成立したと仮定しよう．すなわち，$\mathrm{ht}(x,T)$ より大きいある順序数 α と $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ の n 個の相異なる要素 $y_1,\ldots,y_n$ をとって，どれもが $y_i>x$ となっているものとする．α より大きな順序数 β をうまく選ぶと，z_n, $z_{n+1}>y_n$ をみたす相異なる二つの要素 z_n と z_{n+1} を $\mathrm{Lev}_\beta(T)$ からとれる．1 から $n-1$ までの番号 i については $\mathrm{Lev}_\beta(T)$ から $z_i>y_i$ をみたす z_i をとれる．この $\{z_1,\ldots,z_n,z_{n+1}\}$ により，補題が $n+1$ の場合にも成立することがわかる．□

実際には，補題 5.12 は，n のところを κ より小さい任意の基数で置き換えても成立します (演習問題 38).

ようやく，SH が ω_1-ススリン木の不存在と同値であることを証明できます．

定理 5.13. ω_1-ススリン木があるとき，そしてそのときに限り，ススリン線がある．

【証明】 まず T を ω_1-ススリン木とする．補題 5.11 により，T はうまく刈り込まれた木であると仮定しても一般性は損なわれない．

$$L=\{C\subset T: C \text{ は } T \text{ の極大な鎖}\}$$

としよう．$C\in L$ のとき，次のような順序数 $h(C)$ がある．すなわち，$\alpha<h(C)$ なら C は $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ のちょうど一つの要素を含み，$\alpha\geq h(C)$ なら C は $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ の要素を一つも含まない．T はアロンシャイン木なので，$h(C)<\omega_1$ となる．T はうまく刈り込まれた木だから極大な鎖には最大要素がない．したがって $h(C)$ は必ず極限順序数となる．以下，$h(C)$ 未満の順序数 α について，$C(\alpha)$ は C の α 番目の水準に属する要素を意味するものとする．

L に次のようにして順序を与えよう．T 上の任意の全順序づけ $\prec$ を考える．L の相異なる二つの要素 C と D に対して，$C(\alpha)\neq D(\alpha)$ となる最小の順序数 α を $d(C,D)$ と書こう．$d(C,D)<\min\{h(C),h(D)\}$ に注意しよう．いま $C\lhd D$ となるのは，$C(d(C,D))\prec D(d(C,D))$ となるちょうどそのときだとして順序づけ $\lhd$ を定義しよう．つまり，$\prec$ をある種の辞書式順序を定めるために用いたことになる．これが実際に L を全順序づけることは容易に検証できる．これから $\langle L,\lhd\rangle$ がスス

リン線であることを証明する．

まず，L が c.c.c. をみたすことを示すために，仮に $\{(C_\xi, D_\xi):\xi<\omega_1\}$ が互いに交わりのない空でない開区間からなる集合族だったとしよう．各区間 (C_ξ, D_ξ) の要素 E_ξ と順序数 α_ξ を

$$\max\{d(C_\xi, E_\xi), d(E_\xi, D_\xi)\}<\alpha_\xi<h(E_\xi)$$

となるようにとれば，$\{E_\xi(\alpha_\xi):\xi<\omega_1\}$ は T の反鎖をなし，このことは T がススリン木であることに反する．

L が可分でないことを示すためには，ω_1 より小さいどんな順序数 δ についても，集合 $\{C:h(C)<\delta\}$ が L の中で稠密にならないことを示せば十分である．δ が与えられたとして，$\mathrm{Lev}_\delta(T)$ の要素 x をとる．補題 5.12 により，δ よりおおきなある順序数 α について，$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ は x の後にある要素を少なくとも三つ含む．この三つの要素のそれぞれを含む L の要素を D, E, F としよう．たとえばこれらの間に $D\lhd E\lhd F$ という順序がついていたとすると，(D,F) は空でない開区間である．しかし $x\in D\cap F$ だから，(D,F) には $h(C)<\delta$ をみたすような要素 C は入っていない．

逆に，ススリン線 $\langle L,\lhd\rangle$ が与えられたと仮定しよう．定理 4.4 により L は自己稠密で，しかもその空でない開部分集合はどれも可分でないと仮定しても一般性は損なわれない．L の空でない開区間全体の集合を $\mathcal{J}$ としよう．すなわち $\mathcal{J}$ の要素は (a,b) という形の区間で，ここで a と b は $a\lhd b$ をみたす L の要素である．包含関係の逆の順序で $\mathcal{J}$ を半順序づけしよう．つまり，$I\leq J$ とは $J\subset I$ のことだとする．これから $\mathcal{J}$ のある部分集合 T を定義して，この順序のもとで T が ω_1-ススリン木になるようにする．

T を見つけるために，可算順序数 β に対して $\mathcal{J}$ の部分集合 $\mathcal{I}_\beta$ を見つけ，さらに次の条件がみたされるようにする．

(1) $\mathcal{I}_\beta$ の要素どうしは互いに交わりがない．

(2) $\bigcup\mathcal{I}_\beta$ は L の中で稠密である．

(3) $\alpha<\beta, I\in\mathcal{I}_\alpha, J\in\mathcal{I}_\beta$ のとき

  (a) $I\cap J=0$ であるか，または

  (b) $J\subset I$ かつ $I\setminus \mathrm{cl}(J)\neq 0$ である．

このとおりにできたものとして，$T=\bigcup_\beta\mathcal{I}_\beta$ とおこう．条件 (1)–(3) により T は

木であり，$\mathrm{Lev}_\beta(T)=\mathcal{I}_\beta$ である．A が T に含まれる (木の部分集合としての) 反鎖であれば，それは L の互いに交わりのない開区間の集合なので $|A|\leq\omega$ である．また，T は不可算な鎖をもつこともない．もし仮に不可算な鎖 $\{I_\xi:\xi<\omega_1\}$ があって $\xi<\eta\to I_\xi\leq I_\eta$ となっているとしたら，(3b) によって

$$\xi<\eta\to(I_\xi\subset I_\eta\wedge I_\eta\setminus\mathrm{cl}(I_\xi)\neq 0)$$

であるから，$\{I_\xi\setminus\mathrm{cl}(I_{\xi+1}):\xi<\omega_1\}$ が互いに交わりのない開集合族となって L が c.c.c. をみたすことに反する．さらに (2) により各 β について $\mathcal{I}_\beta\neq 0$ であるから $|T|=\omega_1$ である．こうして T がススリン木であることがわかる．

$\mathcal{I}_\beta$ を帰納法によって構成しよう．$\mathcal{I}_0$ を $\mathcal{J}$ の交わりのない部分族のうち極大なものだとしよう．極大性により，$\bigcup\mathcal{I}_0$ は稠密である．$\mathcal{I}_\alpha$ が与えられたとして，$\mathcal{I}_{\alpha+1}$ を次のようにして決めよう．$\mathcal{I}_\alpha$ の要素 I に対して，集合族 $\mathcal{K}_I$ を集合

$$\{K\in\mathcal{J}:K\subset I\wedge I\setminus\mathrm{cl}(K)\neq 0\}$$

の極大な交わりのない部分族とする．そのうえで $\mathcal{I}_{\alpha+1}=\bigcup\{\mathcal{K}_I:I\in\mathcal{I}_\alpha\}$ とする．

さらに，γ が極限順序数であり，γ より小さい順序数 α に対する $\mathcal{I}_\alpha$ はすでに定まっていて，$\alpha<\beta<\gamma$ のときに (1)–(3) も成立するものとしよう．

$$\mathcal{K}=\{K\in\mathcal{J}:\forall\alpha<\gamma\forall I\in\mathcal{I}_\alpha[I\cap K=0\vee(K\subset I\wedge I\setminus\mathrm{cl}(K)\neq 0)]\}$$

とおき，$\mathcal{I}_\gamma$ を $\mathcal{K}$ の極大な交わりのない部分族とする．すると $\alpha<\beta\leq\gamma$ のとき (1) と (3) は成立する．また，(2) が $\beta=\gamma$ のときに意味するのは，$\mathcal{J}$ のいかなる要素 J も $\mathcal{I}_\gamma$ のいずれかの要素と交わるはずだということで，このことは，J に対し $\exists K\in\mathcal{K}(K\subset J)$ を示せば $\mathcal{I}_\gamma$ の極大性から導かれることになる．そのために，$\bigcup_{\alpha<\gamma}\mathcal{I}_\alpha$ に属するすべての区間の左右の端点全体の集合を E とする．E は可算集合で J は可分ではないので，$K_1\subset J$ と $K_1\cap E=0$ をみたす $\mathcal{J}$ の要素 K_1 が見つかる．ここで，I を $\mathcal{I}_\alpha$ の任意の要素とすると K_1 は I の端点を含まないので，$I\cap K_1=0$ あるいは $K_1\subset I$ である．そこで，$\mathcal{J}$ の要素 K を $K\subset K_1$ かつ $K_1\setminus\mathrm{cl}(K)\neq 0$ となるようにすると，$K\subset J$ かつ $K\in\mathcal{K}$ である．□

MA(ω_1) から ω_1-ススリン木のないことが導かれることもこれでわかりますが，そのためにここで用いた (定理 5.13 と定理 4.2 に訴える) 議論はどちらかというとまわりくどいものです．木そのものをそれ自身の不存在の証明に用いるずっと簡単な別証明があります．

補題 5.14. MA(ω_1) から ω_1-ススリン木のないことが導かれる.

【証明】 $\langle T, \leq \rangle$ をススリン木とし，$\mathbb{P} = \langle T, \geq \rangle$ とおく．つまり $\mathbb{P}$ は T の順序を逆にしたものである．T に不可算な反鎖がないことから，$\mathbb{P}$ は c.c.c. をみたす．補題 5.11 より，T はうまく刈り込まれていると一般性を損なうことなく仮定できる．このとき，$D_\alpha = \{ x \in T : \mathrm{ht}(x, T) > \alpha \}$ は $\mathbb{P}$ において稠密である．MA(ω_1) により，すべての D_α と交わりをもつフィルター G が存在する．そのような G は T の不可算な鎖をなすから，T がススリン木であるという事実に反する．□

ここでまた別の種類の木をとりあげましょう.

定義 5.15. T を κ-木とするとき，T を通る**道**とは，κ 未満のすべての α について水準 $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ と交わりをもつような T の鎖 C のことである．□

同じことをこう言ってもよいでしょう：道とは，濃度 κ をもつような極大な鎖のことである.

κ-アロンシャイン木でない κ-木の例を見つけるのは簡単です．たとえば順序数としての κ 自身がそうです．こうした自然な例は，あまり多くの道をもちません．κ はちょうど一本の道をもちます．もう少しましな例として，

$$T = \{ s \in {}^{<\kappa}2 : |\{ \alpha \in \mathrm{dom}(s) : s(\alpha) = 1 \}| < \omega \}$$

とおけば，T はちょうど κ 本の道をもちます.

定義 5.16. 任意の正則基数 κ について，**κ-クレパ木**とは，κ^+ 本以上の道をもつような κ-木のことをいう．《κ-クレパ木が存在する》という言明を κ-KH と書く．KH あるいは**クレパの仮説**とは，ω_1-KH のことである．□

SH が ω_1-ススリン木が**ない**と主張しているのに対して，KH は ω_1-クレパ木が**ある**と言っていることに注意してください.

KH は ZFC＋GCH と独立です．KH は $\diamondsuit^+$ から導かれます (第 7 節)．その $\diamondsuit^+$ は，$\mathbf{V} = \mathbf{L}$ から導かれます (第 VI 章第 5 節)．また第 VIII 章第 3 節において，$\neg$KH が GCH と矛盾しないことを証明します.

SH の場合と違って，ω_1 以外の後続型基数 κ に関する κ-KH が独立であることは，ω_1 の場合をちょっと手直しするだけで証明できます (第 VIII 章演習問題 F1〜F6)．いっぽう，κ が ω や強到達不能基数のときは，κ-KH は当たり前です．なぜなら，その場合には高さ κ の完全 2 進木が κ-クレパ木になるからです.

KH を，木に言及しない簡明な組み合わせ論的言明によって言いなおせます．

定義 5.17. $\mathcal{P}(\kappa)$ の次のような部分集合 $\mathcal{F}$ を κ-クレパ集合族であるという．すなわち，$|\mathcal{F}| \geq \kappa^+$ であり，しかも

$$\forall \alpha < \kappa (|\{A \cap \alpha : A \in \mathcal{F}\}| < \kappa)$$

が成立することである．□

クレパ集合族の概念は，実際には κ の順序に依存していないことを指摘しておきましょう．$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$, $X \subset I$ のとき，

$$\mathcal{F}_X = \{A \cap X : A \in \mathcal{F}\}$$

とおきましょう．$X \subset Y \subset I$ であれば，$A \cap Y$ に $A \cap X$ を対応づけることで $\mathcal{F}_Y$ を $\mathcal{F}_X$ の上へ写像できるので，$|\mathcal{F}_X| \leq |\mathcal{F}_Y|$ です．特に，$I = \kappa$ で κ が正則基数ならば，$\forall \alpha < \kappa (|\mathcal{F}_\alpha| < \kappa)$ と $\forall X \subset \kappa (|X| < \kappa \to |\mathcal{F}_X| < \kappa)$ は同値となります．そこで，正則基数 κ について，κ-クレパ集合族が存在することの必要十分条件は，濃度が κ のある (すべての，といっても同じですが) 集合 I について，$\mathcal{P}(I)$ の部分集合 $\mathcal{F}$ で，$|\mathcal{F}| \geq \kappa^+$ かつ $\forall X \subset I (|X| < \kappa \to |\mathcal{F}_X| < \kappa)$ となるようなものが存在すること，となります．

定理 5.18. 正則基数 κ について κ-クレパ集合族があるということと κ-クレパ木があることとは同値である．

【証明】 T が κ-クレパ木だったとして，$\mathcal{F}$ を T のすべての道の集合としよう．すると，$|\mathcal{F}| \geq \kappa^+$ となる．また，$|T| = \kappa$ であるから，あとは $|X| < \kappa$ であるような T の部分集合 X についていつでも $|\mathcal{F}_X| < \kappa$ となることを言えば，先ほど確かめたことによって κ-クレパ族が得られる．そこで，そのような集合 X を一つ固定しよう．κ は正則基数なので，κ より小さいある順序数 α について $\forall x \in X(\mathrm{ht}(x, T) < \alpha)$ が成立する．$\mathcal{F}$ の要素 C は $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ と交わりをもつので，$\mathcal{F}_X$ の要素はどれも $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ のなんらかの要素 z によって $\{x \in X : x < z\}$ という形で表示できる．そこで $|\mathcal{F}| \leq |\mathrm{Lev}_\alpha(T)| < \kappa$ となる．

逆を示そう．$\mathcal{P}(\kappa)$ も部分集合 $\mathcal{F}$ が κ-クレパ集合族であったとする．$\mathcal{F}_\alpha$ の要素 B の特徴関数 χ_B を ${}^{\alpha}2$ の要素とみれば，${}^{<\kappa}2$ の部分集合 $\bigcup_{\alpha < \kappa} \{\chi_B : B \in \mathcal{F}_\alpha\}$ は κ-クレパ木となる．□

§6　閉非有界 (c.u.b.) フィルター

第 1 節で κ のほとんど交わりのない部分集合の族について議論したときは，《ほとんど》とは「κ 個未満の例外をのぞく」という意味でした.「ほとんど」を意味づけるやり方は他にもいろいろあり，それらすべてに共通する概念としてフィルターの概念があります.

定義 6.1. 空でない集合 A に対し A **上のフィルター**とは，次の条件をみたすような $\mathcal{P}(A)$ の部分集合 $\mathcal{F}$ のことをいう.

(a) $A \in \mathcal{F}$ かつ $0 \notin \mathcal{F}$,

(b) $\forall X, Y \in \mathcal{F}(X \cap Y \in \mathcal{F})$,

(c) $\forall X \in \mathcal{F} \forall Y \subset A(X \subset Y \to Y \in \mathcal{F})$. □

定義 6.2. 空でない集合 A に対し A **上のイデアル**とは，次の条件をみたすような $\mathcal{P}(A)$ の部分集合 $\mathcal{I}$ のことをいう.

(a) $0 \in \mathcal{I}$ かつ $A \notin \mathcal{I}$,

(b) $\forall X, Y \in \mathcal{I}(X \cup Y \in \mathcal{I})$,

(c) $\forall X \in \mathcal{I} \forall Y \subset A(X \supset Y \to Y \in \mathcal{I})$. □

定義 6.3. $\mathcal{I}$ が A 上のイデアルのとき，その**双対フィルター** $\mathcal{I}^*$ とは

$$\{X \subset A : A \setminus X \in \mathcal{I}\}$$

のことである. $\mathcal{F}$ が A 上のフィルターのとき，その**双対イデアル** $\mathcal{F}^*$ とは $\{X \subset A : A \setminus X \in \mathcal{F}\}$ のことである. □

補題 6.4. $\mathcal{F}$ が A 上のフィルター, $\mathcal{I}$ が A 上のイデアルであれば，$\mathcal{F}^*$ はイデアル，$\mathcal{I}^*$ はフィルターであり，また，$\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}$, $\mathcal{I}^{**} = \mathcal{I}$ である. □

次のことにも注意しておきましょう. 集合 A 上のフィルターは，集合の包含関係によって半順序づけされた $\mathcal{P}(A) \setminus \{0\}$ において定義 2.4 の意味でのフィルターになっています.

(例 1) 無限集合 A について，$\{X \subset A : |X| < \omega\}$ は A 上のイデアルです.

(例2) $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$ とおきましょう. μ をルベーグ測度とします. つまり「$\mu(X) = r$」とは，X がルベーグ可測でそのルベーグ測度が r に等しいという意味だとします. このとき $\mathcal{F} = \{X \subset [0,1] : \mu(X) = 1\}$ とおけば $\mathcal{F}$ はフィルターで，$\mathcal{F}^* = \{X \subset$

$[0,1]:\mu(X)=0\}$ となります．ある条件 $\phi(x)$ が $[0,1]$ において**ほとんどいたるところ**成立するとは，$\{x\in[0,1]:\phi(x)\}\in\mathcal{F}^*$ となることをいいます．この「ほとんど」の測度論的な用法を，フィルターをめぐる議論ではしばしば借用します．

(例 3) κ を無限基数とし $\mathcal{I}=\{X\subset\kappa:|X|<\kappa\}$ とおくとき，ほとんど交わりのない集合族 (定義 1.1) とは，$\mathcal{A}\subset(\mathcal{P}(A)\setminus\mathcal{I})$ かつ $\mathcal{A}$ の異なる 2 元 X と Y について $X\cap Y\in\mathcal{I}$ をみたす集合 $\mathcal{A}$ のことです．

どんなイデアルも有限和のもとで閉じていることは定義からすぐわかるのですが，例 2 や例 3 のようなイデアルについては，もっと多数の和に関して閉じていることもありえます．

定義 6.5. イデアル $\mathcal{I}$ が **κ-完備**であるとは，$\forall\mathcal{A}\subset\mathcal{I}(|\mathcal{A}|<\kappa\to\bigcup\mathcal{A}\in\mathcal{I})$ となることである．フィルター $\mathcal{F}$ が **κ-完備**であるとは，$\forall\mathcal{A}\subset\mathcal{F}(|\mathcal{A}|<\kappa\to\bigcap\mathcal{A}\in\mathcal{F})$ となることである．□

したがって，イデアルが κ-完備であることとその双対フィルターが κ-完備であることとは同値です．どんなイデアルもフィルターも ω-完備です．$\mathcal{I}$ が集合 A 上のイデアルで A の各要素 a について $\{a\}\in\mathcal{I}$ となっていれば，$\mathcal{I}$ は $|A|^+$-完備ではありません．なぜなら

$$A=\bigcup\{\{a\}:a\in A\}$$

であり，A は $\mathcal{I}$ には属さないからです．そのような $\mathcal{I}$ であっても，$|A|$-完備になることはありえます．たとえば，$\{X\subset\kappa:|X|<\kappa\}$ は κ が正則基数であるとき (そのときに限って) κ-完備となります．

例 2 の測度イデアルは ω_1-完備ですが $(2^\omega)^+$-完備ではありません．MA のもとでは，測度イデアルは 2^ω-完備です (定理 2.21)．ベール類イデアル

$$\{X\subset[0,1]:X\text{ は第 1 類集合}\}$$

についても同様です (定理 2.20)．

次に，閉非有界イデアル (c.u.b. イデアル) とフィルターを紹介しましょう．

定義 6.6. 極限順序数 μ の部分集合 C が**閉集合**であるとは，μ 未満のすべての極限順序数 δ に対して，$C\cap\delta$ が δ の中で有界でなければ $\delta\in C$ である，という条件をみたすときにいう．C が μ において有界でなくしかも閉であるときに，C は μ において **c.u.b.** (閉非有界) であるという．□

ここで定義した意味で閉であることは，順序位相の意味で閉集合であることと

同値になる，ということに注意しましょう．$\{\gamma<\mu : \gamma$ は極限順序数$\}$ や $\{\gamma<\mu : \gamma$ は極限順序数の極限$\}$ は閉集合の例です．μ が ω より大きい基数のときには，これらの集合は μ において c.u.b. となります．もしも $\mathrm{cf}(\mu)=\omega$ であれば，μ 内の有界でない ω-列はすべて c.u.b. ということになります．

定義 6.7. $\mathrm{cf}(\mu)>\omega$ のとき，μ 上の **c.u.b. フィルター** $\mathrm{Cub}(\mu)$ とは

$$\{X\subset\mu : \exists C\subset X(C \text{ は } \mu \text{ において c.u.b.})\}$$

である．□

たとえば

$$C=\{\gamma<\omega_1 : \gamma \text{ は } \omega \text{ より大きい極限順序数}\}$$

として $X=C\cup\omega$ とおけば，$X\in\mathrm{Cub}(\omega_1)$ ですが X は ω_1 において c.u.b. ではありません．この例から，c.u.b. 集合だけを集めたのでは定義 6.1 の条件 (c) が成り立たないのでフィルターにならないことがわかります．$\mathrm{Cub}(\mu)$ は，(a) と (c) の成り立つことが容易にわかるので，少なくともフィルターになるチャンスはあるわけです．ただし，残る条件 (b) にはもう一つ注意が必要です．というのは，$\mathrm{cf}(\mu)$ が ω である場合には，互いに交わりのない二つ以上の共終な ω-列が存在して，条件 (b) が成立しないからです．

補題 6.8. $\mathrm{cf}(\mu)>\omega$ のとき，

(a) μ の，$\mathrm{cf}(\mu)$ 個未満の c.u.b. 部分集合の共通部分はまた c.u.b. である．

(b) $\mathrm{Cub}(\mu)$ は $\mathrm{cf}(\mu)$-完備なフィルターである．

【証明】 (a) $\lambda<\mathrm{cf}(\mu)$ とし，λ までの順序数 α に対して C_α は μ において c.u.b. であるとする．$D=\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ とおく．D が閉であることは容易に確かめられる．D が有界でないことを示したい．そのために C_α の ξ より大きい要素のうち最小のものを $f_\alpha(\xi)$ とすることにより $f_\alpha : \mu\to\mu$ を定義しよう．そして $g(\xi)=\sup\{f_\alpha(\xi) : \alpha<\lambda\}$ とすると，$\mathrm{cf}(\mu)>\lambda$ であることにより $\xi<g(\xi)<\mu$ となる．$g^0(\xi)=\xi$, $g^{n+1}(\xi)=g(g^n(x))$, $g^\omega(\xi)=\sup\{g^n(\xi) : n<\omega\}$ と定めよう．すると，$\mathrm{cf}(\mu)>\omega$ なので $\xi<g^\omega(\xi)<\mu$ となる．各 α について，C_α は $g^\omega(\xi)$ の中で非有界なので $g^\omega(\xi)\in C_\alpha$，したがって $g^\omega(\xi)\in\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ となる．こうして，どの ξ についてもそれより大きい D の要素として $g^\omega(\xi)$ があることになる．

(b) $\lambda<\mathrm{cf}(\mu)$ とし，λ までの順序数 α に対して $\mathrm{Cub}(\mu)$ の要素 X_α があったとする．X_α に含まれる c.u.b. 集合 C_α をとれば $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha \subset \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ となるから，(a) により $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in \mathrm{Cub}(\mu)$ である．□

$\mathrm{Cub}(\mu)$ は μ が正則基数であるときにもっとも頻繁に利用されますが，その場合，このフィルターは μ-完備で $\mathrm{Cub}(\mu)\supset\{X\subset\mu: |X|<\mu\}$ となります．

ここでまた別の用語を定義します．

定義 6.9. $\mathrm{cf}(\mu)>\omega$ とする．μ の部分集合 X は $X\notin\mathrm{Cub}^*(\mu)$ のとき**定常集合**と呼ばれ，$X\in\mathrm{Cub}^*(\mu)$ のとき**非定常集合**と呼ばれる．□

同じことですが，X が定常集合であるとは，すべての c.u.b. 集合 C に対し $X\cap C\neq 0$ となるということです．補題 6.8 からすぐわかるように，$\mathrm{cf}(\mu)$ 個未満の非定常集合からなるどんな族の和集合もまた非定常集合ですから，もしも $\mu=\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ で $\lambda<\mathrm{cf}(\mu)$ であれば，少なくとも一つの X_α は定常集合です．次の補題により定常集合の例が得られます．

補題 6.10. $\mathrm{cf}(\mu)>\lambda$ で λ が正則基数であるとき，$\{\gamma<\mu: \mathrm{cf}(\gamma)=\lambda\}$ は μ 内の定常集合である．

【証明】 C が μ の c.u.b. 部分集合であれば，C の λ 番目の要素の共終数は λ である．

そこで，$\mathrm{cf}(\mu)\geq\omega_2$ のときは，交わりのない二つの定常集合 $\{\gamma<\mu: \mathrm{cf}(\gamma)=\omega\}$ と $\{\gamma<\mu: \mathrm{cf}(\gamma)=\omega_1\}$ が見出せます (このことは $\mathrm{Cub}(\mu)$ が超フィルターではない，といっても同じことです)．$\mathrm{cf}(\mu)=\omega_1$ のときはこれほど簡単ではありませんが，ウラムの古典的な結果からこれがやはり正しいことがわかります．ここから先では正則基数の場合にだけ注目することにします．一般の場合も容易にそこへ帰着させられます (演習問題 43)．

定理 6.11. (ウラムの定理)　κ を後続型基数，$\mathcal{I}$ を κ 上の κ-完備イデアルとし，単元集合はすべて $\mathcal{I}$ に属するものとする．このとき，κ 未満のすべての順序数 α に対して，$\mathcal{I}$ に属さない κ の部分集合 X_α を，互いに交わらないようにとれる．

【証明】 $\kappa=\lambda^+$ だったとし，サイズ λ 以下の κ の部分集合はすべて $\mathcal{I}$ に入ることに注意しよう．$\mathcal{F}=\mathcal{I}^*$ とおく．κ 未満の各 ρ に対して，f_ρ を ρ から λ の中への一対一関数としよう．κ 未満の α と λ 未満の ξ に対して

$$X^\xi_\alpha = \{\rho > \alpha : f_\rho(\alpha) = \xi\}$$

とおこう．すると，各 f_ρ が一対一関数であることから，どの ξ についても $\alpha \neq \beta \to X^\xi_\alpha \cap X^\xi_\beta = 0$ となる．さらに，各 α について

$$\bigcup_{\xi<\lambda} X^\xi_\alpha = \{\rho < \kappa : \rho > \alpha\} \in \mathcal{F}$$

である．$\mathcal{I}$ は κ-完備であるから，$\forall \xi < \lambda (X^\xi_\alpha \in \mathcal{I})$ ということはありえない．そこで，$h(\alpha)$ を $h(\alpha) < \lambda$, $X^{h(\alpha)}_\alpha \notin \mathcal{I}$ となるようにとろう．$h : \kappa \to \lambda$ であるから，どれかの ξ について $|h^{-1}\{\xi\}| = \kappa$ となる．このとき，$\{X^\xi_\alpha : h(\alpha) = \xi\}$ は定理の要件をみたしている．□

集合 X^ξ_α のなす $\lambda \times \kappa$ 行列は**ウラム行列**の名で知られています．

系 6.12. ω より大きいすべての正則基数 κ について，κ の κ 個の互いに交わらない定常部分集合の族が存在する．

【証明】 κ が後続型基数であれば定理 6.11 を $\mathrm{Cub}^*(\kappa)$ に適用すればよい．κ が極限基数であれば κ は弱到達不能基数なので，κ 未満の正則基数 λ が κ 個存在し，その各々について，補題 6.10 より $\{\gamma < \kappa : \mathrm{cf}(\gamma) = \lambda\}$ が定常集合となる．□

κ が後続型基数のとき，κ のどんな定常部分集合 S も，κ 個の互いに交わらない定常集合へと分割できます．それには $\{X \subset \kappa : X \cap S$ が非定常集合$\}$ というイデアルに定理 6.11 を適用すればよいのです．κ が弱到達不能基数である場合もこの結果は正しいのですが，これにはもっとずっと難しい証明が必要です ([Solovay 1971])．

互いにほとんど交わりのない κ^+ 個の定常集合からなる族が存在しないような，不可算な正則基数 κ がありうるかどうかは，定かではありません (演習問題 52)．

おしまいに，$\mathrm{Cub}(\kappa)$ が κ-完備であること (補題 6.8) の証明を手直しして得られるいくつかの事実を述べます．一つめは，下向きのレーヴェンハイムとスコーレムとタルスキの定理 (第 I 章 10.23 を参照) の特別な場合になっています．

補題 6.13. κ を不可算な正則基数とし，$\mathcal{A}$ を κ 上の κ 個未満の有限的関数からなる集合とする．このとき，集合

$$C = \{\gamma < \kappa : \gamma \text{ は } \mathcal{A} \text{ のもとで閉じている}\}$$

は κ において c.u.b. である．

【証明】C が閉であることは容易にわかる．非有界であることを示すために，まず $\mathcal{A}$ に関する ξ の閉包を $G(\xi)$ とする．すると $\xi \subset G(\xi) \subset \kappa$ であり，第 I 章定理 10.23 により $|G(\xi)| < \kappa$ である．κ は正則基数であるから，順序数 $g(\xi)$ を $\xi < g(\xi) < \kappa$ かつ $G(\xi) \subset g(\xi)$ となるように選ぶことができる．補題 6.8 の証明と同様に g を n 回反復したものを g^n とし，$g^\omega(\xi) = \sup_n g^n(\xi)$ としよう．すると $g^\omega(\xi)$ は ξ より大きな C の要素である．□

補題 6.14. κ を不可算な正則基数とし，κ 未満の順序数 α に対して，C_α は κ において c.u.b. だったとする．このとき集合

$$D = \{\gamma : \forall\alpha < \gamma(\gamma \in C_\alpha)\}$$

は κ において c.u.b. である．

【証明】D が閉であることは容易にわかる．非有界であることを示すために，$g(\xi)$ を ξ より大きい $\bigcap_{\alpha<\xi} C_\xi$ のある要素としよう (補題 6.8 により $\bigcap_{\alpha<\xi} C_\xi$ は非有界であることに注意)．このとき補題 6.13 と同じようにして定義された $g^\omega(\xi)$ は，ξ より大きな D の要素である．□

この集合 D は C_α の**対角線共通部分**と呼ばれます．

補題 6.14 から得られる次のフォドアの結果はしばしば応用されます．

補題 6.15. (押し下げ補題)　κ を不可算な正則基数，S を κ の定常部分集合とし，関数 $f: S \to \kappa$ は $\forall\gamma \in S(f(\gamma) < \gamma)$ をみたすとする．このとき，ある順序数 α について $f^{-1}\{\alpha\}$ は定常集合となる．

【証明】そうでなかったとして，各 α に対し c.u.b. 集合 C_α を $C_\alpha \cap f^{-1}\{\alpha\} = 0$ となるようにとろう．$D = \{\gamma < \kappa : \forall\alpha < \gamma(\gamma \in C_\alpha)\}$ とおく．D は補題 6.14 により c.u.b. である．もしも $\gamma \in D \cap S$ なら γ 未満のどの α についても $f(\gamma) \neq \alpha$ であるから $f(\gamma) < \gamma$ と矛盾する．したがって $D \cap S = 0$ となり，S は定常集合でありえない．□

§7 ◊ と ◊$^+$

定義 7.1. ◊ とは次の言明のことをいう：ω_1 未満のすべての順序数 α に対してその部分集合 A_α が存在して

$$\forall A \subset \omega_1(\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\} \text{ は定常集合})$$

が成立する．この言明に述べられたような集合列 $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ のことを **◊-列**とよぶ．□

補題 7.2. ◊ → CH.

【証明】 $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ が ◊-列であれば，

$$\forall A \subset \omega \exists \alpha > \omega (A = A_\alpha)$$

となるから $\{A_\alpha : A_\alpha \subset \omega\} = \mathcal{P}(\omega)$ である．□

◊ は CH を強化したものとみることができます．どんな ◊-列からも容易に $\mathcal{P}(\omega)$ の元の一覧表を取り出せますが，◊-列はさらに ω_1 のすべての部分集合をも《把握して》います．◊ を用いると，自分自身のすべての部分集合にかかわる特定の属性を有するような，サイズが ω_1 のいろいろなオブジェクトを構成できます．ここでは ◊ → ¬SH を証明することでこのことを例示します．つまり ◊ を ω_1-ススリン木を構成するために用いるわけです．CH や，あるいは GCH ですら，ω_1-ススリン木の存在を導かないことが知られています ([Devlin–Johnsbråten 1974])．◊ が GCH と矛盾しないことを第 VI 章第 5 節で証明します．

定義 5.4 から補題 5.6 までに論じたように，ω_1-ススリン木とはどんな鎖も反鎖も可算であるような ω_1-木のことです．いくつかの取るにたりない反例を回避しさえすれば，ススリン木の構成にあたっては反鎖のこと，とりわけ極大な反鎖のことだけを気にかけていればよいことがわかります．

定義 7.3. 木 $\langle T, \leq \rangle$ が**いつまでも分岐し続ける**とは，どんな要素 x に対しても，集合 $\{y \in T : y > x\}$ が $<$ によって全順序づけされないことを意味するものとする．□

補題 7.4. $\langle T, \leq \rangle$ がいつまでも分岐し続ける ω_1-木で，どの極大反鎖も可算だとすると，T は ω_1-ススリン木である．

【証明】 ツォルンの補題によればどんな反鎖も極大な反鎖に含まれる．したがって

すべての反鎖は可算である．不可算な鎖 B があったとする．B は極大であると仮定してよく，したがって B は T のすべての水準と交わるとして差しつかえない．T はいつまでも分岐し続けるので，T の要素 x に対して $f(x)>x$ かつ $f(x)\notin B$ をみたす $f(x)$ がある．そこで，B の要素 x_α を帰納的に $\mathrm{ht}(x_\alpha,T)>\sup\{\mathrm{ht}(f(x_\beta),T):\beta<\alpha\}$ となるように選べば，$\{f(x_\alpha):\alpha<\omega_1\}$ が不可算な反鎖となる．□

$\diamondsuit$ は ω_1 の部分集合についての主張なので，ススリン木として $\langle\omega_1,\lhd\rangle$ の形のものを作ろうと考えるのは自然なことでしょう．つまり ω_1 上にススリン木の順序 $\lhd$ を構成しようというわけです．レーヴェンハイムとスコーレムの論法によれば，これから構成する木の基本的な性質は可算順序数の c.u.b. 集合に反映されているはずだという点に注意しましょう．もう少し詳しくいうと次のようになります．

定義 7.5. 任意の木 T について $T_\alpha=\bigcup\{\mathrm{Lev}_\beta(T):\beta<\alpha\}$ と定める．□

T_α は T の α より低い水準からなる部分木，というわけです．

補題 7.6. $T=\langle\omega_1,\lhd\rangle$ を ω_1-木とするとき，

(a) 集合 $\{\alpha<\omega_1:T_\alpha=\alpha\}$ は ω_1 において c.u.b. である．

(b) $A\subset\omega_1$ を T の極大な反鎖とすると，集合 $\{\alpha<\omega_1:T_\alpha=\alpha\wedge(A\cap T_\alpha$ は T_α の極大な反鎖$)\}$ は ω_1 において c.u.b. である．

【証明】(a) この集合は明らかに閉である．非有界であることを示すために，$f(\xi)=\mathrm{ht}_T(\xi)$, $g(\xi)=\sup\{\eta:\eta\in\mathrm{Lev}_\xi(T)\}$ とおこう．f と g のもとで閉じた順序数 α は補題 6.13 により c.u.b. 集合をなし，またそのような α については $T_\alpha=\alpha$ が成立する．

(b) まず，木 T の反鎖 A が極大であるための必要十分条件として，$T\subset A$ のどの元も A のどれかの元と比較可能であるという条件があることに注意しよう．目的の集合が閉であることはこの場合も容易にわかる．非有界であることを示すために $h(\xi)$ を ξ と比較可能な A の要素の一つとする (特に $\xi\in A$ なら $h(\xi)=\xi$ である)．もしも α が f と g と h のもとで閉じていれば，$T_\alpha=\alpha$ であり，$A\cap T_\alpha$ は T_α の極大な反鎖である．□

ススリン木の構成に $\diamondsuit$ がどのように用いられるかについて，そろそろきちんと述べることにします．

補題 7.7. $T=\langle\omega_1,\lhd\rangle$ をいつまでも分岐し続ける ω_1-木とし，$\langle A_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$ を $\diamondsuit$-列

とする．ω_1 未満のすべての極限順序数 α について

$$(T_\alpha=\alpha\wedge A_\alpha \text{ は } T_\alpha \text{ の極大な反鎖})\rightarrow\forall x\in \mathrm{Lev}_\alpha(T)\exists y\in A_\alpha(y\lhd x) \qquad (*)$$

が成立しているとする．このとき，T は ω_1-ススリン木である．

【証明】補題 7.4 によれば，任意の極大な反鎖 A が可算であることを確かめれば十分である．補題 7.6 により，集合

$$C=\{\alpha<\omega_1:\alpha \text{ は極限順序数}\wedge T_\alpha=\alpha\wedge A\cap T_\alpha \text{ は } T_\alpha \text{ の極大な反鎖}\}$$

は ω_1 において c.u.b. である．$\{\alpha:A\cap\alpha=A_\alpha\}$ は定常集合なので，$A\cap\alpha=A_\alpha$ をみたす C の元 α を見つけることができる．$(*)$ によると，もしも $z\in T$ かつ $\mathrm{ht}_T(z)\geq\alpha$ であれば，z は A_α すなわち $A\cap\alpha$ のある要素の上に位置するはずで，したがって $z\notin A$ である．このことから $A=A_\alpha$ であり，A は可算である．□

あとは超限帰納法によって $(*)$ が成り立つように T を作っていくのですが，これは簡単です．

定理 7.8. ◊ から ω_1-ススリン木があることが導かれる．

【証明】T は $\langle\omega_1,\lhd\rangle$ の形になるように作られる．$I_\beta=\{\omega\cdot\beta+n:n\in\omega\}$ とおく．◊-列 $\langle A_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$ を決めておく．$\lhd$ を帰納的に構成するさいに，次の条件がみたされているようにする．

(1) $\lhd$ は ω_1 の木としての順序づけであり，ω_1 未満のすべての β について $\mathrm{Lev}_\beta(T)=I_\beta$ である．

(2) ω_1 未満の β と ω 未満の n について，$(\omega\cdot\beta+n)\lhd(\omega\cdot(\beta+1)+2n)$ かつ $(\omega\cdot\beta+n)\lhd(\omega\cdot(\beta+1)+2n+1)$ となる．

(3) $\beta<\alpha<\omega_1$ かつ $x\in I_\beta$ のときは，$\exists y\in I_\alpha(x\lhd y)$ となる．

(4) 補題 7.7 の条件 $(*)$ が成立する．

$\lhd$ がこのように構成できたとすると，(1) と (2) により T はいつまでも分岐し続ける ω_1-木であり，(4) によって T はススリン木である．条件 (3) は T の構成を容易にしてくれる．さらに，$T_\alpha=\omega\cdot\alpha$ となる．

$\lhd$ を帰納的に構成するために，$\omega\cdot\alpha$ の要素の間にはすでに $\lhd$ が定義されていて，α より下の水準では条件 (1)～(4) が成り立っていると仮定し，そのうえで，$\omega\cdot\alpha\cup I_\alpha$ の要素の間へと $\lhd$ を拡張する方法を述べる．もしも $\alpha=\beta+1$ であれば，構成法は条件 (2) に指定されているとおりで，$x\in\omega\cdot\alpha$ ならば，$x=(\omega\cdot\beta+n)$ あるい

は $x \lhd (\omega\cdot\beta+n)$ のときに限って $x \lhd (\omega\cdot\alpha+2n)$ とし，$x \lhd (\omega\cdot\alpha+2n+1)$ となるのも同じときであるとする．これで (1) と (3) は保たれ，(4) は後続型順序数についてはなにも言っていない．

以下，α は極限順序数であるとする．T_α の元，いいかえれば $\omega\cdot\alpha$ の元 x に対して T_α の鎖 $B(x)$ を決めて，$x \in B(x)$ かつ $B(x)$ は α 未満のすべての水準と交わるようにしよう．このような $B(x)$ を見い出すには，まず自然数 m に対して ξ_m を $\mathrm{ht}(x) < \xi_0 < \xi_1 < \cdots, \sup\{\xi_m : m \in \omega\} = \alpha$ となるように選び，次に I_{ξ_m} の元 y_m を $x \lhd y_0 \lhd y_1 \lhd \cdots$ となるように選んで (条件 (3) によりこれは可能)，それから $B(x) = \{z \in T_\alpha : \exists m \in \omega (z \lhd y_m)\}$ とおけばよい．

さて，$\omega\cdot\alpha = \{x_n : n \in \omega\}$ と数え上げ，$\omega\cdot\alpha$ の元 z に対して，$z \lhd (\omega\cdot\alpha+n)$ となるのは $z \in B(x_n)$ となるとき，そのときに限る，と定義しよう．$B(x_n)$ が T_α のすべての水準と交わることから，$\omega\cdot\alpha+n$ が T において実際に高さ α をもつことが導かれる．条件 (1)〜(3) が保たれていることも容易にわかる．

残る (4) が問題になるのは $\omega\cdot\alpha = \alpha$ かつ A_α が T_α の極大な反鎖であるときに限るので，以下，そのようになっていると仮定しよう．このときは $B(x)$ の作り方を少し工夫する．T_α の元 x に対し，まず y_0 を $x \lhd y_0$ かつ $\exists z \in A_\alpha (z \lhd y_0)$ となるように選ぶ．x は A_α の要素のどれかと比較可能になるから，このように選ぶことは可能である．それから $\xi_0 = \mathrm{ht}(y_0)$ とし，$1 \le m < \omega$ のときの ξ_m と y_m を前と同様にして選ぶ．このようにすればすべての $B(x)$ が A_α と交わるので，(*) が成立することになる．□

ここでは，順序数の計算の簡略化のために，$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ が一律に $\{\omega\cdot\alpha+n : n \in \omega\}$ に一致する作り方にした結果，$\mathrm{Lev}_0(T) = \omega$ となっています．構成法を手直しして T を二分木にすることも簡単にでき，特に $\mathrm{Lev}_0(T) = \{0\}, \mathrm{Lev}_1(T) = \{1, 2\}$, $\mathrm{Lev}_2(T) = \{3, 4, 5, 6\}, \ldots$，それから $\mathrm{Lev}_{\omega+\alpha}(T) = \{\omega\cdot(1+\alpha)+n : n \in \omega\}$ のようにできます．こうすれば T は $2^{<\omega_1}$ へ部分木として埋め込まれることになります．

次にはクレパ木を構成してみたいところですが，じつは GCH + $\Diamond$ + ¬KH は無矛盾ですから (第 VIII 章演習問題 J6)，$\Diamond$ より強い原理が必要となります．露骨な強化策の一例として，定義 7.1 の "定常集合" のところを "c.u.b." に置き換えて得られる原理 $\Diamond!$ が考えられます．これだと確かに $\Diamond! \to \mathrm{KH}$ ですが，$\Diamond! \to 0=1$ でもあります．なぜなら，もしも A と B が ω_1 の相異なる部分集合であれば，

$$\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\} \cap \{\alpha < \omega_1 : B \cap \alpha = A_\alpha\}$$

は可算集合になりますから．◊$^+$ という原理は ◊! を矛盾しない程度に弱めた (第 VI 章第 5 節) 原理で，この原理から KH が導かれます．◊$^+$ においては，集合たちは c.u.b. 集合上で把握されるのですが，各 α ごとに ω 回の把握のチャンスが与えられます．

定義 7.9. ◊$^+$ とは次の言明のことである．ω_1 未満の各順序数 α に対して，次のような $\mathcal{P}(\alpha)$ の部分集合 $\mathcal{A}_\alpha$ が存在する．すなわち，$\mathcal{A}_\alpha$ は可算であり，ω_1 のどんな部分集合 A に対しても，ω_1 の c.u.b. 集合 C が存在して

(a) $\forall\alpha\in C(A\cap\alpha\in\mathcal{A}_\alpha)$.

(b) $\forall\alpha\in C(C\cap\alpha\in\mathcal{A}_\alpha)$.

が成立する．そのような集合列 $\langle\mathcal{A}_\alpha:\alpha<\omega\rangle$ は ◊$^+$-列と呼ばれる．□

◊$^+$ から ◊ が導かれることは正しいのですが，ただちに明らかというわけにはいきません．このことはクレパ木を構成したあとで確かめることにします．

ここでは実際にはクレパ集合族を構成します．クレパ木はそこから (定理 5.17, 5.18 のやり方で) 得られます．

定理 7.10. ◊$^+$ から次のような $\mathcal{P}(\omega_1)$ の部分集合 $\mathcal{F}$ の存在が導かれる．すなわち，

(1) $\forall\beta<\omega_1(|\{X\cap\beta:X\in\mathcal{F}\}|\leq\omega)$, そして

(2) $\forall A(|A|=\omega_1\rightarrow\exists X\in\mathcal{F}(|X|=\omega_1\wedge X\subset A))$

系 7.11. ◊$^+$ から 2^{ω_1} 本の道をもつ ω_1-クレパ木の存在が導かれる．

系 7.12. ◊$^+$ からほとんど交わりのない ω_1 の部分集合の極大族でもあるようなクレパ集合族 $\mathcal{G}$ の存在が導かれる．

【証明】 まず定理 7.10 から系 7.11 が導かれることを示そう．◊$^+\rightarrow$CH であることは ◊$\rightarrow$CH の場合と同様で，もしも $\langle\mathcal{A}_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$ が ◊$^+$-列であるなら $\mathcal{P}(\omega)\subset\bigcup_{\alpha<\omega_1}\mathcal{A}_\alpha$ となる (あるいはこの後の定理 7.14 から ◊$^+\rightarrow$◊ であり，◊$\rightarrow$CH である)．CH によって，ω_1 の部分集合のほとんど交わりのない族 $\mathcal{B}$ で濃度 2^{ω_1} をもつものが存在する (定理 1.3)．$\mathcal{B}$ の元 B に対して，$X_B\subset B$ と $|X_B|=\omega_1$ をみたす $\mathcal{F}$ の元 X_B がある．これらの X_B たちは (B を変えるごとに) 相異なるので，$|\mathcal{F}|=2^{\omega_1}$ である．そこで，次のことがしたがう．すなわち，T を (定理 5.18 のように) 集合をその特徴関数と同一視することによって得られるクレパ木とすれば，T は

2^{ω_1} 本の道をもつ．

次に定理 7.10 から系 7.12 が導かれることを示そう．上のような $\mathcal{B}$ に対して $\mathcal{G}_1=\{X_B : B\in\mathcal{B}\}$ とおこう．$\mathcal{G}_1\subset\mathcal{F}$, $|\mathcal{G}_1|=2^{\omega_1}$ であり，また $\mathcal{G}_1$ はほとんど交わりがない集合族である．$\mathcal{G}$ を次のようなものとする．すなわち，$\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}$ であり

(a) $\mathcal{G}$ の要素はどれも不可算で，たがいにほとんど交わりがない．

(b) $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ である．

そして $\mathcal{G}$ は条件 (a) と (b) をみたすもののうちで極大なものとする．定理 7.10 の (2) より，$\mathcal{G}$ はほとんど交わりのない極大な族 (m.a.d. 集合族) である．また $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ なので定理 7.10 の (1) により

$$\forall\beta<\omega_1\,(|\{X\cap\beta : X\in\mathcal{G}\}|\leq\omega)$$

が導かれる．$|\mathcal{G}|\geq|\mathcal{G}_1|\geq\omega_2$ なので，$\mathcal{G}$ はクレパ集合族である．

最後に定理 7.10 を証明しよう．$C\subset\omega_1$ かつ $\xi<\omega_1$ のとき $s(C,\xi)=\sup(C\cup\{0\})\cap(\xi+1)$ と定める．そこで，もしも C が閉であれば，$s(C,\xi)$ とは $C\cup\{0\}$ に属する ξ 以下の元のうちで最大のものとなる．$A\subset\omega_1$ のとき，

$$X(A,C)=\{\,\xi\in A : \neg\exists\eta\in A(s(C,\xi)\leq\eta<\xi)\,\}$$

と定めよう．そこで C の元 β に対し，$X(A,C)$ は $s(C,\xi)=\beta$ となるような A の元 ξ のうち最小のものを，(存在するならば) 含むことになる．$X(A,C)\subset A$ であることと，$|A|=\omega_1$ かつ C が c.u.b. であれば $|X(A,C)|=\omega_1$ となることがわかる．いま $\langle\mathcal{A}_\alpha : \alpha<\omega\rangle$ が $\lozenge^+$-列であったとして，$\mathcal{F}$ を次のような A と C に対する $X(A,C)$ の全体とする．すなわち，

(a) $\forall\alpha\in C(A\cap\alpha\in\mathcal{A}_\alpha)$,

(b) $\forall\alpha\in C(C\cap\alpha\in\mathcal{A}_\alpha)$,

(c) $A\subset\omega_1$, $C\subset\omega_1$, $|A|=\omega_1$, かつ C は c.u.b. である．

すると，定理 7.10 の (2) はすぐにわかる．(1) は次のことを確かめればよい．すなわち，(a)–(c) をみたす A と C と，$\beta<\omega_1$ となる順序数 β について，

$|X(A,C)\cap\beta|\leq 1$ であるかまたは

$$\exists\alpha\leq\beta\,\exists x\subset\beta\,\exists B,D\in\mathcal{A}_\alpha\,(X(A,C)\cap\beta=X(B,D)\cup x \text{ かつ } |x|\leq 1)\qquad(*)$$

この $(*)$ を示すために $\alpha=s(C,\beta)$ としよう．$\alpha>0$ であれば，$\alpha\in C$ である．そこで $B=A\cap\alpha$, $D=C\cap\alpha$ とし，ξ を $A\setminus\alpha$ の最小要素としよう．このとき，$X(A,C)\cap\beta$

はもしも $\xi\geq\beta$ であれば $X(B,D)$ に等しく，$\xi<\beta$ であれば $X(B,D)\cup\{\xi\}$ に等しい．また，もしも $\alpha=0$ であれば，$X(A,C)\cap\beta$ は 0 であるかまたは単元集合である．□

おしまいに，$\Diamond^+\to\Diamond$ であることを示します．両者の間に，$\Diamond^+$ を弱めたものであることが明らかな言明を挿入するとうまくいきます．

定義 7.13. $\Diamond^-$ とは次の言明のことである．ω_1 未満のすべての順序数 α に対し，$\mathcal{P}(\alpha)$ の次のような部分集合 $\mathcal{A}_\alpha$ が対応する．すなわち $\mathcal{A}_\alpha$ は可算であり，ω_1 のどんな部分集合 A に対しても

$$\{\alpha<\omega_1 : A\cap\alpha\in\mathcal{A}_\alpha\}$$

は定常集合となる．□

明らかに $\Diamond^+\to\Diamond^-$ ですから，$\Diamond^+\to\Diamond$ は次の定理から得られます．

定理 7.14. $\Diamond^-\leftrightarrow\Diamond$.

【証明】 $\Diamond\to\Diamond^-$ は証明するまでもないので，以下では $\Diamond^-$ を仮定して $\Diamond$ を結論する．$\langle\mathcal{A}_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$ を $\Diamond^-$-列，つまり定義 7.13 の条件をみたす集合列としよう．ひとまず，この列に手を加えて ω_1 ではなく $\omega\times\omega_1$ の部分集合を把握するように変える．このために ω_1 から $\omega\times\omega_1$ の上への 1 対 1 関数 f を考える．$A\subset\omega_1$ のとき，$A'=f''A$, $B\subset\omega\times\omega_1$ のとき $B^*=f^{-1}B$ としよう．すると，$A'^*=A$, $B^{*\prime}=B$ である．次に

$$C=\{\alpha<\omega_1:\alpha\geq\omega\wedge f^{-1}(\omega\times\alpha)\subset\alpha\wedge f''\alpha\subset\omega\times\alpha\}$$

とおくと，C は c.u.b. である (補題 6.13)．ここで $\alpha\in C$, $A\subset\alpha$, $B\subset\omega\times\alpha$ とすると，$A'\subset\omega\times\alpha$, $B^*\subset\alpha$ である．C の元 α に対し，$\mathcal{B}_\alpha=\{A':A\in\mathcal{A}_\alpha\}$ と定め，C に入らない α については $\mathcal{B}_\alpha=0$ と定めよう．このとき次のことが成立する

$$\forall B\subset\omega\times\omega_1(\{\alpha<\omega_1:B\cap\omega\times\alpha\in\mathcal{B}_\alpha\}\text{ は定常集合}). \tag{$*$}$$

この $(*)$ を示すために $S=\{\alpha<\omega_1:B^*\cap\alpha\in\mathcal{A}_\alpha\}$ を考えよう．S は定常集合であり，したがって $S\cap C$ も定常集合である．そして $\alpha\in S\cap C$ のときには，$B\cap(\omega\times\alpha)=(B^*\cap\alpha)'\in\mathcal{B}_\alpha$ となる．

さて $|\mathcal{B}_\alpha|\leq\omega$ であることに着目して $\mathcal{B}_\alpha=\{B^k_\alpha:k\in\omega\}$ とあらわしたとする．$B^k_\alpha\subset\omega\times\alpha$ である．そこで $B^k_{\alpha,n}=\{\xi:\langle n,\xi\rangle\in B^k_\alpha\}$ とおく．このときある番号 n について $\langle B^n_{\alpha,n}:\alpha<\omega_1\rangle$ が $\Diamond$-列になることを証明する．もしもそうならなかったと

すると，どの n に対しても ω_1 の部分集合 B_n が存在して $\{\alpha<\omega : B_n\cap\alpha=B^n_{\alpha,n}\}$ が非定常集合となる．$B=\bigcup_n(\{n\}\times B_n)$ とおこう．すると各 n について

$$\{\alpha<\omega_1 : B\cap(\omega\times\alpha)=B^n_\alpha\}$$

は非定常集合となる．可算個の非定常集合の和集合もやはり非定常集合なので，

$$\{\alpha<\omega_1 : \exists n(B\cap(\omega\times\alpha)=B^n_\alpha)\}$$

も非定常集合となって $(*)$ と矛盾することになる．□

このように $\omega\times\omega_1$ の部分集合を ω_1 の部分集合でコード化する手法は定石です．これを手直しすれば，$\omega_1\times\omega_1$ の部分集合とか ω_1 から ω_1 への関数のような，濃度 ω_1 をもつ他のオブジェクトを $\diamondsuit$-列や $\diamondsuit^+$-列に把握させられます．演習問題 51 を見てください．

第 II 章の演習問題

[1] Δ-システム補題 (定理 1.5) の直接証明を与えなさい． [ヒント] ある自然数 n について $\forall x\in\mathcal{A}(|x|=n)$ と仮定してもさしつかえない．この n に関する帰納法で進めることにする．そのとき $\mathcal{A}$ の不可算部分集合 $\mathcal{B}$ が存在して $\bigcap\mathcal{B}\neq 0$ かまたは $\mathcal{B}$ の元が互いに交わりのないようにできることを確認しなさい．

[2] ω_ω 個の有限集合からなる族 $\mathcal{A}$ で，濃度 ω_ω の Δ-システムを含まないようなものが存在することを示しなさい．

[3] $\kappa\leq 2^\omega$ であって，κ 未満のすべての α に対して X_α が可分位相空間であるとするとき，直積空間 $\prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ も可分であることを示しなさい． [ヒント] まず $I\subset 2^\omega$ で X が可分空間であるときの ${}^I X$ について考えなさい．X のある稠密集合を D として，

$$\forall f,g\in I(f\restriction n=g\restriction n\to\varphi(f)=\varphi(g))$$

となるような自然数 n が存在するような ${}^I D$ の元 φ 全体の集合を E とすれば，E は ${}^I X$ において稠密です．

[4] $\kappa>2^\omega$ のとき直積空間 ${}^\kappa 2$ は可分ではないことを示しなさい．ただし $2=\{0,1\}$ であり，これには離散位相が入っているとする． [ヒント] D が ${}^\kappa 2$ の可算部分集合であれば，$\alpha<\beta$ かつ $\forall f\in D(f(\alpha)=f(\beta))$ をみたす α と β があります．

[5] 位相空間 X が c.c.c. をもつためには次のような開集合列 $\langle U_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ がないことが必要十分であることを示しなさい：$\alpha < \beta$ のとき $\overline{U_\alpha}$ は $\overline{U_\beta}$ の真部分集合である．

[6] ${}^{\omega_1}2$ は c.c.c. をもつ空間であるけれども，次のような開集合列 $\langle U_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ があることを示しなさい：$\alpha < \beta$ のとき U_α は U_β の真部分集合である．

[7] $\mathcal{B}$ を完備ブール代数とするとき，$\mathcal{B}$ が c.c.c. をもつためには次のような要素列 $\langle b_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ がないことが必要十分であることを示しなさい：$\alpha < \beta$ のとき $b_\alpha < b_\beta$.

[8] ${}^\omega\omega$ の元 f, g について，$f <^* g$ ということを $\exists n \forall m > n(f(m) < g(m))$ が成立していることだと定める．$\mathcal{F} \subset {}^\omega\omega$ かつ $|\mathcal{F}| = \kappa$ とするとき，MA(κ) を仮定して $\exists g \in {}^\omega\omega \forall f \in \mathcal{F}(f <^* g)$ を示しなさい．［ヒント］$\mathbb{P}$ を次のような対 $\langle p, F \rangle$ の集合としなさい．p は ω から ω への有限部分関数で，F は $\mathcal{F}$ の有限部分集合です．$\langle p, F \rangle \le \langle q, G \rangle$ ということを，$q \subset p$, $G \subset F$ であって

$$\forall f \in G \forall n \in (\mathrm{dom}(p) \setminus \mathrm{dom}(q))(p(n) > f(n))$$

となることとします．あるいはこの結果は定理 2.15 から直接的に導くこともできます (第 VIII 章演習問題 A3 を参照).

[9] $\mathcal{B}$ をサイズが κ の $\mathcal{P}(\omega)$ の部分集合であってほとんど交わりがない集合族になっているものとする．ここで κ は $\omega \le \kappa < 2^\omega$ をみたす基数である．$\mathcal{A}$ を $\mathcal{B}$ の可算部分集合とする．MA(κ) を仮定して，次のような ω の部分集合 d があることを示しなさい：$\forall x \in \mathcal{A}(|d \cap x| < \omega)$ かつ $\forall x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}(|x \setminus d| < \omega)$．［コメント］MA($\omega$) とそこから導かれるこの問題の $|\mathcal{B}| = \omega$ の場合は ZFC で証明できる定理です．もっとも，$|\mathcal{B}| = \omega$ のときは，この結果は半順序を用いるまでもなく対角線論法によって簡単に証明できます．

[10] (ハウスドルフとルジンの結果)　演習問題 9 の結果は $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}| = \omega_1$ の場合には成立するとは限らないことを ZFC の範囲内で示しなさい．［ヒント］$\mathcal{A} = \{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}, \mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \{b_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ となるように a_α と b_α を帰納的に作りなさい．そのとき $a_\alpha \cap b_\alpha = 0$ かつ $\alpha \ne \beta \to a_\alpha \cap b_\beta \ne 0$ となるようにしなさい．

[11] 順序数 $\omega_1 + 1$ に順序位相を与える．このとき直積空間 ${}^\omega(\omega_1 + 1)$ は，集合論の特別な公理の選び方によらず (ZFC の範囲内で)，ω_1 個のいたるところ非稠密な閉部分集合の和集合になるようなコンパクトなハウスドルフ空間の例になってい

る．このことを示しなさい．また，可分でないヒルベルト空間の単位球が弱位相のもとで同様の性質をもつ空間の例となっていることを示しなさい．［ヒント］ ${}^{\omega}(\omega_1+1)$ については $\{f:\forall n(f(n)\neq\omega_1\to f(n)\leq\alpha)\}$ を考えなさい．

[12] 直積空間 ${}^{\omega_1}[0,1]$ や ${}^{\omega_1}2$ は，集合論の特別な公理の選び方によらず，次の性質をもつ空間の例になっていることを示しなさい．すなわち，c.c.c. をもつコンパクトなハウスドルフ空間であって，そこには ω_1 個のいたるところ非稠密な閉集合の和集合でありながら第一類ではないような部分集合が存在する．［ヒント］ ${}^{\omega_1}[0,1]$ については $\{f:\exists\alpha(f(\alpha)=0)\}$ を考えてみなさい．c.c.c. により，稠密な開集合は基本開集合の可算和であるような稠密な開部分集合を含むことを確認しなさい．

[13] 定理 2.20 は $\mathbb{R}$ を任意の可分距離空間に置き換えても正しいことを示しなさい．

[14] 次のものが，集合論の特別な公理の選び方によらず，ω_1 個のいたるところ非稠密な閉集合の和になるような完備距離空間の例になっていることを示しなさい．

(a) 不可算な離散空間 D の直積 ${}^{\omega}D$.
(b) 任意の可分でないヒルベルト空間.

[15] 半順序 $\langle\mathbb{P},\leq\rangle$ は，$\leq$ が狭義の順序づけであり，$p\not\leq q$ のときには必ず $r\leq p$ かつ $r\perp q$ となる r があるときに**分離的**であるという．$\mathbb{P}$ が分離的であるための必要十分条件は，補題 3.3 の写像 i が 1 対 1 で

$$\forall p,q\in\mathbb{P}(p\leq q\leftrightarrow i(p)\leq i(q))$$

をみたすことである．このことを示しなさい．

[16] 第 2 節の例 5 と例 6 の半順序は分離的であり，定理 2.21 の証明に用いられた半順序は分離的ではない．これらのことを示しなさい．定義 2.7 や定理 2.22 の順序が分離的になるのはどんな場合だろうか．

[17] 補題 3.3 の写像 i が 1 対 1 となるような，分離的でない半順序 $\mathbb{P}$ の例をあげなさい．

[18] 補題 3.3 の $\mathcal{B}$ と i の一意性を証明しなさい．つまり，$\mathcal{B}_1$ と i_1, $\mathcal{B}_2$ と i_2 がともに補題 3.3 の条件をみたすならば，$\mathcal{B}_1$ から $\mathcal{B}_2$ への同型写像 h が存在して $h\circ i_1=i_2$ となる．

[19] $\mathcal{B}$ の要素を形式的上限をあらわすものと考えることにより，補題 3.3 の代数

的な証明を与えなさい．つまり，集合としては $\mathcal{B}=\mathcal{P}(\mathbb{P})/\sim$ で，ここで $\sim$ という関係は $\bigvee S$ と $\bigvee T$ とが "等しくなければおかしい" ときに $S\sim T$ とすることにより決まる関係である．また，このとき $[S]\leq[T]$ とは $\forall p\in S\neg\exists q\leq p\forall r\in T(q\perp r)$ とする．

[20] X を任意の集合，Y を可算集合とする．$\mathbb{P}$ を，$|p|<\omega, \mathrm{dom}(p)\subset X, \mathrm{ran}(p)\subset Y$ をみたす関数 p の全体とし，$p\leq q$ とは $q\subset p$ のことだとして順序づけする．このとき $\mathbb{P}$ は c.c.c. をもつことを証明しなさい．［ヒント］Δ-システム補題 (定理 1.5) を用いなさい．

[21] 演習問題 20 において，$X=\kappa\times\omega$, $Y=2$ としよう．$\mathbb{P}$ の κ 個の稠密部分集合からなる族 $\mathcal{D}$ で次の性質をもつものを見つけなさい：$\mathcal{D}$ のすべての元と交わるフィルター G について，$\bigcup G$ は $\kappa\times\omega$ から 2 への関数であって，

$$(\bigcup G)_\alpha(n)=(\bigcup G)(\alpha,n)$$

によって定義される $(\bigcup G)_\alpha$ はすべて互いに相異なる．

[22] $a,b\subset\omega$ のとき，$|a\setminus b|<\omega$ かつ $|b\setminus a|=\omega$ のことを，$a\subset^* b$ とあらわす．$\mathrm{MA}(\kappa)$ を仮定し，$\langle X,<\rangle$ は全順序で，$|X|\leq\kappa$ となるものとする．このとき，X の各元 x に対して ω の部分集合 a_x を $x<y\rightarrow a_x\subset^* a_y$ をみたすように対応づけられることを示しなさい．［ヒント］$\mathbb{P}$ を次のような対 $\langle p,n\rangle$ の全体とする．$n\in\omega$ であり，$\mathrm{dom}(p)$ は X の有限部分集合であって，$\mathrm{dom}(p)$ の各元 x について $p(x)\subset n$ である．$\langle p,n\rangle\leq\langle q,m\rangle$ とは，$m\leq n, \mathrm{dom}(q)\subset\mathrm{dom}(p), \forall x\in\mathrm{dom}(q)(p(x)\cap m=q(x))$ かつ

$$\forall x,y\in\mathrm{dom}(q)(x<y\rightarrow(p(x)\setminus q(x))\subset m)$$

ということだとする．Δ-システム補題を用いて $\mathbb{P}$ が c.c.c. をもつことを証明しなさい．

[23] ブール代数 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ を $\mathcal{B}$ であらわそう．ただし fin とは，有限集合全体のなすイデアルである．$\mathrm{MA}(\kappa)$ を仮定し，濃度が κ のブール代数 $\mathcal{A}$ を考える．このとき，$\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ のある部分代数と同型であることを示しなさい．これは演習問題 22 の一つの拡張になっている．

***[24]** (ハウスドルフの結果)　$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ の (ω_1,ω_1^*) ギャップがあることを示しなさい．すなわち，$\alpha<\omega_1$ なる順序数 α に対応する $\mathcal{P}(\omega)$ の元 a_α と b_α で，$a_\alpha\subset^*$

b_α, $\alpha<\beta\to(a_\alpha\subset^* a_\beta\wedge b_\beta\subset^* b_\alpha)$ かつ $\neg\exists c\forall\alpha(a_\alpha\subset^* c\subset^* b_\alpha)$ をみたすものを見つけなさい．［ヒント］各 α と n について，$|\{\xi<\alpha:(a_\alpha\setminus b_\xi)\subset n\}|<\omega$ となるように帰納法によって a_α と b_α を選びなさい．

[25] MA(κ) を仮定する．$\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}$ のルベーグ可測部分集合の族で $|\mathcal{A}|=\kappa$ となるものとする．このとき，$\bigcup\mathcal{A}$ がルベーグ可測であり，ある可算部分族 $\mathcal{B}$ について $\mu(\bigcup\mathcal{A})=\mu(\bigcup\mathcal{B})$ となることを示しなさい．

[26] 半順序 $\mathbb{P}$ が基数 ω_1 を**準内径**とするとは次のことを意味する：ω_1 未満のすべての順序数 α に $\mathbb{P}$ の要素 p_α が対応しているとき，$\{p_\alpha:\alpha\in X\}$ が有限交叉性をもつような ω_1 の不可算部分集合 X が存在する (つまり X の任意の有限部分集合 s について $\exists q\forall\alpha\in s(q\le p_\alpha)$ が成立する)．MA(ω_1) から，c.c.c. をもつすべての $\mathbb{P}$ が ω_1 を準内径とすることが導かれる．これを示しなさい．［コメント］これは補題 2.23 によく似ています．

[27] MA(ω_1) を仮定する．ω_1 未満のすべての順序数 α に $\mathbb{R}$ のルベーグ可測部分集合 A_α が対応していて，しかも $\mu(A_\alpha)>0$ となっているとする．このとき ω_1 のある不可算部分集合 X について $\mu\left(\bigcap_{\alpha\in X}A_\alpha\right)>0$ となることを示しなさい．［ヒント］$\forall\alpha(\mu(A_\alpha)>\varepsilon)$ であるとして

$$\mathbb{P}=\left\{s\subset\omega_1:|s|<\omega\wedge\mu\left(\bigcap_{\alpha\in s}A_\alpha\right)>\varepsilon\right\}$$

とおきなさい．この $\mathbb{P}$ が c.c.c. をもつことを示し，集合 $\{\{\alpha\}:\alpha<\omega_1\}$ に演習問題 26 の結果を適用しなさい．

[28] (カントールの結果)　$\langle D,<\rangle$ を，可算な全順序で，最初の要素も最後の要素もなく，しかも

$$\forall x,y(x<y\to\exists z(x<z<y))$$

をみたすという意味で自己稠密なものとする．このとき $\langle D,<\rangle$ が有理数の順序 $\langle\mathbb{Q},<\rangle$ と同型になることを示しなさい．［ヒント］D と $\mathbb{Q}$ をいずれも型 ω に整列させ，同型写像を帰納的に構成しなさい．

[29] $\langle X,<\rangle$ を次の条件をみたす全順序とする．

(a) X には最初の要素も最後の要素もない．

(b) X は順序位相のもとで連結である．

(c) X は順序位相のもとで可分である．

このとき $\langle X,<\rangle$ が実数の順序 $\langle \mathbb{R},<\rangle$ と同型になることを示しなさい． [ヒント] X の可算稠密部分集合 D をとって演習問題 28 を適用し，条件 (b) を使って同型写像を拡張しなさい．

[30] ススリン線 (定義 4.1) が存在すると仮定するとき，演習問題 29 の条件 (a) と (b) をみたすススリン線 $\langle X,<\rangle$ も存在することを示しなさい． [ヒント] 定理 4.4 の結果から出発して，最初と最後の要素があればそれを取り除き，デデキントの方法で完備化を考えなさい．

***[31]** $\langle X,<\rangle$ を順序位相の意味で c.c.c. をもつ全順序とするとき，X には濃度が ω_1 以下の稠密部分集合があることを示しなさい．

[32] 型 ω_1 の上昇列も下降列ももたないが，順序位相の意味で可分などんな部分空間もいたるところ非稠密となるような全順序が存在することを示しなさい． [ヒント] アロンシャイン木を用いてアロンシャイン線を構成しなさい．

[33] κ が特異基数ならば κ-ススリン木は存在する．このことを示しなさい． [ヒント] 互いに交わりのない整列順序の和集合を考えてみなさい．

[34] κ を正則基数とし，κ-ススリン木 (または κ-クレパ木，κ-アロンシャイン木) が存在すると仮定して，そのような木で ${}^{<\kappa}2$ の部分木になっているようなものがあることを示しなさい．

[35] T と T' が κ-木であるとき，$T\times T'$ とは α 番目の水準が $\mathrm{Lev}_\alpha(T)\times\mathrm{Lev}_\alpha(T')$ で与えられ，$x<y$ かつ $x'<y'$ のときに $\langle x,x'\rangle<\langle y,y'\rangle$ と順序づけることによって得られる，木としての直積をあらわすとする．T と T' が κ-アロンシャイン木のとき，$T\times T'$ もそうなることを示しなさい．

[36] T がススリン木のとき $T\times T$ はススリン木でないことを示しなさい．

[37] $\kappa=\lambda^+$ で，λ は $2^{<\lambda}=\lambda$ をみたす正則基数であるとする．このとき κ-アロンシャイン木が存在することを示しなさい． [ヒント] 定理 5.9 の証明の ω を λ で置き換え，$\mathrm{ran}(s_\alpha)$ が λ の定常部分集合であるという条件で考えなさい．

[38] κ は正則基数，T は κ-アロンシャイン木とし，$\lambda<\kappa,\ x\in T,\ |\{y\in T : y>x\}|=\kappa$ となるような λ と x を考える．このとき

$$\exists\alpha > \mathrm{ht}(x,T)(|\{y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) : y > x\}| \geq \lambda)$$

を示しなさい．［ヒント］もしも λ が正則基数で，どの $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ も濃度が λ 未満，しかも T はうまく刈り込まれた木だとすると，$\mathrm{cf}(\alpha)=\lambda$ となる α には T が $q(\alpha)$ と α の間の水準では分岐しないような，α より小さい順序数 $q(\alpha)$ が対応づけられるはず．これと押し下げ補題から矛盾が導かれる．

[39] $\{s \in {}^{<\omega_1}\omega : s$ は 1 対 1 関数$\}$ の部分木として得られるアロンシャイン木はススリン木にならないことを示しなさい．［ヒント］自然数 n に対し $\{s \in T : \exists\alpha(\mathrm{dom}(s)=\alpha+1 \wedge s(\alpha)=n)\}$ は反鎖になります．

[40] ω_1-アロンシャイン木が ω 個の反鎖の和集合になるとき，それを**特殊アロンシャイン木**という．アロンシャイン木 T が特殊であるためには，$x, y \in T, x<y \to f(x)<f(y)$ をみたすような写像 $f : T \to \mathbb{Q}$ があることが必要十分であることを示しなさい．特殊アロンシャイン木が実際に存在することを示しなさい．［ヒント］T と f を一緒に，帰納法を用いて構成しなさい．［コメント］$\diamondsuit$ から $\{s \in {}^{<\omega_1}\omega : s$ は 1 対 1 関数$\}$ の部分木で特殊でないアロンシャイン木になるものがあることが導かれます ([Baumgartner 1970] を参照)．特殊アロンシャイン木はススリン木にはなりません．

***[41]** (バウムガルトナーの結果)　$\mathrm{MA}+\neg\mathrm{CH}$ は，すべての ω_1-アロンシャイン木が特殊であることを導く．このことを示しなさい．［ヒント］$\mathbb{P}$ として，T から $\mathbb{Q}$ への順序を保つ有限部分関数の全体からなる集合をとる．

[42] ω_1 に順序位相を与え，$f : \omega_1 \to \mathbb{R}$ を連続関数とすると，

$$\exists\alpha < \omega_1 \forall\beta > \alpha(f(\beta) = f(\alpha))$$

となることを示しなさい．［ヒント］正の数 ε が与えられたとしなさい．すべての極限順序数 α に対して，区間 $(g(\alpha), \alpha]$ 上での f の値の変化の幅が ε 未満になるような，α より小さな順序数 $g(\alpha)$ がとれます．この状況に押し下げ補題 (補題 6.15) を適用しなさい．

[43] $\kappa=\mathrm{cf}(\mu)>\omega$ のとき，二つのブール代数 $\mathcal{P}(\kappa)/\mathrm{Cub}^*(\kappa)$ と $\mathcal{P}(\mu)/\mathrm{Cub}^*(\mu)$ とが同型になることを示しなさい．［ヒント］μ の c.u.b. 部分集合 C で $\mathrm{type}(C)=\kappa$ となるものがあります．

[44] (ヘリンクの結果)　κ を不可算な正則基数とし，ブール代数 $\mathcal{P}(\kappa)/\mathrm{Cub}^*(\kappa)$

を $\mathcal{B}$ と書くことにする．κ の部分集合 A に対し，$\mathcal{B}$ に属する A の同値類を $[A]$ と書くことにする．κ 未満のすべての順序数 α に対して κ の部分集合 A_α が与えられたとき，下限 $\bigwedge_{\alpha<\kappa}[A_\alpha]$ は存在し，それは次の集合 D (A_α の対角共通部分) に対する $[D]$ と一致する：

$$D=\{\alpha<\kappa:\forall\beta<\alpha(\alpha\in A_\beta)\}.$$

このことを示しなさい．

[45] κ を不可算な正則基数とする．κ 未満のすべての順序数 α に対して κ の定常部分集合 S_α を対応させて，$\alpha<\beta\to S_\beta\subset S_\alpha$ としたうえ，これら S_α の対角共通部分が $\{0\}$ になるようにしなさい． [ヒント] 演習問題 44 を参照． [コメント] 補題 6.14 によると，S_α は c.u.b. ではありえません．

[46] (へリンクの結果)　κ を不可算な正則基数とし，$\mathcal{I}=\{X\subset\kappa:|X|<\kappa\}$ とする．このとき二つのブール代数 $\mathcal{P}(\kappa)/\mathcal{I}$ と $\mathcal{P}(\kappa)/\mathrm{Cub}^*(\kappa)$ が同型でないことを示しなさい． [ヒント] 演習問題 44 を参照．

[47] A は無限基数の集合で，どんな正則基数 λ に対しても $A\cap\lambda$ は λ において定常とはならないとする．このとき A 上で定義された 1 対 1 関数 g で，$\forall\alpha\in A(g(\alpha)<\alpha)$ をみたすものがあることを示しなさい．

[48] 基数 κ はそれが強到達不能であって集合 $\{\alpha<\kappa:\alpha$ は正則基数$\}$ が κ において定常であるときに，**強マーロ基数**と呼ばれる．そのような基数 κ について，$\{\alpha<\kappa:\alpha$ は強到達不能基数$\}$ が κ において定常であることを示しなさい．

[49] κ は強到達不能基数で κ-アロンシャイン木が存在しないようなものだとする (そのような κ は**弱コンパクト基数**と呼ばれる)．このとき κ のどんな定常部分集合 S に対しても，κ より小さい正則基数 λ で $S\cap\lambda$ が λ において定常になるようなものがある．これを示しなさい． [ヒント] 仮にそうでなかったとして演習問題 47 を適用すれば，(木の) 道が S 上定義され $\forall\alpha\in S(g(\alpha)<\alpha)$ をみたすような 1 対 1 関数 g に対応する κ-木 T を見つけることができます．

[50] 基数 κ が強超マーロ基数であるということを，それが強マーロ基数であって，しかも集合 $\{\alpha<\kappa:\alpha$ は強マーロ基数$\}$ が κ において定常であるということだとしよう．超々マーロ基数といったものも，同様に定義されるとしよう．κ がもしも弱コンパクト基数であれば，κ は強マーロ基数であり，強超マーロ基数であり，超々

マーロ基数であり，等々となる．このことを示しなさい． [ヒント] 演習問題 49 を使いなさい． [コメント] こういった基数についてより詳しくは [Kunen 1977] を参照しなさい．

[51] 次の四つの言明が同値であることを示しなさい．

(1) $\diamondsuit$.

(2) ω_1 未満のすべての順序数 α に $\alpha\times\alpha$ の部分集合 A_α を対応させて，$\omega_1\times\omega_1$ のすべての部分集合 A について $\{\alpha<\omega_1 : A\cap\alpha\times\alpha=A_\alpha\}$ が定常集合となるようにできる．

(3) ω_1 未満のすべての順序数 α に関数 $f_\alpha:\alpha\to\alpha$ を対応させて，ω_1 から ω_1 へのすべての関数 f について

$$\exists\alpha(f\restriction\alpha=f_\alpha) \tag{$*$}$$

となるようにできる．

(4) (3) の条件 $(*)$ を $\{\alpha<\omega_1 : f\restriction\alpha=f_\alpha\}$ が定常集合になるという条件に変えたもの．

[52] κ を不可算な正則基数とする．$\diamondsuit_\kappa$ とは，κ 未満のすべての順序数 α にその部分集合 A_α を対応させて $\forall A\subset\kappa(\{\alpha<\kappa : A\cap\alpha=A_\alpha\}$ は定常集合) が成立するようにできる，という言明だとする．$\diamondsuit_\kappa$ から，$2^{<\kappa}=\kappa$ ということと κ の 2^κ 個の部分集合からなるほとんど交わりのない集合族の存在が導かれることを示しなさい． [コメント] $\diamondsuit_\kappa$ は $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ から導かれます (第 VI 章演習問題 13)．

[53] κ を不可算な正則基数とするとき，$\diamondsuit_\kappa$ が次の言明と同値になることを示しなさい：κ 未満のすべての順序数 α に $\mathcal{P}(\alpha)$ の部分集合 $\mathcal{A}_\alpha$ を対応させて，$|\mathcal{A}_\alpha|\leq\alpha$ かつ κ のすべての部分集合 A に対して $\{\alpha<\kappa : A\cap\alpha\in\mathcal{A}_\alpha\}$ が定常集合となるようにできる．

[54] $\diamondsuit$ から $T\times T'$ がススリン木であるような ω_1-ススリン木 T と T' の存在が導かれることを示しなさい．

[55] $\diamondsuit$ を次のように変えたものは成立しないことを示しなさい：ω_1 未満のすべての順序数 α にその部分集合 A_α が対応し，ω_1 のすべての定常部分集合 A に対して $\exists\alpha\in A(A\cap\alpha=A_\alpha)$ となる．

[56] 以下の言明を $S(\kappa,\lambda,\mathcal{I})$ と略記することにしよう：κ は不可算基数，$\mathcal{I}$ はす

べての単元集合を含む κ 上の κ-完備なイデアルで **λ-飽和**であるもの，つまり $X_\alpha \notin \mathcal{I}$ だが $\alpha \neq \beta \rightarrow X_\alpha \cap X_\beta \in \mathcal{I}$ となるような κ の部分集合の族 $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ が存在しないようなもの，である．このとき次のことを証明しなさい．

(a) $\exists\lambda\exists\mathcal{I} S(\kappa,\lambda,\mathcal{I}) \rightarrow \kappa$ は正則基数である．

(b) $S(\kappa,\lambda,\mathcal{I}) \wedge \lambda < \lambda' \rightarrow S(\kappa,\lambda',\mathcal{I})$.

(c) $\exists\mathcal{I} S(\kappa,\kappa,\mathcal{I}) \rightarrow \kappa$ は弱到達不能基数である．

[57] $\lambda \leq \kappa$ のとき $S(\kappa,\lambda,\mathcal{I})$ は一見これより弱そうな次の言明と同値になることを示しなさい．κ は不可算基数，$\mathcal{I}$ はすべての単元集合を含む κ 上の κ-完備なイデアルで，$X_\alpha \notin \mathcal{I}$ だが $\alpha \neq \beta \rightarrow X_\alpha \cap X_\beta = 0$ となるような κ の部分集合の族 $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ は存在しない．

[58] κ は不可算な正則基数で，κ^+ 個の定常部分集合からなるほとんど交わりのない集合族をもたないとする．このとき $S(\kappa,\kappa^+,\mathrm{Cub}^*(\kappa))$ を示しなさい． **[ヒント]** 補題 6.14 を用いなさい． **[コメント]** このような基数 κ の存在が矛盾を導かないかどうかはわかっていません．

訳注： この本 (原書) の出版後，ω_1 よりも大きな基数 κ については決して $S(\kappa,\kappa^+,\mathrm{Cub}^*(\kappa))$ とならないことが示されました．いっぽう，ある条件をみたす基数が存在すれば，$S(\omega_1,\omega_2,\mathrm{Cub}^*(\omega_1))$ の成立する集合論のモデルを強制法によって構成できることもわかっています．このテーマの概要を述べた日本語の文献として [松原 1999] があります．

[59] $\exists\lambda < \kappa\exists\mathcal{I} S(\kappa,\lambda,\mathcal{I})$ を仮定して，κ-アロンシャイン木が存在しないことを示しなさい． **[ヒント]** 木 T 上にイデアル $\mathcal{I}$ があったとして，演習問題 38 と相容れないような部分木 T' を見つけなさい． **[コメント]** $\exists\mathcal{I} S(\kappa,\kappa,\mathcal{I})$ と κ-ススリン木の存在とは矛盾しません．[Kunen 1978] を参照してください．

[60] κ が **(二値) 可測**であるとは，ある $\mathcal{I}$ について $S(\kappa,2,\mathcal{I})$ が成立することをいう．このとき $\mathcal{I}$ は素イデアル，$\mathcal{I}^*$ は超フィルターである．κ が可測基数であれば，κ は強到達不能であることを示しなさい． **[ヒント]** $\lambda < \kappa$ とし，κ 未満のすべての順序数 α に ${}^\lambda 2$ の互いに異なる要素 f_α が対応しているとき，関数 $g:\lambda \rightarrow 2$ を λ 未満のすべての順序数 ξ について

$$\{\alpha : f_\alpha(\xi) = g(\xi)\} \in \mathcal{I}^*$$

となるものとして定めなさい． **[コメント]** $\exists\mathcal{I} S(\kappa,\omega_1,\mathcal{I})$ と $\kappa = 2^\omega$ あるいは $\kappa < 2^\omega$ とは矛盾しません．第 VII 章演習問題 H24 を見てください．

[61]　$\exists \mathcal{I} S(\kappa,\omega,\mathcal{I})$ から $\exists \mathcal{I} S(\kappa,2,\mathcal{I})$ が導かれることを示しなさい．［ヒント］ $S(\kappa,\omega,\mathcal{I})$ を仮定して**アトム**を見つけなさい．アトムとは，κ の部分集合 A で $A \notin \mathcal{I}$ かつ $\forall X \subset A(X \in \mathcal{I} \vee A \setminus X \in \mathcal{I})$ をみたすものです．

[62]　$\exists \mathcal{I} S(\kappa,\lambda,\mathcal{I})$ と $2^{<\lambda} < \kappa$ を仮定して $\exists \mathcal{I} S(\kappa,2,\mathcal{I})$ を示しなさい．［ヒント］演習問題 61 と同様にアトムを見つけなさい．

第 III 章

整礎集合

この章では基礎の公理を扱います．この公理も外延性公理と同じように，われわれの言及の範囲を，現にその上で数学が展開されるような集合たちに制限する意味をもっています．

§1　はじめに

集合についての疑問の中には，数学にとっては的はずれなものがいくつかあります．

的はずれな第一の問い：集合ではないものがなにかあるでしょうか? イヌもいればネコもいるこの「現実の世界」になら，集合でないものはたしかにありますが，集合論の公理はこの「現実の世界」についてはなにも述べていません．というのも，私たちは集合だけについて，特に，遺伝的な集合 (第 I 章第 4 節を見てください) だけについて語ることに決めておいたからです．それに，外延性公理は，私たちの言及の範囲にあるすべてのものは集合であるという主張を表現したものです．第 I 章第 11 節で，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ といった数学的対象も遺伝的集合としてこの言及の範囲内できちんと定義してあるので，私たちの世界をこの範囲に限定しても，数学的に意味のある対象をなにか取りこぼす心配はまったくないと考えてよさそうです．

的はずれな第二の問い：$x=\{x\}$ であるような集合 x はあるでしょうか? この疑問は物理的現実の存在とは無縁ですし，このような x が遺伝的集合であることも明らかではあります．しかし，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ といった数学的対象を構成していく過程にはこのような x は登場してきませんでした．

この章では，基礎の公理を含まない ZF^- で整礎集合のクラス **WF** を定義します．**WF** は，空集合からいろいろな集合論的操作によって作り出すことのできる集合の全体とみることができます．たとえば $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ がそのようにして作られるいっぽうで，$x=\{x\}$ であるような集合 x については $x\notin\mathbf{WF}$ となることが示されます．それから，すべての数学が **WF** の内部で展開できることを意味するいくつかの定理を証明します．こうした議論を通じて私たちは，$\mathbf{V}=\mathbf{WF}$ を主張する基礎の公理にたどりつきます．つまり，今後は **WF** だけを考察しようというのです．

第 I 章で外延性公理を採用すると言ったとき，現実のイヌやネコがいないと主張したわけではないという点は強調しておきましょう．これから考察する範囲内にはいない，と言っているだけです．同様に，基礎の公理を用いるということは，$x=\{x\}$ をみたす x がなんであれ，それが現実に存在するかどうかということについてなにか意見を述べているわけではないのです．単に，そのような x については考察することを控えようと言っているだけなのです．

§2　整礎集合の性質

ZF^- において，クラス **WF** を，空集合 0 から出発し冪集合をとる操作を反復することによって定義します．それから，**WF** がそれ以外の集合論的操作のもとで閉じていることを証明します．

定義 2.1. すべての順序数 α に対して，$R(\alpha)$ を次のように超限再帰によって定義する：

(a) $R(0)=0$,

(b) $R(\alpha+1)=\mathcal{P}(R(\alpha))$,

(c) α が極限順序数のときは $R(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta)$.　□

定義 2.2. $\mathbf{WF}=\bigcup\{R(\alpha):\alpha\in\mathbf{ON}\}$.　□

すなわち，**整礎集合**とはある $R(\alpha)$ に属する集合のこと，と定義されます．

補題 2.3. すべての順序数 α について

(a) $R(\alpha)$ は推移的である．

(b) $\forall\xi\leq\alpha(R(\xi)\subset R(\alpha))$.

【証明】 α に関する超限帰納法による．つまり，α より小さなすべての順序数 β について補題が成立するものと仮定して，同じ補題の α の場合を導く．

第 1 の場合：$\alpha=0$. なにも言うべきことはない．

第 2 の場合：α は極限順序数．(b) は定義からすぐわかる．(a) は推移的集合の和がまた推移的集合であるという事実から導かれる．

第 3 の場合：$\alpha=\beta+1$. $R(\beta)$ は推移的集合なので，$\mathcal{P}(R(\beta))$ すなわち $R(\alpha)$ も推移的で $R(\beta)\subset R(\alpha)$ となる．このことから α についての (a) と (b) が得られる．□

このように，$R(\alpha)$ は α とともに増大していきます．

WF に属する集合 x について $x\in R(\alpha)$ をみたす最小の順序数 α は，定義 2.1 の (c) により後続型順序数でなければなりません．

定義 2.4. **WF** に属する集合 x の**階数** $\mathrm{rank}(x)$ とは，$x\in R(\beta+1)$ となるような最小の順序数 β のことである．□

そこで，$\beta=\mathrm{rank}(x)$ であれば $x\subset R(\beta), x\notin R(\beta)$ であり，また β より大きなすべての順序数 α について $x\in R(\alpha)$ となります．

補題 2.5. 任意の順序数 α について $R(\alpha)=\{x\in\mathbf{WF}:\mathrm{rank}(x)<\alpha\}$ である．

【証明】 $x\in\mathbf{WF}$ のとき $\mathrm{rank}(x)<\alpha$ とは $\exists\beta<\alpha(x\in R(\beta+1))$ ということで，これは $x\in R(\alpha)$ と同値になる．□

階数の計算には次の補題が役立つでしょう．

補題 2.6. $y\in\mathbf{WF}$ のとき，

(a) $\forall x\in y(x\in\mathbf{WF}\wedge\mathrm{rank}(x)<\mathrm{rank}(y))$ であり，また

(b) $\mathrm{rank}(y)=\sup\{\mathrm{rank}(x)+1:x\in y\}$ である．

【証明】 (a) $\alpha=\mathrm{rank}(y)$ とすると，$y\in R(\alpha+1)=\mathcal{P}(R(\alpha))$. もしも $x\in y$ なら $y\subset R(\alpha)$ より $x\in R(\alpha)$ となり，補題 2.5 により $\mathrm{rank}(x)<\alpha$ となる．

(b) $\alpha=\sup\{\mathrm{rank}(x)+1:x\in y\}$ とすると，(a) より $\alpha\leq\mathrm{rank}(y)$ である．また y に属する集合の階数はどれも α 未満となるから $y\subset R(\alpha)$ である．このことから $y\in R(\alpha+1)$, したがって $\mathrm{rank}(y)\leq\alpha$ となる．□

補題 2.6 (a) は，**WF** が推移的クラスであることと，**WF** に属する集合が自分

より階数の低い整礎集合によって超限再帰的に「構成」されたものであると言っています．このことにより，自分自身を要素として作られるような集合は **WF** から排除されます．もう少しきちんといえば，**WF** に属する集合 x については $x \in x$ は成立しません．さもないと，$\text{rank}(x) < \text{rank}(x)$ が成立してしまうことになりますから．同様にして，$x \in y \wedge y \in x$ のような循環も **WF** からは排除されています．なぜならこのことからは $\text{rank}(x) < \text{rank}(y) < \text{rank}(x)$ ということが出てきてしまうからです．

順序数はすべて **WF** に属し，階数はその順序数自身です．

補題 2.7.

(a) $\forall \alpha \in \mathbf{ON}(\alpha \in \mathbf{WF} \wedge \text{rank}(\alpha) = \alpha)$.

(b) $\forall \alpha \in \mathbf{ON}(R(\alpha) \cap \mathbf{ON} = \alpha)$.

【証明】 (a) を α に関する超限帰納法によって証明するために，α 未満のすべての順序数 β について (a) が成立するものと仮定しなさい．このとき $\beta \in R(\beta+1) \subset R(\alpha)$ なので $\alpha \subset R(\alpha)$, したがって $\alpha \in R(\alpha+1)$ となる．補題 2.6 の (a) により $\text{rank}(\alpha) = \sup\{\beta+1 : \beta < \alpha\}$ である．こうして (a) は α についても成立する．

(b) は (a) と補題 2.5 からすぐにわかる．□

WF はすべての順序数を含むばかりでなく，標準的な数学的構成法で得られるその他の集合をすべて含みます．というのも，**WF** がこうした構成法のもとで閉じているからです．

補題 2.8.

(a) $x \in \mathbf{WF}$ であれば，$\bigcup x$, $\mathcal{P}(x)$, $\{x\}$ はいずれも **WF** に属し，これらの集合の階数は $\text{rank}(x) + \omega$ 未満である．

(b) $x, y \in \mathbf{WF}$ であれば，$x \times y, x \cup y, \{x, y\}, \langle x, y \rangle, {}^{y}x$ はいずれも **WF** に属し，これらの集合の階数は $\max(\text{rank}(x), \text{rank}(y)) + \omega$ 未満である．

【証明】 (a) について．$\alpha = \text{rank}(x)$ とおく．すると $x \subset R(\alpha)$ であるから $\mathcal{P}(x) \subset \mathcal{P}(R(\alpha)) = R(\alpha+1)$．したがって $\mathcal{P}(x) \in R(\alpha+2)$．同様にして $\{x\} \in R(\alpha+2)$, $\bigcup x \in R(\alpha+1)$ となる．

(b) について．$\alpha = \max(\text{rank}(x), \text{rank}(y))$ とおく．(a) と同様にして $\{x, y\} \in R(\alpha+2)$, $\langle x, y \rangle \in R(\alpha+3)$ となることを示しなさい．$x \cup y$ の要素の順序対はどれも

$R(\alpha+2)$ に属するので ${}^yx \subset R(\alpha+3)$. したがって ${}^yx \in R(\alpha+4)$ となる. あとの詳細は読者におまかせする. □

x と y の階数からこれらの集合論的構成物の階数を正確に計算することが可能です. 演習問題 4 を見てください.

補題 2.9. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はいずれも $R(\omega+\omega)$ に属する.

【証明】 補題 2.8 と, これらの集合の定義 (第 I 章第 11 節) による. □

補題 2.10. $\forall x(x \subset \mathbf{WF} \leftrightarrow x \in \mathbf{WF})$.

【証明】 $x \in \mathbf{WF} \rightarrow x \subset \mathbf{WF}$ は $\mathbf{WF}$ が推移的であるということ (補題 2.6 (a)) のいいかえにすぎない. 逆にもしも $x \subset \mathbf{WF}$ だったら, $\alpha = \sup\{\mathrm{rank}(y)+1 : y \in x\}$ とおいて $x \subset R(\alpha)$, したがって $x \in R(\alpha+1)$ となる. □

補題 2.8 に述べられたような演算に関して $\mathbf{WF}$ が閉じているという属性を, 補題 2.10 から導き出してくることも可能です. しかし補題 2.10 自身のほうがはるかに強力です. 極限順序数 γ に対応する $R(\gamma)$ はどれも補題 2.8 の属性をもちますが, 補題 2.10 をみたすクラスは必ず $\mathbf{WF}$ 全体を含むことになります. 演習問題 3 を見てください.

次に $R(\alpha)$ の大きさをみてみましょう.

補題 2.11. $\forall n \in \omega(|R(n)| < \omega)$.

【証明】 n に関する帰納法を用いなさい. □

補題 2.12. $|R(\omega)| = \omega$.

【証明】 $\omega \subset R(\omega)$ であるからあとは $R(\omega)$ が可算集合であることを示せばよい. 選択公理 AC のもとでは, これは補題 2.11 からすぐに出てくる. AC を避けるには, 補題 2.11 の証明において $R(n)$ の整列順序を n に関する帰納法によって明示的に定義できることに注意すればよい. たとえば, $R(n)$ の整列順序が与えられたとして, $R(n+1)$ を ${}^{R(n)}2$ と同一視したうえで辞書式に順序づけしなさい. □

演習問題 5 において, ω と $R(\omega)$ の間にとても簡単な 1 対 1 写像が与えられます.

$R(\alpha)$ の濃度は, $|R(\omega)| = \omega$, $|R(\omega+1)| = 2^{\omega}$, $|R(\omega+2)| = 2^{2^{\omega}}$ という具合に指数的に増大していきます. 一般に, 次のことが成立します.

補題 2.13. (AC)　$|R(\omega+\alpha)|=\beth_\alpha$.

【証明】α に関する帰納法. □

この節を終わるにあたって，常識的な数学はすべて **WF** 内で実行できることを示す一つの事例をあげておきましょう.

補題 2.14. (AC)

(a) どんな群も，**WF** に属する群と同型である.

(b) どんな位相空間も，**WF** に属する位相空間と同相である.

【証明】正式には，群は集合と演算の対 $\langle G,\cdot\rangle$ である．ここで $\cdot : G\times G\to G$ であるから，補題 2.8 と補題 2.10 により

$$\langle G,\cdot\rangle\in\mathbf{WF}\leftrightarrow G\in\mathbf{WF}\leftrightarrow G\subset\mathbf{WF}$$

となる．そこで，$\langle G,\cdot\rangle$ を任意の群として $\alpha=|G|$ とおき，f を α から G の上への 1 対 1 写像として，α 上に演算 $\circ$ を $\xi\circ\eta=f^{-1}(f(\xi)\cdot f(\eta))$ によって定義しよう．このとき $\langle\alpha,\circ\rangle$ は $\langle G,\cdot\rangle$ と同型になる．(b) については読者におまかせする. □

補題 2.14 は AC がなければ証明できません (第 IV 章演習問題 25).

$\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ のような具体的な数学的対象が (補題 2.9 により) **WF** に属するとともに，群や位相空間のようなさまざまな抽象的対象のそっくりそのままのコピーが **WF** の要素として含まれていることが，このようにしてわかります.

§3　整礎的関係

整礎的関係は整列順序の概念を一般化したもので，これからの作業において基本的で重要な役割をもつものです.

WF の定義には冪集合の公理を本質的に用いましたが，この節の結果の多くは $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$ の枠内で得られるものです．第 IV 章ではこれらの結果を冪集合の公理が成立しない，あるいは成立するかどうか未確認であるような解釈のもとで応用することになりますから，これらの結果が冪集合の公理を必要としないことを知っていると役に立ちます．そこで，この章ではこの先それぞれの定理がどのような公理を前提としているのかをきちんと明示することにします．しかしながら，後の応用に影響しない範囲で少し手抜きをして，本当は $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$ で証明できるものにつ

いて ZF$^-$ と表示している場合もあります (演習問題 8 を見てください).

定義 3.1. (ZF$^-$ − P)　二項関係 R が集合 A 上で**整礎的**であるとは,

$$\forall X \subset A[X \neq 0 \to \exists y \in X(\neg \exists z \in X(zRy))] \tag{1}$$

ということである. 式 (1) にいうような性質をもつ要素 y のことを, X のうちで R-**極小**であるという. □

つまり, R が A 上で整礎的であるとは, 空でない部分集合がどれも R-極小要素をもつということです. 特に, R が A を全順序づけする場合は, R が A 上で整礎的であることと R が A を整列順序づけすることが同値になります. 第 I 章第 6 節でもそうでしたが, ここでも $R \subset A \times A$ とは限っていないので, もしも R が A 上整礎的で $B \subset A$ なら R は B 上整礎的でもあります.

R が A を全順序づけしていないときは, 定義 3.1 の X は二つ以上の R-極小要素をもつことがありえます. たとえば, 空な二項関係 0 はどんな集合 A の上でも整礎的で, X のどの要素 y も X のうちで 0-極小ということになります.

整礎的関係と整礎集合にどんな関連があるのかという点について, はじめに次の補題から見ていきましょう.

補題 3.2. (ZF$^-$)　A が $\mathbf{WF}$ に属する集合なら所属関係 $\in$ は A 上で整礎的である.

【証明】X が A の空でない部分集合だったとしなさい. $\alpha = \min\{\mathrm{rank}(y) : y \in X\}$ とおき, $\mathrm{rank}(y) = \alpha$ をみたす X の要素 y をとりなさい. すると, 補題 2.6 (a) により y は X の $\in$-極小元である. □

補題 3.2 の逆は正しいとは限りません. たとえば $x = \{y\}, y = \{x\}, x \neq y$ であれば $y \notin \mathbf{WF}$ ですが, 関係 $\in$ は y 上で整礎的な (じつは空な) 関係です. 補題 3.2 の逆が成り立つ場合として次のことがあります

補題 3.3. (ZF$^-$)　A が推移的集合で $\in$ が A 上で整礎的であれば, A は $\mathbf{WF}$ に属する.

【証明】補題 2.10 によれば, $A \subset \mathbf{WF}$ が証明できれば十分である. 仮に $A \not\subset \mathbf{WF}$ であるなら, $X = A \setminus \mathbf{WF}$ とおけばこれは空でない. そこで X の $\in$-極小要素 y をとりなさい. $z \in y$ なら $z \notin X$ であるけれども, A のほうは推移的集合なので $z \in A$ である. このとき $z \in \mathbf{WF}$ である. こうして $y \subset \mathbf{WF}$ となることがわかる. このことと補題 2.10 から $y \in \mathbf{WF}$ となり, $y \in A \setminus \mathbf{WF}$ という前提と矛盾する. □

ここで，$A \in \mathbf{WF}$ となるためには $\in$ が A の**推移閉包**の上で整礎的となることが必要かつ十分であるということを示します．推移閉包とは A を部分集合として含む推移的集合のうち最小のものです．

定義 3.4. (ZF$^-$ − P)

(a) 自然数 n に関して帰納的に $\bigcup^{0} A = A$, $\bigcup^{n+1} A = \bigcup\left(\bigcup^{n} A\right)$ と定める．

(b) $\mathrm{trcl}(A) = \bigcup\left\{\bigcup^{n} A : n \in \omega\right\}$ とする．□

つまり，$\mathrm{trcl}(A) = A \cup \bigcup A \cup \bigcup^{2} A \cup \cdots$ であり，この集合は A の要素，A の要素の要素，そのまた要素，等々を自分の要素としてもつことになります．

補題 3.5. (ZF$^-$ − P)

(a) $A \subset \mathrm{trcl}(A)$.

(b) $\mathrm{trcl}(A)$ は推移的である．

(c) $A \subset T$ かつ T が推移的集合であれば，$\mathrm{trcl}(A) \subset T$ である．

(d) A が推移的集合のときは $\mathrm{trcl}(A) = A$ である．

(e) $x \in A$ のとき $\mathrm{trcl}(x) \subset \mathrm{trcl}(A)$ である．

(f) $\mathrm{trcl}(A) = A \cup \bigcup\{\mathrm{trcl}(x) : x \in A\}$ である．

【証明】 (a) は明らか．(b) は $y \in \bigcup^{n} A \to y \subset \bigcup^{n+1} A$ となることによる．(c) は帰納法によって $\bigcup^{n} A \subset T$ を示せばよい．(d) は (a) と (c) から出てくる．(e) については $x \in A \to x \in \mathrm{trcl}(A) \to x \subset \mathrm{trcl}(A)$ なので，(c) を適用すればよい．(f) について，$T = A \cup \bigcup\{\mathrm{trcl}(x) : x \in A\}$ とおけば T は推移的であるから $\mathrm{trcl}(A) \subset T$. いっぽう，(a) と (e) によれば $T \subset \mathrm{trcl}(A)$ である．□

定理 3.6. (ZF$^-$)　任意の集合 A について次の 3 条件は同値となる．

(a) $A \in \mathbf{WF}$,

(b) $\mathrm{trcl}(A) \in \mathbf{WF}$,

(c) $\in$ は $\mathrm{trcl}(A)$ 上で整礎的である．

【証明】 (a)$\to$(b)：$\mathbf{WF}$ が $\bigcup$ のもとで閉じている (補題 2.8) ので，$A \in \mathbf{WF}$ のときは帰納法によって $\bigcup^{n} A \in \mathbf{WF}$ となる．それゆえ $\bigcup^{n} A \subset \mathbf{WF}$ であり，$\mathrm{trcl}(A) \subset$

WF となる．このことから (補題 2.10 によって) $\mathrm{trcl}(A) \in \mathbf{WF}$ が出てくる．

(b)→(c)：補題 3.2.

(c)→(a)：(c) と補題 3.3 によれば，$\mathrm{trcl}(A) \in \mathbf{WF}$ であるから，$A \subset \mathrm{trcl}(A) \subset \mathbf{WF}$ となり (ふたたび補題 2.10 によって) $A \in \mathbf{WF}$ となる．□

私たちが与えた **WF** の定義には，羃集合の公理が本質的な形で用いられていたことに注意しましょう．これと同値な条件 (c) は，$\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$ で作業しながら **WF** を使いたい場合に有用です (演習問題 8).

§4 基礎の公理

第 2 節で議論したとおり，およそどんな数学も **WF** の中で展開されるのだということに納得がいったなら，$\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ という言明を公理として採用するのが自然だということもわかるでしょう．第 1 節で指摘したところでは，これは《本当に》$\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ であると信じなければならない，ということを意味しません．ただ単に，私たちの言及の範囲を **WF** に制限しようということなのです．この解釈のもとで ZF^- の公理がすべてまた真であることを，非公式な形で見てとることは困難ではありません．その本質的な理由は，ZF^- の公理によって存在が要請される $\bigcup$ や $\mathcal{P}$ のような集合論的操作のもとで **WF** が閉じていることにあります．この点についてもっと正式には第 IV 章で論じることにして，この節ではひとまず公理 $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ を ZF^- に付け加えることから導かれる結果のいくつかを考えることで満足しておきましょう．

$\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ という言明は，それに先立ってたくさんの定義が必要で，初等的とはとても言い難いものです．正式な公理には，エレガントさのために，$\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ と同値だけれども集合論の言語で単純明快に表現できるものを採用することにします．

公理 2. 基礎の公理

$$\forall x\, (\exists y (y \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \land \neg \exists z (z \in x \land z \in y))).$$

言いかえれば，もしも $x \neq 0$ なら $\exists y \in x (x \cap y = 0)$ である，つまり，空でないすべての集合は $\in$-極小要素をもつということです．これは，整礎性の定義を真のクラスにまで拡張して言えば (第 5 節を見てください)，関係 $\in$ が $\mathbf{V}$ 上で整礎的だと言っていることになります．

定理 4.1. (ZF^-)　次の三つの言明は同値である.

(a) 基礎の公理.

(b) $\forall A$($\in$ は A 上で整礎的である).

(c) $\mathbf{V}=\mathbf{WF}$.

【証明】 (a)$\leftrightarrow$(b) は整礎の定義からすぐわかる. (b) によれば, どんな集合 A についても $\in$ が $\mathrm{trcl}(A)$ 上で整礎的であるから $A\in\mathbf{WF}$ である. したがって (b)$\rightarrow$(c). (c)$\rightarrow$(b) は補題 3.2 を適用すればわかる. □

基礎の公理は ZFC の他の公理とは次の点で異なっています. この公理を受け入れることは, **WF** の中だけを相手にするということにほかなりませんが, ふつうの数学はどのみち **WF** の中で展開されるものですから, 基礎の公理はふつうの数学に応用しようがありません. そのかわり, 基礎の公理はある種の異常な現象を排除することに役立ちます. たとえば, 第 2 節で指摘したとおり, **WF** に属する集合 x で $x\in x$ をみたすようなものは存在しないので, 基礎の公理は $\neg\exists x(x\in x)$ を導きます (基礎の公理を直接に適用して証明するなら, $\exists y\in\{x\}(y\cap\{x\}=0)$, したがって $x\cap\{x\}=0$, すなわち $x\notin x$ ということになります). 同様に, $x\in y\wedge y\in x$ をみたす集合 x と y も存在しません (集合 $\{x,y\}$ に基礎の公理を適用すればわかります).

基礎の公理は $\mathbf{V}=\mathbf{WF}=\bigcup_{\alpha} R(\alpha)$ と同値ですから, すべての集合が無を出発点として反復される過程によって産み出されていく, というイメージを与えてくれます (図 4.1).

すべての集合の上で $\in$ が整礎的であるという前提があれば, いろいろな定義が簡単になります. たとえば次のことが成立します.

定理 4.2. ($\mathrm{ZF}-\mathrm{P}$)　集合 A が順序数であるためには, A が推移的で $\in$ によって全順序づけされていることが必要かつ十分である.

【証明】 $\in$ が A を整列順序づけしていることを示すには, X を A の空でない部分集合として基礎の公理によってその $\in$-極小要素をとりだせばよい.

この事実は第 IV 章で重要になってきます.

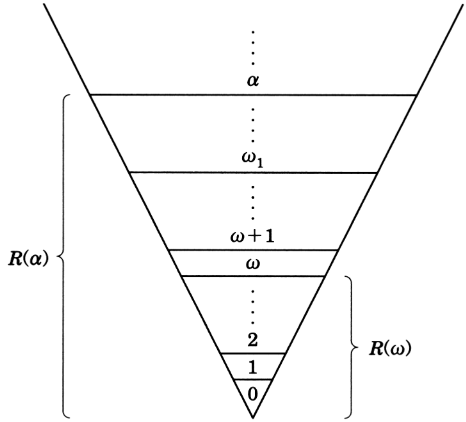


図 4.1 集合論の宇宙.

§5 整礎的関係に関する帰納と再帰

R が集合 A 上の整礎的な関係であるとき，R に関する**超限帰納法**による証明とは，A のすべての要素 x について

$$\forall y \in A(y\,R\,x \to \phi(y)) \to \phi(x) \tag{1}$$

となることをまず証明し，そのことによって $\forall x \in A\phi(x)$ を確立しよう，というものです．この結論は，集合 $\{x \in A : \neg\phi(x)\}$ に R-極小要素があれば矛盾に導かれる，ということによって正当化されます．

一例として，A が推移的集合で $\in$ が A 上で整礎的であるならば $A \in \mathbf{WF}$ であるという補題 3.3 の証明は，超限帰納法によるものとみることができます．ここでの $\phi(x)$ は《x は整礎集合である》ですから，(1) は $x \subset \mathbf{WF} \to x \in \mathbf{WF}$ と書き換えられます．

この考え方を真のクラスについてもあてはめられれば，いろいろと有用です．

定義 5.1. ($\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$) 関係 $\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ 上で整礎的であるとは

$$\forall X \subset \mathbf{A}[X \neq 0 \to \exists y \in X(\neg\exists z \in X(z\mathbf{R}y))] \tag{2}$$

となることをいう．□

これは集合上の関係の整礎性の定義 3.1 とそっくりですが，正式には，私たちの

決めたクラスの扱いかたに由来する区別があります．定義 3.1 は二つの変数 R と A を含む一つの式です．いっぽう定義 5.1 は一つの定義図式です．クラス $\mathbf{R}$ と $\mathbf{A}$ を定める式が与えられたときに，(2) はまた別のある式を略したものになるわけです (このことを第 I 章第 9 節で詳しく扱っています)．たとえば《$\in$ が $\mathbf{V}$ 上で整礎的である》は一つの文となり，これは容易にわかるとおり基礎の公理と同値です．

式 (2) の変数 X の動く範囲はクラス $\mathbf{A}$ の部分**集合**にわたることに注意してください．なにしろ，クラス全体にわたる量化はやりようがありません．超限帰納法による証明を正当化しようとする際に，このことがやっかいの種になりかねません．というのも，クラス $\{x\in\mathbf{A}:\neg\phi(x)\}$ の $\mathbf{R}$-極小要素を考えたいわけですが，このクラスは真のクラスかもしれないからです (これについては演習問題 17 を参照)．しかし幸いなことに，私たちが実際に扱う関係はもう一つ別の条件をみたしていて，それがこの問題を取り除いてくれます．

定義 5.2. (ZF$^-$ − P)　関係 $\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ の上で**集合状**であるとは，$\mathbf{A}$ の任意の要素 x についてクラス $\{y\in\mathbf{A}:y\mathbf{R}x\}$ が集合であることをいう．□

たとえば関係 $\in$ は任意のクラス $\mathbf{A}$ の上で集合状です．また，どんな関係も集合の上では集合状です．

定義 5.3. (ZF$^-$ − P)　関係 $\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ の上で集合状であり，x が $\mathbf{A}$ の要素であるときに

(a) $\mathrm{pred}(\mathbf{A},x,\mathbf{R})=\{y\in\mathbf{A}:y\mathbf{R}x\}$,

(b) $\mathrm{pred}^0(\mathbf{A},x,\mathbf{R})=\mathrm{pred}(\mathbf{A},x,\mathbf{R})$, $\mathrm{pred}^{n+1}(\mathbf{A},x,\mathbf{R})=\bigcup\{\mathrm{pred}(\mathbf{A},y,\mathbf{R}):y\in \mathrm{pred}^n(\mathbf{A},x,\mathbf{R})\}$,

(c) $\mathrm{cl}(\mathbf{A},x,\mathbf{R})=\bigcup\{\mathrm{pred}^n(\mathbf{A},x,\mathbf{R}):n\in\omega\}$.　□

これらはすべて集合です．$\mathbf{R}$ が関係 $\in$ で $\mathbf{A}$ が推移的クラスだとすれば，$\mathrm{pred}(\mathbf{A},x,\mathbf{R})$ は $\bigcup x$, $\mathrm{pred}^n(\mathbf{A},x,\mathbf{R})$ は $\overset{n}{\bigcup} x$, そして $\mathrm{cl}(\mathbf{A},x,\mathbf{R})$ は $\mathrm{tr\,cl}(x)$ ということになります．$\mathrm{tr\,cl}(x)$ が推移的集合だという事実は次のように一般化されます．

補題 5.4. (ZF$^-$ − P)　$\mathbf{R}$ が $\mathbf{A}$ の上で集合状で x が $\mathbf{A}$ の要素であるとき，$\mathrm{pred}(\mathbf{A},x,\mathbf{R})$ のすべての要素 y について $\mathrm{pred}(\mathbf{A},y,\mathbf{R})\subset\mathrm{cl}(\mathbf{A},x,\mathbf{R})$ が成立する．□

定理 5.5. (ZF$^-$ − P)　関係 $\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ の上で整礎的かつ集合状であるとき，$\mathbf{A}$ の空でない任意の部分クラス $\mathbf{X}$ は $\mathbf{R}$-極小要素をもつ．

【証明】$\mathbf{X}$ の要素 x を固定して考えよう．このとき，もしも x 自身が $\mathbf{X}$ の $\mathbf{R}$-極小要素でないなら，$\mathbf{X} \cap \mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ は $\mathbf{A}$ の空でない部分**集合**となるから $\mathbf{R}$-極小要素 y をもつ．ここで補題 5.4 により，y は $\mathbf{X}$ の $\mathbf{R}$-極小要素でもある．□

特に，$\mathbf{A}$ が $\mathbf{ON}$ で $\mathbf{R}$ が $\in$ 関係の場合を，第 I 章の定理 9.2 において証明しました．この種の結果をクラスを用いないで言いあらわすにはどうすればいいかという議論も，そこでしてあります．

定理 5.5 により，整礎的かつ**集合状の**関係に関する超限帰納法による証明は正当化されます．($\in$ が整礎的であるという) 基礎の公理が $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ を導くという定理 4.1 の証明はそのようにみることができます．この場合 (1) は $x \subset \mathbf{WF} \to x \in \mathbf{WF}$ です．

集合状の整礎的関係に関する**超限再帰**によって関数を定義することもできます．$\mathbf{ON}$ 上の関数を定義する場合については第 I 章の定理 9.3 で扱いました．私たちのクラスの扱い方が正確にはどういう意味をもつかということについても，そこで論じてあります．

定理 5.6. ($\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$) (**超限再帰**)　関係 $\mathbf{R}$ はクラス $\mathbf{A}$ 上で整礎的かつ集合状であるとする．$\mathbf{F} : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ のとき，$\mathbf{G} : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ かつ

$$\forall x \in \mathbf{A} [\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G} \restriction \mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}))] \qquad (*)$$

をみたすクラス $\mathbf{G}$ が一意的に存在する．

【証明】第 I 章の定理 9.3 は，この定理の $\mathbf{A} = \mathbf{ON}$ で $\mathbf{R}$ が $\in$ である特別の場合だった．そこでの証明をストレートに一般化する．

$\mathbf{G}$ の一意性は $\mathbf{R}$ に関する超限帰納法で容易に確かめることができるので，あとは $\mathbf{G}$ の存在の証明に目を向けよう．

$\mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ と $\mathrm{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ を，それぞれ $\mathrm{pred}(x)$, $\mathrm{cl}(x)$ と簡単に書くことにしよう．$\mathbf{A}$ の部分**集合**d が**閉じている**とは，$\forall x \in d (\mathrm{pred}(x) \subset d)$ となることだとする．$\mathbf{A}$ のどの要素 x もなんらかの閉じた集合の要素となる．たとえば $\{x\} \cup \mathrm{cl}(x)$ がそのような集合である．d を閉じた集合とするとき，d-近似とは，d を定義域とする関数 g で

$$\forall x \in d [g(x) = \mathbf{F}(x, g \restriction \mathrm{pred}(x))]$$

をみたすもののことだとする．g が d-近似，g' が d'-近似であれば $g \restriction (d \cap d') = g' \restriction (d \cap d')$ となることが，一意性の証明と同様にしてわかる．

任意の x について，超限帰納法により $\{x\}\cup\mathrm{cl}(x)$-近似が存在することを示そう．$y\mathbf{R}x$ であるようなすべての y についてこのことが正しいと仮定し，g_y を (一意的な) $\{y\}\cup\mathrm{cl}(y)$-近似としよう．このとき $h=\bigcup\{g_y : y\mathbf{R}x\}$ とおけばこれが $\mathrm{cl}(x)$-近似であり，したがって $h\cup\{\langle x,\mathbf{F}(x,h)\rangle\}$ は $\{x\}\cup\mathrm{cl}(x)$-近似である．

ここで，$\mathbf{G}(x)$ を，x を含む一つの閉じた集合 d (これの選び方に結果は依存しない) に関する d-近似 g の値 $g(x)$ と定めればよい．□

もしも $\mathbf{R}$ が集合状でなかったら，定理 5.6 の条件 (*) は意味をなさないことに注意しましょう．定理 5.6 の応用例としては，**WF** に属する集合 y について (補題 2.6 (b) において) 証明した次の等式

$$\mathrm{rank}(y)=\sup\{\mathrm{rank}(x)+1 : x\in y\}$$

があげられるでしょう．関係 $\in$ はクラス **WF** 上で整礎的なので，いまやこの式は $\mathrm{rank}(y)$ の $\in$ 関係に関する再帰による定義とみなすことができるわけです．もっと一般的に，階数 (rank) を次のように定義できます．

定義 5.7. ($\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$)　$\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ 上で整礎的かつ集合状であるとき，

$$\mathrm{rank}(x,\mathbf{A},\mathbf{R})=\sup\{\mathrm{rank}(x,\mathbf{A},\mathbf{R})+1 : y\mathbf{R}x\wedge y\in\mathbf{A}\}$$

によって $\mathrm{rank}(x,\mathbf{A},\mathbf{R})$ を定義する．□

ここでは定理 5.6 でいう $\mathbf{F}$ を

$$\mathbf{F}(x,h)=\sup\{\alpha+1 : \alpha\in\mathrm{ran}(h)\}$$

によって与えているわけです．

補題 5.8. (ZF^-)　クラス $\mathbf{A}$ が推移的で $\in$ が $\mathbf{A}$ 上で整礎的ならば $\mathbf{A}\subset\mathbf{WF}$ であり，また $\mathbf{A}$ のすべての要素 x について $\mathrm{rank}(x,\mathbf{A},\in)=\mathrm{rank}(x)$ が成立する．

【証明】 仮に $\mathbf{A}\not\subset\mathbf{WF}$ であったとして，x を $\mathbf{A}\setminus\mathbf{WF}$ の $\in$-極小要素とする．このとき，$\mathbf{A}$ が推移的であることから $x\subset\mathbf{WF}$, したがって $x\in\mathbf{WF}$ となり矛盾を生じる (この議論は補題 3.3 の証明とよく似ている)．これと同じように，$\{x\in\mathbf{A}: \mathrm{rank}(x,\mathbf{A},\in)\neq\mathrm{rank}(x)\}$ の $\in$-極小要素を考えると補題 2.6 (b) と同様にして矛盾を生じることになる．□

定義 5.7 を用いると，**WF** 上で集合の階数を冪集合公理を用いないで定義することもできます (演習問題 8 を参照してください)．

次に紹介する再帰のもう一つの例は，集合 A 上の整列順序づけ R が順序数と同型であるという事実 (第 I 章定理 7.6) を一般化するものです．整列順序の場合，同型写像 G を $G(a)=\{G(b):bRa\}$ によって定義されると考えることができました．より一般に，次のことが成立します．

定義 5.9. (モストフスキ収縮)($\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$)　関係 $\mathbf{R}$ はクラス $\mathbf{A}$ 上で整礎的かつ集合状であるとする．$\mathbf{A}, \mathbf{R}$ の**モストフスキ収縮関数** $\mathbf{G}$ を

$$\mathbf{G}(x)=\{\mathbf{G}(y):y\in\mathbf{A}\wedge y\mathbf{R}x\}$$

によって定義する．$\mathbf{A}, \mathbf{R}$ の**モストフスキ収縮** $\mathbf{M}$ とは，$\mathbf{G}$ の値域のことと定義する．□

$\mathbf{G}:\mathbf{A}\to\mathbf{M}$ は 1 対 1 写像とは限りません．たとえば $\mathbf{R}=0$ のとき $\mathbf{A}$ のすべての要素 x について $\mathbf{G}(x)=0$ なので，$\mathbf{A}\neq 0$ のときは $\mathbf{M}=\{0\}$ ということになります．

補題 5.10. ($\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$)　定義 5.9 の記号のもとで

(a) $\forall x,y\in\mathbf{A}(x\mathbf{R}y\to\mathbf{G}(x)\in\mathbf{G}(y))$.
(b) $\mathbf{M}$ は推移的.
(c) (ZF^-) $\mathbf{M}\subset\mathbf{WF}$.
(d) (ZF^-) $x\in\mathbf{A}$ のとき $\mathrm{rank}(x,\mathbf{A},\mathbf{R})=\mathrm{rank}(\mathbf{G}(x))$.

【証明】 (a) と (b) は $\mathbf{G}$ の定義からすぐわかる．(c) を示すには，x に関する帰納法で $\forall x\in\mathbf{A}(\mathbf{G}(x)\in\mathbf{WF})$ を証明しなさい．(d) を示すためには

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(\mathbf{G}(x))&=\sup\{\mathrm{rank}(v)+1:v\in\mathbf{G}(x)\}\\&=\sup\{\mathrm{rank}(\mathbf{G}(y))+1:y\mathbf{R}x\}\end{aligned}$$

なので，x に関する帰納法によって $\mathrm{rank}(\mathbf{G}(x))=\mathrm{rank}(x,\mathbf{A},\mathbf{R})$ である．□

実際には，多くの場合，モストフスキ収縮関数は同型写像になっています．そうなるための条件は次のとおりです．

定義 5.11. ($\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$)　関係 $\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ 上で**外延的**であるとは

$$\forall x,y\in\mathbf{A}(\forall z\in\mathbf{A}(z\mathbf{R}x\leftrightarrow z\mathbf{R}y)\to x=y)$$

となることである．□

これは，クラス $\mathbf{A}$ 上で記号 $\in$ を関係 $\mathbf{R}$ によって解釈すると外延性公理が成り

立つことと同値になります．$\mathbf{R}$ が $\mathbf{A}$ 上で外延的であるためには，$x, y \in \mathbf{A}$ かつ $x \neq y$ なら $\mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \neq \mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})$ となることが必要かつ十分である，ということに注意しておくと，あとあと便利です．このことから，たとえば，全順序はかならず外延的になることがすぐにわかります．もう一種類の例が次の補題によって与えられます．

補題 5.12. ($\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$)　クラス $\mathbf{N}$ が推移的であれば，関係 $\in$ は $\mathbf{N}$ 上で外延的である．

【証明】 $\mathrm{pred}(\mathbf{N}, x, \in) = x$．□

補題 5.12 により，関係 $\mathbf{R}$ が外延的でない限り，モストフスキ収縮関数は同型写像になりません．逆に，次のことが成り立ちます．

補題 5.13. ($\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$)　定義 5.9 の記号のもとで，関係 $\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ 上で外延的であれば，$\mathbf{G}$ は同型写像となる．すなわち，$\mathbf{G}$ は 1 対 1 写像で $\forall x, y \in \mathbf{A}(x\mathbf{R}y \leftrightarrow \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y))$ が成立する．

【証明】 まず $\mathbf{G}$ が 1 対 1 写像であることを示す．仮にそうでなかったとして，

$$\{x \in \mathbf{A} : \exists y \in \mathbf{A}(x \neq y \wedge \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y))\}$$

の $\mathbf{R}$-極小要素 x を考え，さらに $x \neq y$ かつ $\mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y)$ をみたす y を考える．$\mathbf{R}$ が外延的であることから，次の二つの場合のどちらかが成立する．第一の場合，$z\mathbf{R}x$ かつ $\neg(z\mathbf{R}y)$ となるような $\mathbf{A}$ の要素 z が存在する．このとき $\mathbf{G}(z) \in \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y)$ なので，ある w について $w\mathbf{R}y$ かつ $\mathbf{G}(w) = \mathbf{G}(z)$ となるはずである．すると $w \neq z$ であって，x の $\mathbf{R}$-極小性と矛盾する．第二の場合，$w\mathbf{R}y$ かつ $\neg(w\mathbf{R}x)$ となるような $\mathbf{A}$ の要素 w が存在する．このとき第一の場合と同様にして $z\mathbf{R}x$, $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(w)$ をみたすような要素 z が存在して，やはり x の極小性と矛盾することになる．

$\mathbf{G}$ が 1 対 1 なので，それが同型写像になることは定義からただちにわかる．□

以上のことをまとめると，次の定理が得られます．

定理 5.14. ($\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$) **(モストフスキの収縮定理)**　関係 $\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ 上で整礎的で集合状で外延的であるとする．そのとき，推移的クラス $\mathbf{M}$ と，$\mathbf{A}, \mathbf{R}$ と $\mathbf{M}, \in$ の同型対応を与えるような，$\mathbf{A}$ から $\mathbf{M}$ の上への 1 対 1 写像 $\mathbf{G}$ が存在する．しかもそのような $\mathbf{M}$ と $\mathbf{G}$ はそれぞれ唯一つに定まる．

【証明】 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{G}$ の存在は補題 5.13 において証明された．仮に $\mathbf{G}'$ と $\mathbf{M}'$ も定理の主張をみたしたとすると，x に関する帰納法によって $\mathbf{A}$ のすべての要素 x について $\mathbf{G}'(x)=\mathbf{G}(x)$ となり，このことから $\mathbf{M}'=\mathbf{M}$ が導かれる．□

定理 5.14 の一例として $\mathbf{R}$ が $\mathbf{A}$ を整列順序づけする場合を考えましょう．$\mathbf{A}$ が集合のとき $\mathbf{M}$ は順序数になります．$\mathbf{A}$ が真のクラスの場合は $\mathbf{M}=\mathbf{ON}$ となります．$\mathbf{R}$ が集合状であるという条件によって，$\mathbf{ON}$ より大きな《順序型》をもってしまうことが防がれているのです．実際，$2\times\mathbf{ON}$ を辞書式に順序づけすれば《順序型 $\mathbf{ON}+\mathbf{ON}$》をもつことになりますが，これはいかなるクラスの上の $\in$ 関係とも同型になりません．

ここまでの議論では $\mathbf{R}$ の整礎性を仮定に含んでいたので，基礎の公理は不要でした．基礎の公理からは $\in$ が整礎的であることが出てくるので，次の結論が導かれます．

系 5.15. (ZF $-$ P)　クラス $\mathbf{A}$ 上で関係 $\in$ が外延的だったとすると，推移的クラス $\mathbf{M}$ と，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{M}$ の $\in$ 関係の同型対応を与えるような，$\mathbf{A}$ から $\mathbf{M}$ の上への 1 対 1 写像 $\mathbf{G}$ が存在する．すなわち

$$\forall x, y \in \mathbf{A}(x \in y \leftrightarrow \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y)). \quad \Box$$

第 III 章の演習問題

別に指示がない限り，ZF^- 公理系のもとで考えなさい．

[1]　$n=0,1,2,3,4,5$ の場合に $R(n)$ を書き下しなさい．$R(3)=\{0,\{0\},\{\{0\}\},\{0,\{0\}\}\}$ というように．

訳注：$n=5$ の場合に取り組む前に，$R(5)$ の要素の数を計算してみてください．

[2]　再帰によって $S(\alpha)=\bigcup_{\xi<\alpha}\mathcal{P}(S(\xi))$ と定義する．このときすべての α について $S(\alpha)=R(\alpha)$ となることを示しなさい．

[3]　$\mathbf{M}$ を $\forall x(x\subset\mathbf{M}\rightarrow x\in\mathbf{M})$ をみたす任意のクラスとする．$\mathbf{WF}\subset\mathbf{M}$ を示しなさい．

[4]　$\mathrm{rank}(x)$ と $\mathrm{rank}(y)$ を使って，$\bigcup x, \mathcal{P}(x), \{x\}, x\times y, x\cup y, \{x,y\}, \langle x,y\rangle, {}^{y}x$ の階数を明示しなさい．

[5] $\omega\times\omega$ の部分集合 E を次のように定義しよう．mEn となるのは m の 2 進数展開の下から n 桁めが 1 のときである．たとえば $13=1101_2$ なので，$0E13, 2E13, 3E13, \neg 1E13, \neg 4E13$. このとき $\langle\omega, E\rangle\simeq\langle R(\omega),\in\rangle$ となることを示しなさい．

[6] $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$ の範囲内で **WF** の理論を展開しなさい．たとえば **WF** を $\{A:$ $\mathrm{trcl}(A)$ 上で $\in$ が整礎的$\}$ と定義し，**WF** の要素 x に対して $\mathrm{rank}(x)=\sup\{\mathrm{rank}(y)+1 : y\in x\}$ と定義する，というように．第 2 節の結果のうち，$\mathcal{P}$ にも $R(\alpha)$ にも $\mathbb{R}$ にも言及しないものはすべてこの理論でも成立することを確かめなさい．定理 4.1 と補題 5.10 の (c) と (d) を証明しなさい．

[7] $\mathrm{ZFC}^- - \mathrm{P}$ 公理系で考えなさい．集合 A 上の関係 R が整礎的であるためには，$\forall n(x_{n+1}\,R\,x_n)$ となるような集合の ω-列 $\langle x_n : n\in\omega\rangle$ がないことが必要かつ十分である．このことを証明しなさい．また，基礎の公理が，$\forall n(x_{n+1}\in x_n)$ となるような集合の ω-列 $\langle x_n : n\in\omega\rangle$ が存在しないことと同値になることを証明しなさい．

[8] 次の三つが $\mathrm{ZF}-\mathrm{P}$ 公理系のもとで同値になることを示しなさい．

(a) x は順序数である．

(b) x は推移的で $\forall y\in x(y$ は推移的$)$ をみたす．

(c) x は推移的で $\forall y,z\in x(y\in z\vee z=y\vee z\in y)$ をみたす．

*[9] ZF 公理系のもとで，AC が $\forall\alpha(\mathcal{P}(\alpha)$ は整列順序づけ可能$)$ と同値であることを証明しなさい．［ヒント］α に関する帰納法によって，$R(\alpha)$ が整列順序づけできることを示しなさい．

[10] $\langle T,<\rangle$ を木とする (第 II 章第 5 節参照)．$x\in T$ のとき

$$\mathrm{ht}(x,T)=\mathrm{rank}(x,T,<)=\mathbf{G}(x)$$

となることを示しなさい．ただし，$\mathbf{G}$ はモストフスキ収縮関数 (定義 5.9 参照) である．

[11] T を，$A^{<\omega}$ の部分木とする．T が**整礎的**であるとは，逆順序 $\langle T,>\rangle$ が整礎的であることをいう．A が整列順序づけ可能であるとき，T が整礎的であるためには，無限な鎖がないことが必要かつ十分である．このことを示しなさい．

[12] T が $A^{<\omega}$ の整礎的な部分木であるとき，$\mathrm{rank}(T)=\mathrm{rank}(0,T,>)$ と定める．ただし 0 は空列のことである．κ が無限基数で $\alpha<\kappa^+$ であるとき，$\kappa^{<\omega}$ の整礎的

な部分木で rank が α のものがあることを示しなさい．

[13] $x \in \mathrm{trcl}(y)$ のことを $x\mathbf{R}y$ と書こう．$\mathbf{R}$ が $\mathbf{WF}$ 上で整礎的かつ集合状であることを示しなさい ([ヒント] $x\mathbf{R}y \to \mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$)．次に $\mathbf{G}$ を $\mathbf{WF}, \mathbf{R}$ のモストフスキ収縮関数として，各 x に対して $\mathbf{G}(x) = \mathrm{rank}(x)$ となることを示しなさい．

[14] $\langle x, 1\rangle \in y$ のことを $x\mathbf{R}y$ と書こう．$\mathbf{R}$ が $\mathbf{WF}$ 上で整礎的かつ集合状であることを示しなさい．$\mathbf{G}$ を $\mathbf{WF}, \mathbf{R}$ のモストフスキ収縮関数としなさい．再帰的に $\check{y}$ を

$$\check{y} = \{ \langle \check{x}, 1\rangle : x \in y \}$$

と定義し，帰納法によって $\mathbf{G}(\check{y}) = y$ を示しなさい．このことから $\mathbf{G}$ の値域は $\mathbf{WF}$ に一致する．

[15] 置換公理のことを AR と表記し，AR を

$$(\forall x \in A \exists y\, \phi) \to (\exists B \forall x \in A \exists y \in B\, \phi)$$

のように強めたものを AR* と表記する．AR* のすべての実例が ZF のもとで証明可能であることを示しなさい． [ヒント] α が $\exists y \in R(\alpha) \phi(x, y)$ の成立するような最小の順序数であるという主張を $\psi(x, \alpha)$ であらわし，ψ に対して AR を適用しなさい． [コメント] ZF$^-$ では AR* を証明できません．

[16] 任意の式 $\phi(x, y)$ に対する

$$\forall x \in A \exists y\, \phi(x, y) \to \exists f\, (f \text{ は関数} \wedge \mathrm{dom}(f) = A \wedge \forall x \in A \phi(x, f(x)))$$

を ZFC において示しなさい． [ヒント] 演習問題 15 を見なさい．

[17] 関係 $\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ において整礎的 (だが集合状とは限らない) とするとき，$\mathbf{A}$ の任意の部分クラス $\mathbf{X}$ が $\mathbf{R}$-極小要素を含むことを示しなさい． [ヒント] 次のような γ を見つけなさい．

$$\forall x \in \mathbf{A} \cap R(\gamma) [\exists y \in \mathbf{A} (y\mathbf{R}x) \to \exists y \in \mathbf{A} \cap R(\gamma) (y\mathbf{R}x)].$$

[コメント] この問題と演習問題 15 は反映原理の例になっています (第 IV 章第 7 節を見てください)．

[18] 基礎の公理のことを AF と表記し，

$$\forall x((\forall y \in x \phi(y)) \to \phi(x)) \to \forall x \phi(x)$$

という公理図式を AF* と表記する ($\phi(x)$ は任意の式だが変数 y を含まないものとする)．ZF$^-$ − P 公理系において AF と AF* が同値であることを示しなさい．

[コメント] AF^* によって $\in$ に関する帰納法が正当化されます．

[19] ZF の AF と AR をそれぞれ AF^* と AR^* に替えた公理系を ZF^* と表記する．$\mathrm{ZF}^* - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ において次のことを示しなさい．

(a) 推移閉包が定義できること．つまり任意の集合 A に対してそれを含む最小の推移的集合 T が存在する．

(b) $\in$ に関する超限再帰 (定理 5.6 の $\mathbf{A}$ が $\mathbf{V}$ で $\mathbf{R}$ が $\in$ の場合) が正当化されること．

[コメント] AF^* が必要になるのはこの演習問題の中だけです．問題 15 と問題 18 によれば ZF^* と ZF は同値ですが，$\mathrm{ZF}^* - \mathrm{P}$ と $\mathrm{ZF} - \mathrm{P}$ は同値ではありません．AR^* の応用例は次の演習問題 20 を見てください．

[20] $\mathrm{ZFC}^* - \mathrm{P}$ 公理系において次のことを証明しなさい．すべての自然数 n について A_n が可算集合であれば，$\bigcup_{n<\omega} A_n$ も可算集合である．第 I 章補題 10.21 で与えた証明は羃集合の公理を使っていたという点に注意しなさい．

第 IV 章
やさしい無矛盾性証明の例

第 I 章第 4 節で述べたように，集合論での無矛盾性証明は，本心からの解釈とは異なるようななんらかの解釈を考えることによって実行されます．この手法についてこの章でもっと詳しく学ぶことにしましょう．

数学的に本当に興味深い無矛盾性証明は，たとえば CH や ¬CH のように，ZFC に含まれない，追加された公理にまつわるものです．こうした結果は第 VI 章から第 VIII 章までで扱います．この章では，あとに続くすべての無矛盾性証明の基本になる，相対化とか絶対性といったアイディアを導入します．これらのアイディアがどのように用いられるかを示すために，簡単な応用例，たとえば

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^-) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZF})$$

などを示します．また，反映原理の証明をして，これを ZF が有限公理化可能でないことを示すために用います．

§1　非公式な三つの証明

大雑把な言い方をすれば，ZF は**正当な解釈のもとで**成立しているから無矛盾だということになります．正当な解釈とは，変数が整礎的集合全体をわたると考えているという意味です．これを手短にいうと，**WF** は ZF の**モデル**です．ZF において証明可能な文はすべて **WF** において正しいので，一つの文とその否定とが両方とも ZF で証明可能になることはありえません．

さてこの無矛盾性《証明》は，他の無矛盾性にまつわる結果と比較して次の点において特別なものです．すなわち，私たちは **WF** をすべての数学が本来展開されるべき場所であると考えており，だからこそ ZF を基本理論として採用している

のですから．そのいっぽうで，なんらかのクラス $\mathbf{M}$ が与えられたとして，変数が $\mathbf{M}$ 上を動くとした《不自然な》解釈を考えることもできるわけです．文の集合 S について，もしも S が $\mathbf{M}$ 上で正しいことが示されたなら S が**無矛盾である**ことは証明されたことになりますが，それでいて，なんらかの《自然な》解釈のもとでの S の**真偽**についてはなにもわからない，ということもありえます．

例をあげましょう．$\mathbf{M}$ として集合 $R(\omega)$ をとります．S を，ZF から無限公理だけを削除し，代わりに無限公理の否定を入れた公理の集合としましょう．要するに

$$S = \mathrm{ZF} - \mathrm{Inf} + \neg\mathrm{Inf}$$

ということですが，このとき $R(\omega)$ は S のモデルとなります．次の節でこれについて詳しく扱いますが，大雑把にいって，$x, y \in R(\omega)$ のとき $\{x, y\} \in R(\omega)$ なので対の公理が成立し，和集合の公理と冪集合の公理についても同様に考えられます．基礎の公理は $R(\omega) \subset \mathbf{WF}$ なので成立します．$R(\omega)$ には無限集合は入っていないので，無限公理は不成立です．こうして，数学の基礎としては不十分なものですが，S が無矛盾であることがわかります．哲学的な観点から $\mathrm{Con}(S)$ の意義を言えば，

$$\mathrm{ZF} - \mathrm{Inf} \nvdash \mathrm{Inf}$$

ということから，無限公理を ZF の公理の一つに数えても，冗長にならないとわかるわけです．

もっとばかげた例として $\mathbf{M} = \{0\}$ を考えましょう．第 I 章第 5 節でもとりあげたものです．外延性公理と内包性公理が $\mathbf{M}$ で成立しますが，$\forall y (y = 0)$ も成立しますから，これら二種類の公理だけから出発したのでは空でない集合の存在は証明できません．

読者が頭の固い実在主義者でなければ，ここまでの議論は非常に怪しいとわかったはずです．ZF の無矛盾性を示すのに $\mathbf{WF}$ の存在を信じなければならないというのですから．実際には，ゲーデルの不完全性定理 (第 I 章定理 14.3) によって，ZF の無矛盾性は ZF の範囲内で定式化できるような手法では証明できないのです．

実際には，議論の基礎をなす理論として ZF^- から出発します．すでに，ZF^- のなかでの $\mathbf{WF}$ や $R(\omega)$ や $\{0\}$ の性質については理論を展開してあります．そこで，仮に ZF^- が無矛盾であったとすれば，

$$\mathrm{ZF} \tag{1}$$

$$\mathrm{ZF} - \mathrm{Inf} + \neg\mathrm{Inf} \tag{2}$$

$$\text{外延性公理} + \text{内包性公理} + \forall y(y=0) \tag{3}$$

もそれぞれ無矛盾である，ということを示します．すなわち，ZF^- が無矛盾であると前提したうえで，**相対的無矛盾性**を述べるわけです．相対的無矛盾性の結果はまったく有限主義的に達成されるいっぽう，ZF^- の無矛盾性は，依然として未解決の問題，あるいは信仰箇条，ということになります．どちらであるかは，その人の哲学的見解によって違うでしょう．

ZF の相対的無矛盾性を証明したあとは，ここまでに述べた理由により，ZF^- の代わりに ZF を基礎をなす理論として用いることにします．また，(第 5 節で述べる) 技巧上の理由からいっても，ZF^- ではなく ZF からの相対的無矛盾性を証明するほうが，ずっと簡単なのです．もちろん，

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^-) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZF})$$

を証明してあれば，$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}) \to \mathrm{Con}(S)$ の証明からただちに $\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^-) \to \mathrm{Con}(S)$ の証明が得られることになります．

さきほど述べた (1) と (2) と (3) の無矛盾性については，それぞれこの章の系 4.4, 系 3.15, 系 2.8 で ($\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^-)$ を仮定して) 証明されていますが，ここではむしろ一般的な方法を展開することに重点を置いており，このあと必要になる手法の例示のためにこれらを用いています．

§2 相対化

第 1 節で得られたアイディアを精密化しましょう．手はじめに，式の $\mathbf{M}$ での真偽について考えます．

定義 2.1. $\mathbf{M}$ を任意のクラスとするとき，任意の式 ϕ に対し，その $\mathbf{M}$ への相対化 $\phi^{\mathbf{M}}$ を，ϕ に関する帰納法によって次のように定義する．

(a) $(x=y)^{\mathbf{M}}$ は $x=y$ と同じ．

(b) $(x\in y)^{\mathbf{M}}$ は $x\in y$ と同じ．

(c) $(\phi\wedge\psi)^{\mathbf{M}}$ とは $\phi^{\mathbf{M}}\wedge\psi^{\mathbf{M}}$ のこと．

(d) $(\neg\phi)^{\mathbf{M}}$ とは $\neg(\phi^{\mathbf{M}})$ のこと．

(e) $(\exists x\phi)^{\mathbf{M}}$ とは $\exists x(x\in\mathbf{M}\wedge\phi^{\mathbf{M}})$ のこと．□

もっと正式にいうと，$\mathbf{M}$ は式 $\mathbf{M}(v)$ であり，ϕ も式であって，もう一つ別の式

$\phi^{\mathbf{M}}$ をメタ理論において定義しているのです．上記の (e) にあらわれた式は，本当は $\exists x(\mathbf{M}(x) \wedge \phi^{\mathbf{M}})$ と書くべきものです．

簡単にいえば，$\phi^{\mathbf{M}}$ は ϕ にあらわれる量化子 $\exists x$ をすべて $\exists x \in \mathbf{M}$ に書き換えることによって得られます．式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ に $x_1, \ldots, x_n$ が自由にあらわれるとすると，$\mathbf{M}$ の要素 $x_1, \ldots, x_n$ に対する $\phi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n)$ が《言っている》ことは，ϕ の束縛された変数が $\mathbf{M}$ 上を動くと解釈したときに $\phi^{\mathbf{M}}$ がこれらの $x_1, \ldots, x_n$ について真である，ということです．$x_1, \ldots, x_n$ が $\mathbf{M}$ に属さないときには，$\phi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n)$ の意味づけは明らかではありませんが，これはさほど問題にはなりません．

ここでの $\phi^{\mathbf{M}}$ の定義では，記号 $\in$ の解釈には変更がありませんでした．第 8 節で触れますが，$\in$ の解釈を変更することも考えられます．

ここでは，第 I 章第 2 節で述べたような略記法を含まない正式な式についてだけ，$\phi^{\mathbf{M}}$ を定義しました．しかし，**論理に関する**略記法は期待どおりの意味をもつことに注意しましょう．たとえば $(\phi \vee \psi)^{\mathbf{M}}$ は本当は $\neg(\neg\phi \wedge \neg\phi)^{\mathbf{M}}$ であり，これはここでの定義から $\neg(\neg(\phi^{\mathbf{M}}) \wedge \neg(\phi^{\mathbf{M}}))$ つまり $\phi^{\mathbf{M}} \vee \psi^{\mathbf{M}}$ になります．また，$(\forall x\phi)^{\mathbf{M}}$ は $(\neg\exists x \neg\phi)^{\mathbf{M}}$ すなわち $\neg(\exists x \in \mathbf{M} \wedge \neg(\phi^{\mathbf{M}}))$ であり，これは $\forall x(x \in \mathbf{M} \rightarrow \phi^{\mathbf{M}})$ と論理的に等価です．いっぽう，$\subset$ や $\mathcal{P}$ のような定義によって導入された集合論的関係や演算の記号を含む略記法については，状況はより複雑です．これについてはあとで議論します．

定義 2.2. $\mathbf{M}$ を任意のクラスとする．

(a) 文 ϕ について **ϕ が $\mathbf{M}$ において真**とは，$\phi^{\mathbf{M}}$ を意味する．

(b) 文の集合 S について **S が $\mathbf{M}$ において真**，あるいは **$\mathbf{M}$ が S のモデルである**とは，S に属する文がすべて $\mathbf{M}$ において真であることを意味する．□

直観的には (a) と (b) は同じ一つのアイディアにもとづくのですが，形式上はこれらはまったく別種のものです．《ϕ は $\mathbf{M}$ において真である》とは $\phi^{\mathbf{M}}$ という一つの文のいいかえにすぎません．いっぽう,《S は $\mathbf{M}$ において真である》とは，S に属するすべての文 ϕ について，現在用いている公理系から $\phi^{\mathbf{M}}$ を証明することができるという，メタ理論の言明を表現しているのです．

相対的無矛盾性の結果を得るための基礎として，次のような論理学の結果を用います．

補題 2.3. S と T を，集合論の言語における文の集合とする．あるクラス (すなわ

ち述語) $\mathbf{M}$ について，$\mathbf{M}\neq 0$ と $\mathbf{M}$ が S のモデルであることを T で証明できたとする．このとき $\mathrm{Con}(T)\rightarrow\mathrm{Con}(S)$ である．

【証明】 仮に S が矛盾を含んでいるとすると，ある (任意の) 文 χ について，$\chi\wedge\neg\chi$ を S で証明できる．そこで，T で議論すれば $\mathbf{M}$ において S が真であって $\chi^{\mathbf{M}}\wedge\neg\chi^{\mathbf{M}}$ となることが証明される．したがって T も矛盾を含む．□

この証明が非公式すぎると思われるなら，第 8 節にもっと正式な扱いがあるので見てください．

補題 2.3 でいう T は，通常は ZF^-, ZF, ZFC のようなものです．第 1 節であげた (1)–(3), 第 VI 章で扱う ZFC＋GCH, 第 VII 章で扱う ZFC＋¬CH などが，S の例です．

$\mathbf{M}$ が空でないという条件が必要になる理由は，$\exists x(x=x)$ が，私たちは明確さのためにこれを公理 0 として明言したものの，じつは論理的に証明可能であるということです．$(\exists x(x=x))^{\mathbf{M}}$ は $\mathbf{M}$ が空でないというのと同じことです．そこで，以下の議論ではつねに，$\mathbf{M}$ は空ではなく，公理 0 が $\mathbf{M}$ において真であると仮定します．

次に公理 1 つまり外延性公理を検討します．これを $\mathbf{M}$ に相対化したものは

$$\forall x,y\in\mathbf{M}(\forall z\in\mathbf{M}(z\in x\leftrightarrow z\in y)\rightarrow x=y)$$

です．これはちょうど $\in$ が $\mathbf{M}$ 上において外延的 (第 III 章定義 5.11) だと言っていることになります．推移的集合の上では $\in$ はいつでも外延的なので (第 III 章補題 5.12)，次の結果が得られます．

補題 2.4. $\mathbf{M}$ が推移的であれば，外延性公理が $\mathbf{M}$ において真である．□

公理 3 すなわち内包性公理は，$\mathbf{M}$ を構成するさいに十分注意をはらわない限り，通常は $\mathbf{M}$ で真になりません．次の補題によって，内包性が成立するかどうかは $\mathbf{M}$ がある種の演算のもとで閉じているかどうかに帰着されます．

補題 2.5. 任意の式 $\phi(x,z,w_1,\ldots,w_n)$ (ここに示された以外の自由変数はないとする) について

$$\forall z,w_1,\ldots,w_n\in\mathbf{M}(\{x\in z:\phi^{\mathbf{M}}(x,z,w_1,\ldots,w_n)\}\in\mathbf{M})$$

が成立するものと仮定する．このとき，内包性公理図式にあてはまるすべての文が $\mathbf{M}$ で真である．

【証明】 内包性公理を $\mathbf{M}$ に相対化すると

$$\forall z, w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{M} \exists y \in \mathbf{M} \, (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi^{\mathbf{M}}(x, z, w_1, \ldots, w_n))$$

となるので，これが成立することを確認する必要がある．$z, w_1, \ldots, w_n$ が与えられたとして $y = \{x \in y : \phi^{\mathbf{M}}(x, z, w_1, \ldots, w_n)\}$ とおけば，これは仮定から $\mathbf{M}$ に属する．そしてすべての x について，ということはすべての $\mathbf{M}$ の要素 x について，

$$x \in y \leftrightarrow \phi^{\mathbf{M}}(x, z, w_1, \ldots, w_n)$$

が成立する．□

$\mathbf{M}$ が推移的クラスのとき，この補題の条件が内包性が成立するための必要条件でもあることが容易にわかります．この後の各章では実際にこの条件をチェックするのですが，考えられる限りのあらゆる式を $\mathbf{M}$ に相対化してその意味を検討しなければならないので，これはなかなか困難です．しかしこの章で扱う単純なモデルでは次のことが成り立つので，内包性はあっけなく成立します．

系 2.6. もしも $\forall z \in \mathbf{M}(\mathcal{P}(z) \subset \mathbf{M})$ であれば，内包性公理は $\mathbf{M}$ で真である．□

第 1 節で言及した三つの無矛盾性のうちいちばん簡単なものは，これで証明できます．

定理 2.7. (ZF^-)　$\mathbf{M} = \{0\}$ とすると，公理 0, 公理 1, 公理 3 と $\forall y(y = 0)$ が $\mathbf{M}$ で真である．

【証明】 ここでは $\forall y(y = 0)$ は $\forall y \forall x(x \notin y)$ の略記法と考える必要がある．$0 \notin 0$ であるから，この式は $\mathbf{M}$ で真である．$\mathbf{M}$ は推移的で，空ではないので，公理 0 と公理 1 は $\mathbf{M}$ で真である．$\mathbf{M}$ の要素 (つまり 0) の部分集合はまた $\mathbf{M}$ に属するので，系 2.6 により公理 3 が $\mathbf{M}$ で真である．□

こうして，補題 2.3 によって次のことが成立します．

系 2.8. $\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^-) \to \mathrm{Con}($外延性$+$内包性$+\forall y(y = 0))$. □

定理 2.7 の証明から重要な論点が浮びあがってきます．私たちが定義したのは，集合論のもっとも基本的な式の相対化だけでした．たとえば $y = 0$ といった，定義によって導入された言葉を含む式を相対化したい場合，新たに定義された言葉を含まないもとの言語で，式を表現しなおす必要があります．私たちは，本当の集合論の式は $\in$ と $=$ だけをもとに書かれており，それ以外のものはすべて書き下すの

が面倒な長い本当の式の略記法にすぎない，という見解 (第 I 章第 8 節を参照) をとっていますから，原理的にはこうした書き換えにはなんの問題もないはずです．しかしながら，CH のような数学的に意味のある言明や，AC のような基本的な公理ですら，定義によって導入された言葉をふんだんに用いて表現されていますから，こうした言明があるモデルで真になるかどうかを，省略のないもとの言語にいちいち書き直さなくても確認できるのであれば，それに越したことはありません．

定義によって導入された関係式だけが用いられているあいだは，それでも問題は少ないといえます．というのも，そういった略記法を書き直すさいには，もとの言語でそれがあらわしている式に置き換えればいいだけだからです．たとえば $z \subset x$ は

$$\forall v(v \in z \to v \in x)$$

の略記でしたから，$(z \subset x)^{\mathbf{M}}$ は

$$\forall v \in \mathbf{M}(v \in z \to v \in x)$$

の略記であり，これは $z \cap \mathbf{M} \subset x$ と同じことです．さて，$\subset$ を含む言明，たとえば冪集合の公理

$$\forall x \exists y \forall z(z \subset x \to z \in y)$$

が $\mathbf{M}$ で真かどうか確かめたい場合には，省略のないもとの言語で言明を書き下す必要はありません．冪集合の公理を $\mathbf{M}$ に相対化したものは

$$\forall x \in \mathbf{M} \exists y \in \mathbf{M} \forall z \in \mathbf{M}(z \cap \mathbf{M} \subset x \to z \in y)$$

と同値になります．特にこれから検討するほとんどすべての例では $\mathbf{M}$ が推移的なので，次に見るとおりさらに簡単になります．この場合 $z \in \mathbf{M}$ なら $z \cap \mathbf{M} = z$ なので，$z, y \in \mathbf{M}$ のとき

$$(z \subset y)^{\mathbf{M}} \leftrightarrow z \subset y$$

です (第 3 節で導入される用語で言えば，$\subset$ は $\mathbf{M}$ に対して**絶対的**です)．こうして，$\mathbf{M}$ が推移的であれば，冪集合の公理が $\mathbf{M}$ で真であるのは

$$\forall z \in \mathbf{M} \exists y \in \mathbf{M} \forall z \in \mathbf{M}(z \subset x \to z \in y)$$

となるときにほかならない，ということになります．言い替えれば，次のことが成り立ちます．

補題 2.9. クラス $\mathbf{M}$ が推移的であれば，冪集合の公理が $\mathbf{M}$ で成立するためには

$$\forall x \in \mathbf{M} \exists y \in \mathbf{M} (\mathcal{P}(x) \cap \mathbf{M} \subset y)$$

となることが必要かつ十分である．□

定義によって導入された演算や定数の扱いにはもっと注意する必要があります．第 I 章第 8 節で指摘したとおり，公理の集合 S が

$$S \vdash \forall x_1, \ldots, x_n \exists ! y\, \phi(x_1, \ldots, x_n, y)$$

をみたす場合に，$F(x_1, \ldots, x_n)$ とは $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ となるような y のことだと《定義する》ことができます．あくまで，F を含む式は F を含まない正式な式の略記です．これまでは，正式な式の候補として考えられるたくさんの可能性のどれを採用するかという点を明確にはしてきませんでした．というのも，**S を出発点として考える限り**それらはすべて同値だからです (ここでは，論理学上の詳細はカーペットの下に隠してしまいました．詳しくは第 8 節を見てください)．しかし，S が成立しないクラスでそれらが同値である保証はありません．

たとえば，式 $\forall v(v \notin y)$ を $\phi(y)$ としましょう．この場合，内包性公理と外延性公理が S に含まれる限り，$S \vdash \exists ! y\, \phi(y)$ ですから，そのような y を 0 と《定義する》ことができます．すると，$0 \in z$ という式は

$$\psi(z)\colon\ \exists y(\phi(y) \wedge y \in z)$$

あるいは

$$\chi(z)\colon\ \forall y(\phi(y) \to y \in z)$$

の，どちらの略記法とも考えられます．両者は $\exists ! y\, \phi(y)$ である限り同値です．そこで

$$a = 0,\quad b = \{0\},\quad c = \{\{\{0\}\}\}$$

として，$\{a, b, c\}$ を M とおきましょう．すると，$\phi^M(a)$ と $\phi^M(c)$ はどちらも真となり，$\psi^M(b)$ は真，$\chi^M(b)$ は偽となります．

こうした問題を回避するために，

$$\forall x_1, \ldots, x_n \exists ! y\, \phi(x_1, \ldots, x_n, y) \tag{$*$}$$

が $\mathbf{M}$ で真であると確認できた場合に限って，F を含む式をクラス $\mathbf{M}$ に相対化したものを考えることにします．ふつうは，$(*)$ を証明するために第 I 章で用いた集合論の公理を $\mathbf{M}$ がみたすことが，前もってチェックされます．

$\mathbf{M}$ で $(*)$ が成立していれば，$F^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n)$ という記号を $\phi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n, y)$ を

みたす $\mathbf{M}$ のただ一つの要素 y を意味するものとして用います．$F^{\mathbf{M}}$ がどういうものかある程度事情がわかってくれば，定義にもとづいてすべてを書き下さなくても F を含む式の $\mathbf{M}$ での真偽をチェックできるようになります．例えば，$M=\{1,2\}$ であれば $\exists! y\forall v(v\notin y)$ は M で真であり，$0^M=1$ となります．$1\in 2$ なので $\exists x(0\in x)$ と表される式も M で真となります．また，$M=\{0\}$ であれば $0^M=0$ であって，$\exists x(0\in x)$ は M で偽となります．

このアイディアは，第 1 節で $R(\omega)$ と $\mathbf{WF}$ について述べた非公式な言明を正確に言い直すために用いることができます．$R(\omega)$ あるいは $\mathbf{WF}$ を $\mathbf{N}$ と書くことにしましょう．$\mathbf{N}$ は推移的なので，外延性公理をみたします．$z\in\mathbf{N}$ のとき $\mathcal{P}(z)\in\mathbf{N}$ であり (第 III 章補題 2.8) したがって $\mathcal{P}(z)\subset\mathbf{N}$ でもあります．それゆえ $\mathbf{N}$ は (系 2.6 により) 内包性公理と (補題 2.9 により) 冪集合の公理をみたします．$\mathbf{N}$ が対の公理と和集合の公理をみたすことは，$\mathbf{N}$ がこれらの演算のもとで閉じていること (第 III 章補題 2.8) と，次に述べる一般的な事実から導かれます．

補題 2.10. クラス $\mathbf{M}$ が

$$\forall x,y\in\mathbf{M}\exists z\in\mathbf{M}(x\in z\wedge y\in z)$$

と

$$\forall x\in\mathbf{M}\exists z\in\mathbf{M}\left(\bigcup x\subset z\right)$$

をみたせば，対の公理と和集合の公理は $\mathbf{M}$ で真である．□

内包性公理と同じく置換公理も，任意の式について考えなければならないために確認が困難なことが多いのですが，$R(\omega)$ や $\mathbf{WF}$ の場合に限っては，これも簡単に確かめられます．まずこの公理の相対化を次の形に書き直しておくのがよいでしょう．

補題 2.11. 任意の式 $\phi(x,y,A,w_1,\ldots,w_n)$ と $\mathbf{M}$ の任意の要素 $A,w_1,\ldots,w_n$ について，次のことが確かめられたとしよう：もしも

$$\forall x\in A\exists! y\in\mathbf{M}\,\phi^{\mathbf{M}}(x,y,A,w_1,\ldots,w_n)$$

であれば

$$\exists Y\in\mathbf{M}\,(\{y:\exists x\in A\,\phi^{\mathbf{M}}(x,y,A,w_1,\ldots,w_n)\}\subset Y).$$

このとき，置換公理図式は $\mathbf{M}$ において真である．□

$\mathbf{N}=R(\omega)$ あるいは $\mathbf{N}=\mathbf{WF}$ の場合にこの補題を適用してみます．

$$Y = \{\, y \in \mathbf{N} : \exists x \in A\, \phi^{\mathbf{N}}(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)\,\}$$

とおきましょう．$Y \subset \mathbf{N}$ ですから，$\mathbf{N} = \mathbf{WF}$ の場合はここからただちに (第 III 章補題 2.10 により) $Y \in \mathbf{N}$ がいえます．$\mathbf{N} = R(\omega)$ の場合は $|Y| \le |A| < \omega$, したがってある n について $Y \in R(n)$, すなわち $Y \in R(n+1) \subset \mathbf{N}$ となります．したがってどちらの $\mathbf{N}$ においても，置換公理は真となります．

クラス $\mathbf{M}$ に相対化した基礎の公理は

$$\forall x \in \mathbf{M}(\exists y \in \mathbf{M}(y \in x) \to \exists y \in \mathbf{M}(y \in x \wedge \neg \exists z \in \mathbf{M}(z \in x \wedge z \in y)))$$

となります．そこで，もしも $\mathbf{M} \subset \mathbf{WF}$ であれば，$\mathbf{M}$ の要素 x に対して $\mathbf{M} \cap x$ の最小階数の要素 y をとれば基礎の公理は確かめられます (これは $\in$ 関係が $\mathbf{WF}$ の任意の要素の上で整礎的であること (第 III 章補題 3.2) の証明を少し手直ししたものです)．これで，$R(\omega)$ や $\mathbf{WF}$ で基礎の公理が真であることが，ZF^- の範囲内で確かめられたわけです．より一般に次のことが成立します．

補題 2.12. (ZF^-)　基礎の公理は $\mathbf{WF}$ の任意の部分クラスで真である．□

ここまでで次のことが示されました．

補題 2.13. (ZF^-)　$\mathbf{WF}$ と $R(\omega)$ は $\mathrm{ZF} - \mathrm{Inf}$ のモデルである．□

無限公理

$$\exists x(0 \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x))$$

には，定義によって導入された記号 0 と S が含まれます．直感的には，無限公理は ($x = \omega$ とすれば) $\mathbf{WF}$ で真，$R(\omega)$ で偽とわかりますが，これを厳密に証明するためには，0 や S が $R(\omega)$ とか $\mathbf{WF}$ においても $\mathbf{V}$ と同じものを意味しているかどうか (いいかえれば，0 や S が $R(\omega)$ や $\mathbf{WF}$ に対して**絶対的**であるかどうか) をチェックする必要があります．それは簡単にわかりますが，ここで 0 と S に限った議論をするよりは，絶対性について一般的に調べることにしましょう．

§3　絶対性

定義 3.1. 式 ϕ は $x_1, \ldots, x_n$ 以外には自由な変数をもたないものとする．

(1) $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ で

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M}\, (\phi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n))$$

が成立するとき，ϕ が $\mathbf{M},\mathbf{N}$ に対して**絶対的である**という．

(2) ϕ が**クラス $\mathbf{M}$ に対して絶対的である**とは，ϕ が $\mathbf{M},\mathbf{V}$ に対して絶対的であることをいう．いいかえれば，

$$\forall x_1,\ldots,x_n \in \mathbf{M}\,(\phi^{\mathbf{M}}(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \phi(x_1,\ldots,x_n))$$

が成立することである．□

特に，ϕ がもしも $\mathbf{M}$ に対して絶対的であると同時に $\mathbf{N}$ に対しても絶対的で，しかも $\mathbf{M}\subset\mathbf{N}$ であれば，ϕ は $\mathbf{M},\mathbf{N}$ に対して絶対的になります．

この節と第5節では，いくつかの (決して**全部ではない**) 式 ϕ の，この先取り扱ういろいろなモデルに対する絶対性を簡単に確かめられる方法を述べます．そのために，簡単な絶対的な式からより複雑な式を帰納的に構成してゆくような規則を指摘します．この規則によって，最終的にはかなり多くの数学的概念が絶対的なものであるとわかります．次の補題はつまらないものですが，こうした帰納的な規則の一例になっています．

補題 3.2. $\mathbf{M}\subset\mathbf{N}$ で ϕ と ψ が $\mathbf{M},\mathbf{N}$ に対して絶対的ならば，$\neg\phi$ や $\phi\wedge\psi$ もそうである．□

原子式 $x=y$ と $x\in y$ はあらゆる $\mathbf{M}$ に対して絶対的であり，量化子を含まない式はすべて，これらの原子式から $\neg$ と $\wedge$ によって組み立てられるわけですから，次のことがわかります

系 3.3. 式 ϕ が量化子を含まなければ，ϕ は任意のクラス $\mathbf{M}$ に対して絶対的である．□

不幸なことに，たとえば $x\subset y$ がじつは $\forall z(z\in x \to z\in y)$ であるように，とても簡単な式でもたいていは量化子を含んでいて，絶対的にならない可能性があります．たとえば，$a=\{\{0\}\}$ とおいて $\mathbf{M}=\{0,a\}$ を考えると $(a\subset 0)^{\mathbf{M}}$ となりますが，$a\not\subset 0$ です．ただ幸いなことに，今後取り扱う多くのモデルのように $\mathbf{M}$ が推移的であるときは，$x\subset y$ は $\mathbf{M}$ に対して絶対的になります (補題 2.9 の前に述べた議論も思い出してください)．ここでどんな仕掛けが働いているのかは，次の補題に示されています．

補題 3.4. クラス $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ が推移的で $\mathbf{M}\subset\mathbf{N}$ であり，ϕ が $\mathbf{M},\mathbf{N}$ に対して絶対的ならば，$\exists x\in y\phi$ すなわち $\exists x(x\in y\wedge\phi)$ も $\mathbf{M},\mathbf{N}$ に対して絶対的である．

【**証明**】ϕ の自由変数を明記して $\phi(x,y,z_1,\ldots,z_n)$ と書くと，$\mathbf{M}$ の任意の要素 $y,z_1,\ldots,z_n$ に対して

$$[\exists x(x\in y\wedge\phi(x,y,z_1,\ldots,z_n))]^{\mathbf{M}}\leftrightarrow\exists x(x\in y\wedge\phi^{\mathbf{M}}(x,y,z_1,\ldots,z_n))\leftrightarrow$$

$$\exists x(x\in y\wedge\phi^{\mathbf{N}}(x,y,z_1,\ldots,z_n))\leftrightarrow[\exists x(x\in y\wedge\phi(x,y,z_1,\ldots,z_n))]^{\mathbf{N}}$$

となる．ここで第 2 の $\leftrightarrow$ には ϕ の絶対性の仮定を用いる．第 1 の $\leftrightarrow$ は $\mathbf{M}$ が推移的であることにより，同様に第 3 の $\leftrightarrow$ は $\mathbf{N}$ が推移的であることによる．□

$\exists x\in y$ の形の量化子を**有界な量化子**と呼び，有界な量化子だけを含むような式のことを **Δ_0 式**と呼びます．正式には次のように定義されます．

定義 3.5. Δ_0 式は次の規則によって帰納的に構成される：

(1) $x\in y$ と $x=y$ は Δ_0 式である．
(2) ϕ と ψ が Δ_0 式であれば，$\neg\phi$ も $\phi\wedge\psi$ もまた Δ_0 式である．
(3) ϕ が Δ_0 式であれば，$\exists x(x\in y\wedge\phi)$ もまた Δ_0 式である．□

系 3.6. クラス $\mathbf{M}$ が推移的で ϕ が Δ_0 式であれば，ϕ は $\mathbf{M}$ に対して絶対的である．□

実際に Δ_0 式にお目にかかる機会はほとんどないので，この結果の使い道も限られてしまいます．たとえば $x\subset y$ はじつは $\forall z(z\in x\to z\in y)$ で，これは省略せずに書くと

$$\neg\exists z\neg(z\in x\to z\in y)$$

ですから Δ_0 式ではありません．ただ，この式は

$$\neg\exists z\in x(\neg z\in y)$$

という Δ_0 式と論理的に同等ではあります．そこで系 3.6 を応用するさいには次の結果と併用する必要があります．

補題 3.7. $\mathbf{M}\subset\mathbf{N}$ であって，文の集合 S は

$$S\vdash\forall x_1,\ldots,x_n(\phi(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\psi(x_1,\ldots,x_n))$$

をみたし，$\mathbf{M}$ も $\mathbf{N}$ もこの S のモデルであるとする．このときもしも ϕ が $\mathbf{M},\mathbf{N}$ に対して絶対的であれば，ψ もそうなる．□

特に，$\forall x\in y\chi$ は $\neg\exists x\in y\neg\chi$ と論理的に同等ですから，$\forall x\in y$ は有界な量化子

であると実際上みなしてよいことになります．

$\mathbf{M}$ を任意の推移的クラス，$\mathbf{N}$ を $\mathbf{V}$ とし，S を空集合として補題 3.7 を適用すれば，$x \subset y$ が $\mathbf{M}$ に対して絶対的であることがわかります．すでに第 2 節で知られていた事実が，迂余曲折を経てようやく証明できたわけですが，おかげでもっと多くの絶対性に関する結果を同じ方法で証明できるようになりました．まず，定義によってつけ加えられる概念は，関係よりは関数である場合のほうが多いので，ここで次のように定義しておきます．

定義 3.8. $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ だとして，定義によって付け加えられた関数 $F(x_1, \ldots, x_n)$ を考える．式 $F(x_1, \ldots, x_n) = y$ が $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ に対して絶対的であるときに，関数 F は $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ に対して**絶対的である**という．□

より正式にいうと次のようになります．式 $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ をみたすただ一つの y を $F(x_1, \ldots, x_n)$ と呼ぶとして F を定義したとしましょう．この F の $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ に対する絶対性を云々できるのは，以前の取り決めによれば，$\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ の両方で

$$\forall x_1, \ldots, \forall x_n \exists ! y \, \phi(x_1, \ldots, x_n)$$

が真である場合に限ります．そのとき F が $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ に対して絶対的であるとは ϕ が絶対的だということで，それは $\mathbf{M}$ のすべての要素 $x_1, \ldots, x_n$ に対して $F^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) = F^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n)$ となることと同値です．さらにもっと正式な扱いは第 8 節にあります．

定理 3.9. 以下に述べる関係と関数は $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ において定義され，定義に用いられる式はある Δ_0 式との同値性を $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ において証明できるものばかりである．したがって，これらの概念はいずれも，$\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ のモデルとなっているような推移的クラスに対して絶対的である．

(a) $x \in y$,

(b) $x = y$,

(c) $x \subset y$,

(d) $\{x, y\}$,

(e) $\{x\}$,

(f) $\langle x, y \rangle$,

(g) 0,

(h) $x \cup y$,

(i) $x \cap y$,

(j) $x \setminus y$,

(k) $S(x)$, すなわち $x \cup \{x\}$,

(l) x は推移的である,

(m) $\bigcup x$,

(n) $\bigcap x$, ただし $\bigcap 0 = 0$ とする.

【証明】 これらが実際 ZF$^-$ − P − Inf で定義できることを確かめるには第 I 章を思い出せばいいが，そこでは Δ_0 式で定義できるかどうかという点には神経を使っていなかった．ここでは，上にリストされた順に，定義に用いた式が Δ_0 式と同値であることを ZF$^-$ − P − Inf の公理だけを用いてチェックしていこう．

(a), (b), (c) についてはすでに検証した．(d) は次のように書ける：

$$z = \{x, y\} \leftrightarrow [x \in z \wedge y \in z \wedge \forall w \in z(w = x \vee w = y)].$$

右辺の式は Δ_0 式に論理的に同等である．$z = \{x\}$ についても同様．また，$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ であるから

$$z = \langle x, y\rangle \leftrightarrow [\exists w \in z(w = \{x\}) \wedge \exists w \in z(w = \{x, y\}) \wedge \\ \forall w \in z(w = \{x\} \vee w = \{x, y\})]$$

であり，右辺の式にあらわれる $w = \{x\}$ や $w = \{x, y\}$ をそれと同値な Δ_0 式に書き換えると，全体が Δ_0 式と同値になる．(g), (h), (i), (k) は次のとおり

$$z = 0 \leftrightarrow [\forall w \in z(w \neq w)].$$

$$z = x \cup y \leftrightarrow [\forall w \in z(w \in x \vee w \in y) \wedge x \subset z \wedge y \subset y].$$

$$z = x \cap y \leftrightarrow [\forall w \in x(w \in y \to w \in z) \wedge z \subset x \wedge z \subset y].$$

$$z = S(x) \leftrightarrow [x \in z \wedge x \subset z \wedge \forall w \in z(w = x \vee w \in x)].$$

(j) は (i) と同様．残る (l), (m), (n) については次のとおり．

$$x \text{ は推移的} \leftrightarrow [\forall v \in x \forall z \in v(z \in x)].$$

$$y = \bigcup x \leftrightarrow [\forall v \in x(v \subset y) \wedge \forall z \in y \exists v \in x(z \in v)].$$

$$y = \bigcap x \leftrightarrow [\forall v \in x(y \subset v) \wedge \forall v \in x \forall z \in v(\forall w \in x(z \in w) \to z \in y) \wedge \\ (x = 0 \to y = 0)].$$

(n) において，$\bigcap 0$ は《本当なら》$\mathbf{V}$ であるはずだが，ここでは便宜上 0 と定義しなおしている．□

念のために言えば，私たちは ZFC の一部分ではなく全体のモデルを考察することを主たる目的としています．それでも，定理 3.9 が $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ のモデルに対して有効であるという事実は有用です．というのも，そのおかげで，考えているモデルが ZFC の公理全部をみたすことを確かめる前に，絶対性についての諸結果が利用できるからです．実際，私たちはこうした結果を，ZFC のいくつかの公理の検証にも利用します．

順序対演算の絶対性 (定理 3.9 (f)) のもっと手っ取り早い証明法を，読者は思い付いたかもしれません．無順序対演算が $\mathbf{M}$ と $\mathbf{V}$ とで同じ意味をもつことがわかったなら，それを組み合わせて得られる順序対のような演算についても同じことのはずですから．つまり，次のことが成立します．

補題 3.10. 絶対的な概念の合成はまた絶対的である．すなわち，$\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ であって $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ と $F(x_1, \ldots, x_n)$ と $G_i(y_1, \ldots, y_m)$ $(i=1, \ldots, n)$ が $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ に対して絶対的であるとすれば，式

$$\phi(G_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, G_n(y_1, \ldots, y_m))$$

と関数

$$F(G_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, G_n(y_1, \ldots, y_m))$$

もまた絶対的である．

【証明】 $n=m=1$ の場合をいえば，$y \in \mathbf{M}$ のとき，$G^{\mathbf{M}}(y) = G^{\mathbf{N}}(y)$ で，ϕ も $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ に対して絶対的であるから

$$(\phi(G(y)))^{\mathbf{M}} \leftrightarrow \phi^{\mathbf{M}}(G^{\mathbf{M}}(y)) \leftrightarrow \phi^{\mathbf{N}}(G^{\mathbf{N}}(y)) \leftrightarrow (\phi(G(y)))^{\mathbf{N}}$$

であり，同様に

$$F(G(y))^{\mathbf{M}} = F^{\mathbf{M}}(G^{\mathbf{M}}(y)) = F^{\mathbf{N}}(G^{\mathbf{N}}(y)) = F(G(y))^{\mathbf{N}}$$

である．□

そこで，$\langle x,y \rangle$ が絶対的であることを証明する簡単な方法は，

$$\langle x,y \rangle = F(G_1(x,y), G_2(x,y)),$$

ただし $G_1(x,y) = \{x\}$, $F(x,y) = G_2(x,y) = \{x,y\}$ と書いて，F, G_1, G_2 が定理 3.9

の (d) と (e) によって絶対的であるという事実に訴えるものです．いっぽう，定理 3.9 (f) で述べた長い証明からは，順序対が Δ_0 関数であるというより強力な結果が得られます．一般には Δ_0 関数どうしの合成が Δ_0 関数になるとはかならずしもいえないのですが (演習問題 13)，具体的に反例をあげるには (演習問題 35 により) 基礎の公理を使う必要があります．次の定理でいくつかの関係や関数が絶対的であることを証明しますが，これらはどれも証明可能の意味で Δ_0 になります．

定理 3.11. 以下にあげる関係と関数は $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ の推移的モデルに対して絶対的である．

(a) z は順序対である．
(b) $A \times B$.
(c) R は関係である．
(d) $\mathrm{dom}(R)$.
(e) $\mathrm{ran}(R)$.
(f) R は関数である．
(g) $R(x)$.
(h) R は 1 対 1 関数である．

【証明】 z が順序対であるということは $\exists x \in \bigcup z \exists y \in \bigcup z\, (z = \langle x, y \rangle)$ と書け，この式は絶対的な関係に絶対的な関数を代入したものになっているので，補題 3.10 により絶対的である．補題 3.10 が適用できるという根拠をきちんと述べれば次のようになる：

$$z \text{ は順序対である} \leftrightarrow \phi(G_1(z), G_2(z), G_3(z))$$

と書こう．ここで $G_1(z) = G_2(z) = \bigcup z$ で，これは定理 3.9 により絶対的である．また，$G_3(z) = z$ であって，$\phi(a, b, c)$ は

$$\exists x \in a \exists y \in b (c = \langle x, y \rangle)$$

のことである．この式は，$c = \langle x, y \rangle$ という絶対的な式に有界な量化子を適用して得られるから絶対的である．今後は，この論法を《代入による》という一言で済ませることにする．

(b) から (h) までは次のとおり．

$$C = A \times B \leftrightarrow [\forall x \in A \forall y \in B (\langle x, y \rangle \in C) \wedge$$

$$\forall z \in C \exists x \in A \exists y \in B (z = \langle x, y \rangle)].$$

R は関係である $\leftrightarrow [\forall z \in R(z$ は順序対である$)]$.

$$A = \mathrm{dom}(R) \leftrightarrow [\forall x \in A \exists y \in \bigcup\bigcup R(\langle x, y \rangle \in R) \wedge$$
$$\forall x \in \bigcup\bigcup R \forall y \in \bigcup\bigcup R(\langle x, y \rangle \in R \to x \in A)].$$

R は関数である $\leftrightarrow [R$ は関係である $\wedge \forall x \in \bigcup\bigcup R \forall y \in \bigcup\bigcup R \forall y' \in \bigcup\bigcup R$

$$(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y' \rangle \in R \to y = y')].$$

$$y = R(x) \leftrightarrow [(\phi(x) \wedge \langle x, y \rangle \in R) \vee (\neg \phi(x) \wedge y = 0)],$$

ただし $\phi(x)$ は次の式：

$$\exists v \in \bigcup\bigcup R(\langle x, v \rangle \in R \wedge \forall w \in \bigcup\bigcup R(\langle x, w \rangle \in R \to v = w)).$$

最後に，R が 1 対 1 関数であることは，

R は関数である $\wedge \forall x \in \mathrm{dom}(R) \forall x' \in \mathrm{dom}(R)(R(x) = R(x') \to x = x')$

と書ける．このように，どの概念も絶対的な概念から代入と有界な量化子と命題演算によって作られる．したがってこれらはすべて絶対的である．(e) の証明は (d) と同様だから省略した．また (g) について言えば，$R(x)$ は実際には二つの変数 R と x をとる関数であり，もっと首尾一貫した記号を用いればたとえば $\mathrm{appl}(R, x)$ とでも書かれるべきものである．$\mathrm{appl}(R, x)$ の値は，$\exists! y(\langle x, y \rangle \in R)$ が成立しているなら $\langle x, y \rangle \in R$ をみたす y であり，そうでないときには $\mathrm{appl}(R, x) = 0$ とする．□

絶対性を確認するほうがいいと思われる概念はもちろん他にも数限りなくあります．たとえば《f は A を A の上に写し，不動点をもたない》のように．定理 3.11 にそれらすべてをリストアップするわけにはいかなかったので，代わりに，今後必要に応じて《これは第 3 節の方法で絶対的とわかる》と言って済ませることにします．

絶対性について得られた結果のおかげで，無限公理を検証することはまったく簡単になります．

補題 3.12. $\mathbf{M}$ を $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ の推移的モデルとする．$\omega \in \mathbf{M}$ であれば，無限公理は $\mathbf{M}$ で真である．

【証明】 0 と S が絶対的であることにより，無限公理を $\mathbf{M}$ に相対化したものは

$$\exists x\in \mathbf{M}(0\in x\wedge \forall y\in x(S(y)\in x))$$

となるが，これは $x=\omega$ とすれば成立する．□

同じ議論により無限公理が $R(\omega)$ で成立しないことがわかります．なぜなら，**WF** の要素が 0 を含み S のもとで閉じているとしたら，その階数は有限でありえないからです．ここまでの $R(\omega)$ についての議論の結果は次の定理にまとめられます．

定理 3.13. (ZF^-)　$R(\omega)$ は $\mathrm{ZFC}-\mathrm{Inf}+(\neg\mathrm{Inf})$ のモデルである．

【証明】 ここまでの議論と補題 2.13 により，あとは AC が $R(\omega)$ で成立していることをチェックするだけである．このためには

$$\forall A\in R(\omega)\exists R\in R(\omega)[(R \text{ は } A \text{ を整列順序づけする})^{R(\omega)}]$$

を確かめる必要がある．$R(\omega)$ の要素 A を考えよう．AC を使うまでもなく，A は有限集合なので整列順序づけ可能である．そこで A を整列順序づけする $A\times A$ の部分集合 R を考えると $R\in R(\omega)$ である．$(R \text{ は } A \text{ を整列順序づけする})^{R(\omega)}$ は以下の補題から導かれるので，それを示せば定理の証明も完了する．□

補題 3.14. (ZF^-)　$\mathbf{M}$ を $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ の推移的モデルとする．A と R は $\mathbf{M}$ の要素で，R は A を整列順序づけするものとする．このとき $(R \text{ は } A \text{ を整列順序づけする})^{\mathbf{M}}$.

【証明】 $(R \text{ が } A \text{ を全順序づけする})^{\mathbf{M}}$ ことは定理 3.11 の方法でわかる．というのも，この性質は順序対に関する単純な式と A の要素に制限された量化子だけを使って表現されているから．整列順序については，式 $\phi(X,A,R)$ を

$$X\subset A\wedge X\neq 0\rightarrow \exists y\in X\forall z\in X(\langle z,y\rangle\notin R)$$

のことだとして，$(\forall X\,\phi(X,A,R))^{\mathbf{M}}$ を確かめる必要がある．$\phi(X,A,R)$ は定理 3.11 の方法で $\mathbf{M}$ に対して絶対的とわかる．そこで，確かめるべきことは $\forall X\in \mathbf{M}\,\phi(X,A,R)$ になるが，R は現に A を整列順序づけしているから，じつはより強く $\forall X\,\phi(X,A,R)$ である．□

この補題の証明から，より一般に次のことがわかります．絶対的な式に全称量化子をつけて得られた式は，**V** から **M** へと**下向き**に相対化できますが，逆に **M** から **V** へと**上向き**に相対化できるとは限りません．$(R \text{ は } A \text{ を整列順序づけする})^{\mathbf{M}}$

が成立しているのに，R が A を整列順序づけできていない，ということは起こりえます．というのも，A の部分集合 X のうち $\mathbf{M}$ に属してないものについては R-最小要素が存在しないかもしれないからです (演習問題 21)．基礎の公理を仮定すれば整列順序づけの概念は絶対的になります (定理 5.4) が，全称量化子を本質的に用いた他の性質のなかには，たとえば基数であることなどのように，絶対的にならないものがあります．これについては，系 7.11 のあとのコメントも参照してください．

補題 2.3 と定理 3.13 から次の相対的無矛盾性が導かれます．

系 3.15. $\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^-) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf} + \neg\mathrm{Inf})$. □

§4　基礎の公理についてもう一言だけ

この節で $\mathbf{WF}$ の理論を完成させましょう．そのあとは基礎の公理は特に断らない限り仮定されているとし，議論の出発点となる公理系としては ZF を使います (第 VII 章と第 VIII 章では ZFC を使います)．

定理 4.1. (ZF^-)　ZF の公理はすべて $\mathbf{WF}$ で真である．

【証明】 補題 2.13 と補題 3.12 による．□

では AC についてはどうでしょうか．次の結果は $\mathbf{WF}$ に特有で，他に応用される機会はありません．

補題 4.2. $A \in \mathbf{WF}$ とする．A が整列順序づけ可能であるとき，かつそのときに限り (A は整列順序づけ可能である)$^{\mathbf{WF}}$ も成立する．

【証明】 まず A が整列順序づけ可能であったと仮定し，R を A を整列順序づけするような $A \times A$ の部分集合とする．第 III 章補題 2.8 によって $A \times A \in \mathbf{WF}$ であり，したがって第 III 章補題 2.10 によって $R \in \mathbf{WF}$ である．補題 3.14 によればこのとき (R は A を整列順序づけする)$^{\mathbf{WF}}$ ので，(A は整列順序づけ可能である)$^{\mathbf{WF}}$．逆に (A が整列順序づけ可能である)$^{\mathbf{WF}}$ と仮定し，(R が A を整列順序づけする)$^{\mathbf{WF}}$ ような $\mathbf{WF}$ の要素 R を考えよう．このとき，補題 3.14 の証明にあったとおり，R は A を全順序づけし，A の空でない部分集合のうち $\mathbf{WF}$ に属するものについては R-最小要素がある．しかし A の部分集合はすべて (第 III 章補題 2.10 により) $\mathbf{WF}$ に属するので，R は A の整列順序づけになっている．□

系 4.3. (ZF^-)　$AC \to (AC)^{\mathbf{WF}}$. □

整礎的集合はすべて整列順序づけ可能であるけれども，整礎的でなく整列順序づけもできない集合が存在するということが矛盾しないので，系 4.3 の逆はかならずしも成立しません．演習問題 25 を見てください．

ZF^- において **WF** が ZF のモデルであることをが証明され，ZFC^- において **WF** が ZFC のモデルであることが証明されたので，次の結果が得られます．

系 4.4. $\mathrm{Con}(ZF^-) \to \mathrm{Con}(ZF)$ そして $\mathrm{Con}(ZFC^-) \to \mathrm{Con}(ZFC)$. □

第 V 章と第 VI 章では $\mathrm{Con}(ZF) \to \mathrm{Con}(ZFC)$ を証明します．

相対的無矛盾性証明のさいに出発点となる公理の一つとして基礎の公理を用いることは，この系 4.4 によって正当化されます．これは技術的な観点からもたいへん好都合で，そのおかげでいっそう多くの概念の絶対性が確立されることになります (第 5 節を見てください)．しかし，ただ便利というだけの理由で基礎の公理を使うわけではありません．すでに (第 III 章第 2 節で) 見たとおり，通常の数学の対象はすべて **WF** に属しているし，整列順序をはじめとするさまざまな数学的概念 (演習問題 3 にもっと多くの例があります) はどれも **WF** に対して絶対的です．だから，数学をする上では，**WF** の中に住み込んでもかまわないわけです．

GCH やその否定といったさまざまな集合論的言明のモデルをこの先構成していきますが，そうしたモデルは **WF** と違ってその場限りのものという性格が強く，その言明が集合論の基本的な公理の一つになるべきか否かといった，もっともらしさの議論は伴いません．

直感的にいえば，ZF は整礎集合に関する公理系であるいっぽう，ZF^- は遺伝的集合 (第 I 章第 4 節) に関する公理系といえます．ひょっとしたらイヌもネコも含めた《存在するものすべて》に関する公理系 ZF^{--} のようなものから始めるほうが哲学的にはより満足の行く結果が得られたかもしれません．そうしなかった理由は，そうするには ZF の公理のいくつかを単に除外するだけでは済まず，もっと大がかりな手直しが必要になるからです．ZF^{--} を記述するには，二項関係 $\in$ の他に 1 変数の述語記号 $\mathrm{Set}(x)$ (“x は集合である”) を含む言語を使います．そして，ZF^- の公理の一つ一つを，Set を含むようにうまく書き直すことになります．たとえば外延性公理は

$$\forall x \forall y\,(\mathrm{Set}(x) \wedge \mathrm{Set}(y) \wedge \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

となります．ここで変数 z の範囲は Set に限られないことに注意してください．集合の要素は集合とは限らないからです．このとき，ZF^- は $\mathrm{ZF}^{--}+\forall x\,\mathrm{Set}(x)$ という理論のことだといえます．ZF^{--} 集合論では，クラス **WF** と **HS** を定義できます．ここで **HS** は

$$\mathbf{HS}=\{x:\mathrm{Set}(x)\wedge\forall n\in\omega\forall y\in\bigcup^n x\,(\mathrm{Set}(y))\}$$

と定義されます．$\mathbf{WF}\subset\mathbf{HS}\subset\mathbf{V}$ であること，**HS** が ZF^- をみたすこと，**WF** が ZF をみたすことが，ZF^{--} 集合論で証明できます．したがって

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^{--})\rightarrow\mathrm{Con}(\mathrm{ZF})$$

となるのです．

§5 絶対性についてもう少し

ここからは公理の一つとして基礎の公理が加わります．関係 $\in$ が整礎的であることを使うと，絶対性に関する数多くの新しい結果が導かれます．その基本にあるのは順序数であるという性質が絶対的になることで，そのことを，関連するいろいろな結果とともに次の定理で主張しています．

定理 5.1. 以下に述べる関係と関数は ZF − P において定義され，定義に用いられる式はある Δ_0 式との同値性を ZF − P において証明できるものばかりである．したがって，これらはいずれも ZF − P の推移的モデルに対して絶対的である．

(a) x は順序数である．

(b) x は極限順序数である．

(c) x は後続型順序数である．

(d) x は有限順序数である．

(e) ω.

(f) 0.

(g) 1.

(h) 2.

…

(z) 20.

【証明】ZF − P で考えれば，(第 III 章定理 4.2 により) x が順序数であるためには，

x が推移的で $\in$ によって全順序づけされていることが必要かつ十分である．定理 3.9 によれば x が推移的であることは Δ_0 式と同値であり，x が $\in$ によって全順序づけされることは

$$\forall y \in x \forall z \in x\,(y \in z \vee y = z \vee z \in y) \vee \ldots$$

といったように x に制限された量化子だけで表現でき，これも Δ_0 式で書ける．こうして (a) が証明される．

(b) について：x が極限順序数であることは，x が順序数で，$\forall y \in x \exists z \in x(y \in z)$ で，$x \neq 0$ であるということだが，これらはすべて Δ_0 で書ける (定理 3.9 により $x = 0$ は Δ_0 である)．(c) について：x が後続型順序数であることは，x が順序数であり，極限順序数でも 0 でもないということである．(d) について：x が有限順序数であるとは，x 自身およびそのすべての要素が後続型順序数または 0 であるということである．

(d) が言っているのは $x \in \omega$ という (x に関する) 式は Δ_0 式で表現できるということであり，(e) は $x = \omega$ についてそのことを主張している．(e) を確かめるには次のことに注意すればよい：$x = \omega$ となるためには，x は極限順序数だが x のどの要素も極限順序数ではない，ということが必要かつ十分である．

(f) については定理 3.9 で済んでいる．(g) から (z) までについては，定理 3.9 から $x = S(y)$ が Δ_0 であることを思い出して，

$$x = 1 \leftrightarrow \exists y \in x\,(y = 0 \wedge x = S(y))$$

$$x = 2 \leftrightarrow \exists y \in x\,(y = 1 \wedge x = S(y))$$

$$\cdots$$

$$x = 20 \leftrightarrow \exists y \in x\,(y = 19 \wedge x = S(y))$$

のように考えればよい．□

上の議論のうち，(e) を証明するとき ω が存在することを示す必要があった以外にはモデル **M** が無限公理をみたしている必要はありませんでした．また (f) から (z) までについては基礎の公理も必要ありません．しかし，ここではそういった細部についていちいち書き記さないことにします．

順序数の概念や有限順序数全体の集合の概念が絶対的であるという事実からは，関連するいろいろな概念，たとえば整列順序や有限集合などの概念が絶対的であることが導かれます．

補題 5.2. $\mathbf{M}$ が ZF − P の推移的モデルであれば，$\mathbf{M}$ の有限部分集合はすべて $\mathbf{M}$ に属する．

【証明】 自然数 n に関する帰納法によって

$$\forall x \subset \mathbf{M}(|x| = n \to x \in \mathbf{M})$$

を証明しよう．$n=0$ の場合これは 0 の絶対性にほかならない．n の場合がすでにわかっているものとして，$n+1$ 個の要素からなる $\mathbf{M}$ の部分集合 x を考える．x の要素 y をとるとそれは $\mathbf{M}$ に属し，また $x \setminus \{y\}$ も $\mathbf{M}$ に属する．$x = \{y\} \cup (x \setminus \{y\})$ であり，定理 3.9 によって対と和と $\setminus$ は絶対的だから，x も $\mathbf{M}$ に属す．□

定理 5.3. 次にあげる概念は ZF − P の任意の推移的モデル $\mathbf{M}$ に対して絶対的である．

(a) x は有限集合である．

(b) A^n.

(c) $A^{<\omega}$ $(=\bigcup\{A^n : n \in \omega\})$.

【証明】 ZF − P で考えると，x が有限集合であるということを $\exists f\, \phi(x,f)$ の形に書ける．ここで $\phi(x,f)$ は

$$f \text{ は関数である} \wedge \mathrm{dom}(f) = x \wedge \mathrm{ran}(f) \in \omega \wedge f \text{ は 1 対 1}$$

という式とする．この ϕ は定理 3.11 と定理 5.1 により $\mathbf{M}$ に対して絶対的である．そこで，あとは

$$\exists f \in \mathbf{M}\, \phi(x,f) \leftrightarrow \exists f\, \phi(x,f)$$

が示されればよい．左辺から右辺が導かれることは明らかである．右辺から左辺が導かれるのは

$$\phi(x,f) \to f \in \mathbf{M}$$

という事実による．これは次のようにして確かめられる．$\phi(x,f)$ であれば f は $\mathbf{M}$ の要素の順序対の有限集合である．順序対は絶対的だから $\mathbf{M}$ は順序対を作る操作のもとで閉じており，したがって補題 5.2 によって $f \in \mathbf{M}$ となる．

(b) と (c) について考える前に気を付けておくべきことがある．A^n は 2 変数の関数 $F(A,n)$ として定義されていると考える必要がある．ただし $x \notin \omega$ のときは $F(A,x) = 0$ と定める．また，$A^{<\omega}$ は 1 変数の関数 $G(A)$ として定義されている．

F も G も ZF − P を出発点として定義されている (第 I 章の定義 7.21 とそのあとの議論を思い出そう).

さて，(b) を示すには $A, x \in \mathbf{M}$ のとき $F(A,x) = F^{\mathbf{M}}(A,x)$ となることを示さなければならない．ω は絶対的だから，$x \notin \omega$ のときは $F^{\mathbf{M}}(A,x) = 0$ である．また関数をめぐるいろいろな概念が絶対的であったことから，$n \in \omega$ のとき

$$F^{\mathbf{M}}(A,n) = \{ f \in \mathbf{M} : f \text{ は関数である} \wedge \mathrm{dom}(f) = n \wedge \mathrm{ran}(f) \subset A \}$$

であって，これが $F(A,n)$ と一致することは (a) の場合と同じようにしてわかる．(c) についても同様である．□

定理 5.4. 次に述べる概念はいずれも ZF − P をみたす推移的モデルに対して絶対的である．

(a) R は A を整列順序づけする．

(b) $\mathrm{type}(A,R)$.

【証明】 (a) を示すには，$\mathbf{M}$ に属する A と R について

$$(R \text{ は } A \text{ を整列順序づけする})^{\mathbf{M}} \rightarrow (R \text{ は } A \text{ を整列順序づけする})$$

となることを示せば十分．反対向きの含意は補題 3.14 で証明済み．どんな整列順序もなんらかの順序数と同型になるというのは，ZF − P で証明できる定理である (第 I 章定理 7.6)．そこでもしも (R が A を整列順序づけする)$^{\mathbf{M}}$ ならば，$\mathbf{M}$ のなんらかの要素 f と α について (α は順序数であり f は $\langle A, R \rangle$ から α への同型写像である)$^{\mathbf{M}}$．ところが定理 5.1 と第 3 節の方法を使うと，この式は $\mathbf{M}$ に対して絶対的である．つまり α は本当に順序数であり，f は本当に同型写像である．それゆえ R は本当に A を整列順序づけし，その順序型は α となる．そこで，$\mathrm{type}(A,R)$ の絶対性も同時に確かめられたことになる．□

順序数の算術は，そのほとんどが絶対的です．次に例を示します．

定理 5.5. 次に述べる概念はいずれも ZF − P をみたす推移的モデルに対して絶対的である．

(a) $\alpha + 1$.

(b) $\alpha - 1$ (第 I 章定義 9.4).

(c) $\alpha + \beta$.

(d) $\alpha\cdot\beta$.

【証明】 $\alpha+1$ とは $S(\alpha)$ のこと．(b) については

$$x=\alpha-1\leftrightarrow(\alpha \text{ は後続型順序数}\wedge\alpha=x+1)\vee$$
$$(\alpha \text{ は後続型順序数でない}\wedge\alpha=x).$$

(d) については

$$\alpha\cdot\beta=\mathrm{type}(\beta\times\alpha,\mathrm{lex}(\beta,\alpha))$$

ただし $\mathrm{lex}(\beta,\alpha)$ は $\beta\times\alpha$ の辞書式順序づけで，これが絶対的であることは第 3 節の方法で容易に確かめられる．(c) についても同様. □

順序数の和や積を超限再帰を用いて定義されたものと考えるなら，それらの絶対性はこの定義法の絶対性についての一般論から結論づけられます．次にこれを論じましょう．

再帰的定義についての私たちの定理 (第 III 章定理 5.6) はクラスの言葉で書かれていたので，クラスの相対化がどういう意味をもつかをまず指摘しておきましょう．クラス $\mathbf{A}$ とは，正式には (第 I 章第 9 節を見てください) 式 $\mathbf{A}(x)$ であるものを直感的に $\mathbf{A}=\{x:\mathbf{A}(x)\}$ とみなしているのです．$\mathbf{A}^{\mathbf{M}}$ は $\{x\in\mathbf{M}:\mathbf{A}(x)^{\mathbf{M}}\}$ のことだとしましょう．すると，$\mathbf{A}$ が $\mathbf{M}$ に対して絶対的であるとは $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}=\mathbf{A}\cap\mathbf{M}$ となることにほかなりません．たとえば $\mathbf{V}$ は式 $x=x$ でこれはどんなときも絶対的ですから，$\mathbf{V}^{\mathbf{M}}=\mathbf{M}$ です．$\mathbf{M}$ が ZF－P の推移的モデルであるときは $\mathbf{ON}^{\mathbf{M}}=\mathbf{ON}\cap\mathbf{M}$ となります．二つ以上の変数の関係であるようなクラスについても同様です．すなわち，$\mathbf{R}\subset\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ のとき (というのは $\mathbf{R}(x,y)$ という式について $\mathbf{R}=\{\langle x,y\rangle:\mathbf{R}(x,y)\}$ とみなしているわけですが) $\mathbf{R}^{\mathbf{M}}=\{\langle x,y\rangle\in\mathbf{M}\times\mathbf{M}:\mathbf{R}(x,y)^{\mathbf{M}}\}$ であって，$\mathbf{R}$ が $\mathbf{M}$ に対して絶対的であるとは $\mathbf{R}^{\mathbf{M}}=\mathbf{R}\cap(\mathbf{M}\times\mathbf{M})$ ということになります．

関数をなすクラスの相対化についても考えておきましょう．$\mathbf{G}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ としましょう．これは $\mathbf{G}(x,y)$ という式について $\forall x\exists!y\mathbf{G}(x,y)$ となっているということです．この $\mathbf{G}$ を順序対の集まり $\{\langle x,y\rangle:\mathbf{G}(x,y)\}$ とみなしているのです．ところが，$\mathbf{G}(x)$ という記号を使うことは，式 $\mathbf{G}(x,y)$ を使う定義によって演算記号を追加することと論理的には同等ですから，定義によって追加された関数について第 2 節で考えた取り決めに，ここでも従うことにします．つまり $\mathbf{G}^{\mathbf{M}}$ という関数を

扱うのは $(\forall x \exists ! y \mathbf{G}(x,y))^{\mathbf{M}}$ であることがわかっている場合に限ります．そのことを前提にして言えば，$\mathbf{G}^{\mathbf{M}}\colon \mathbf{M}\to\mathbf{M}$ であり，また $\mathbf{G}$ が $\mathbf{M}$ に対して絶対的であるとは $\mathbf{G}^{\mathbf{M}}=\mathbf{G}\restriction\mathbf{M}$ となることにほかなりません．ここで注意してほしいのですが，$\mathbf{G}$ を本当に関数として扱っているかどうか文脈の中で明らかにしておく必要があります．なぜなら，関係としての $\mathbf{G}$ の絶対性の場合はただ $\mathbf{G}^{\mathbf{M}}=\mathbf{G}\cap(\mathbf{M}\times\mathbf{M})$ が必要なだけで，$\mathrm{dom}(\mathbf{G}^{\mathbf{M}})$ が $\mathbf{M}$ に一致することまでは要求されていないからです．

定理 5.6. $\mathbf{R}$ をクラス $\mathbf{A}$ 上で整礎的かつ集合状であるような関係とし，$\mathbf{F}\colon \mathbf{A}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ とする．$\mathbf{G}$ は

$$\forall x\in\mathbf{A}[\mathbf{G}(x)=\mathbf{F}(x,\mathbf{G}\restriction\mathrm{pred}(\mathbf{A},x,\mathbf{R}))].$$

をみたすように (第 III 章定理 5.6 に従って) 定義された $\mathbf{A}$ 上の関数とする．いま $\mathbf{M}$ を ZF－P の推移的モデルとし，次の条件がみたされているものとする．

(1) $\mathbf{F}$ は $\mathbf{M}$ に対して絶対的である．

(2) $\mathbf{R}$ と $\mathbf{A}$ は $\mathbf{M}$ に対して絶対的で，($\mathbf{R}$ は $\mathbf{A}$ 上で集合状であり)$^{\mathbf{M}}$，さらに

$$\forall x\in\mathbf{M}(\mathrm{pred}(\mathbf{A},x,\mathbf{R})\subset\mathbf{M})$$

が成立している．

このとき，$\mathbf{G}$ は $\mathbf{M}$ に対して絶対的である．

【証明】まず ($\mathbf{R}$ は $\mathbf{A}$ 上で整礎的)$^{\mathbf{M}}$ である．なぜなら，$\mathbf{R}^{\mathbf{M}}=\mathbf{R}\cap(\mathbf{M}\times\mathbf{M})$ であってこれが $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}$ すなわち $\mathbf{A}\cap\mathbf{M}$ 上で整礎的なので，$\mathbf{A}^{\mathbf{M}}$ の空でない部分集合で $\mathbf{M}$ に属するものはすべて $\mathbf{R}^{\mathbf{M}}$-極小要素をもつ．そこで，$\mathbf{M}$ の中で超限再帰を実行すれば，

$$\forall x\in\mathbf{A}^{\mathbf{M}}[\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x)=\mathbf{F}^{\mathbf{M}}(x,\mathbf{G}^{\mathbf{M}}\restriction\mathrm{pred}^{\mathbf{M}}(\mathbf{A}^{\mathbf{M}},x,\mathbf{R}^{\mathbf{M}}))]$$

をみたすような $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}$ 上の関数 $\mathbf{G}^{\mathbf{M}}$ が定義される．このとき $\mathbf{G}^{\mathbf{M}}=\mathbf{G}\restriction\mathbf{A}^{\mathbf{M}}$ となることが超限帰納法によって示される．なぜなら，$\{x\in\mathbf{A}^{\mathbf{M}}\colon\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x)\neq\mathbf{G}(x)\}$ の $\mathbf{R}$-極小要素があれば，仮定にある絶対性の条件によって矛盾に導かれるから．□

応用上重要なたいていの場合，たとえば $\mathbf{R}$ が $\in$ で $\mathbf{A}$ が $\mathbf{V}$ や $\mathbf{ON}$ であるような場合には，定理 5.2 の条件 (2) はいちいち確かめるまでもない自明なことになります．

定理 5.7. 次に述べる概念はいずれも ZF－P をみたす推移的モデルに対して絶対的である．

(a) 順序数の冪 α^β.

(b) $\mathrm{rank}(x)$ ($=\mathrm{rank}(x, \mathbf{V}, \in)$, 第 III 章定義 5.8).

(c) $\mathrm{trcl}(x)$.

【証明】 順序数の冪 α^β は β に関する再帰で定義される (第 I 章定義 9.5). $\mathrm{rank}(x)$ は x に関する再帰で定義される. $\mathrm{trcl}(x)$ については, まず $\overset{n}{\bigcup} x$ を n に関する再帰で次のように定めよう.

$$\bigcup^y(x) = \begin{cases} 0, & y \notin \omega \text{ のとき}. \\ x, & y = 0 \text{ のとき}. \\ \bigcup\left(\overset{y-1}{\bigcup} x\right), & 0 \in y \in \omega \text{ のとき}. \end{cases}$$

このとき $\overset{y}{\bigcup}(x)$ は二つの変数 x と y の関数として絶対的だから,

$$\mathrm{trcl}(x) = \bigcup\{\bigcup^n(x) : n \in \omega\}$$

で定められる $\mathrm{trcl}(x)$ も絶対的である. □

定理 5.7 (b) で $\mathrm{rank}(x)$ を再帰によって定義されたと考えているという点は重要です. 私たちはもともと $R(\alpha)$ を使って階数を定義していた (第 III 章定義 2.4) のですが, $\mathbf{M}$ が冪集合の公理をみたさない場合は $R(\alpha)^{\mathbf{M}}$ が定義されません. 冪集合の公理のもとでは, 階数の二通りの定義は第 III 章の補題 5.8 により同等になります.

$\mathbf{M}$ が冪集合の公理をみたすとすると, $\mathcal{P}(x)^{\mathbf{M}}$ と $R(\alpha)^{\mathbf{M}}$ が定義されます. しかしこれらは階数の場合と異なり一般には絶対的ではありません.

補題 5.8. $\mathbf{M}$ を $\mathbf{ZF}$ の推移的モデルとする. このとき

(a) $x \in \mathbf{M}$ ならば, $\mathcal{P}(x)^{\mathbf{M}} = \mathcal{P}(x) \cap \mathbf{M}$.

(b) $\alpha \in \mathbf{M}$ ならば, $R(\alpha)^{\mathbf{M}} = R(\alpha) \cap \mathbf{M}$.

【証明】 (a) は $\subset$ 関係の絶対性から導かれる. (b) は階数の絶対性と, 等式 $R(\alpha) = \{x : \mathrm{rank}(x) < \alpha\}$ から導かれる. □

第 VII 章と第 VIII 章では $\mathbf{M}$ が可算集合である場合を考えます. 第 7 節ではこのような場合がありうることを示します. その場合は x が有限集合でない限り $\mathcal{P}(x)^{\mathbf{M}} \neq \mathcal{P}(x)$ ですし, α が有限順序数か ω である場合でない限り $R(\alpha)^{\mathbf{M}} \neq R(\alpha)$ となるのです.

§6　$H(\kappa)$ について

この節では，ZFC の中で ZFC − P の集合モデルを作り出すある重要な方法について考えます．

定義 6.1. 無限基数 κ に対して $H(\kappa)=\{x:|\mathrm{trcl}(x)|<\kappa\}$. □

私たちは，$|y|<\kappa$ を y が整列順序づけ可能で濃度が κ 未満であることと定義しているので，定義 6.1 には AC は不要です．しかし，$H(\kappa)$ の性質を調べる際には AC の助けが必要です．

$H(\kappa)$ の要素は，**遺伝的に**濃度 κ 未満であるといわれます．$H(\omega)$ の要素は**遺伝的に有限**な集合であり，$H(\omega_1)$ は**遺伝的に可算**な集合全体の集合です．$H(\kappa)$ が真のクラスでなく集合になることは次の補題からわかります．

補題 6.2. 任意の無限基数 κ について $H(\kappa)\subset R(\kappa)$.

【証明】 $H(\kappa)$ の任意の要素 x について $\mathrm{rank}(x)<\kappa$ を証明しよう．$t=\mathrm{trcl}(x)$ とおき $S=\{\mathrm{rank}(y):y\in t\}$ を考えると $S\subset\mathbf{ON}$ である．S が順序数であることをみるために α を S に属さない順序数のうち最小のものとしよう．すると $\alpha\subset S$ である．$\alpha\neq S$ だと仮定して α に属さない S の要素のうち最小のもの β を考え，$\beta=\mathrm{rank}(y)$ をみたす t の要素 y をとる．t は推移的だから $\forall z\in y(\mathrm{rank}(z)<\alpha)$ となり

$$\mathrm{rank}(y)=\sup\{\mathrm{rank}(z)+1:z\in y\}\leq\alpha$$

となるが，これは不合理である．そこで $\alpha=S$ である ([コメント] じつは $\alpha=\mathrm{rank}(x)=\{\mathrm{rank}(y):y\in\mathrm{trcl}(x)\}$ です．第 III 章の演習問題 13 も見てください)．

ここで $|t|<\kappa$ だったから $\alpha<\kappa$ である．$x\subset t\subset R(\alpha)$ より，$\mathrm{rank}(x)\leq\alpha<\kappa$ となる．□

たいていの場合は $H(\kappa)$ は $R(\kappa)$ の真部分集合です．たとえば

$$\mathcal{P}(\omega)\in R(\omega_1)\setminus H(\omega_1)$$

です．より詳しくいうと，次のことが成立します．

補題 6.3. (AC)　正則基数 κ について，$H(\kappa)=R(\kappa)$ となるための必要十分条件は $\kappa=\omega$ かまたは κ が強到達不能基数であることである．

【証明】 $\kappa=\omega$ のとき，あるいは κ が強到達不能基数のときには，帰納法によって容易に

$$\forall\alpha<\kappa\,(|R(\alpha)|<\kappa)$$

がわかる．ここで $\mathrm{rank}(x)=\alpha<\kappa$ なら $\mathrm{trcl}(x)\subset R(\alpha)$, したがって $|\mathrm{trcl}(x)|<\kappa$ である．こうして $R(\kappa)\subset H(\kappa)$ となり，補題 6.2 とあわせて $H(\kappa)=R(\kappa)$ となる．

κ が不可算な正則基数だが強到達不能基数ではない場合，$\lambda<\kappa$ かつ $2^\lambda\geq\kappa$ をみたす λ をとれば $\mathcal{P}(\lambda)\in R(\kappa)\setminus H(\kappa)$ となる．□

κ が特異基数の場合は演習問題 5 を見てください．次の補題に $H(\kappa)$ のおもな性質を列挙しておきます．

補題 6.4. 任意の無限基数 κ について

(a) $H(\kappa)$ は推移的．
(b) $H(\kappa)\cap\mathbf{ON}=\kappa$.
(c) $x\in H(\kappa)$ ならば $\bigcup x\in H(\kappa)$.
(d) $x,y\in H(\kappa)$ ならば $\{x,y\}\in H(\kappa)$.
(e) $x\in H(\kappa)$ かつ $y\subset x$ のとき $y\in H(\kappa)$.
(f) (AC) κ が正則基数であれば，$\forall x(x\in H(\kappa)\leftrightarrow x\subset H(\kappa)\wedge|x|<\kappa)$.

【証明】 (a) は $y\in x$ ならば $\mathrm{trcl}(y)\subset\mathrm{trcl}(x)$ であるという事実から導かれる．(b) は $\mathrm{trcl}(\alpha)=\alpha$ という事実から導かれる．(c) から (e) についても同様．(f) は次のとおり．$x\subset H(\kappa)$ かつ $|x|<\kappa$ とするとき (第 III 章補題 3.5 により)

$$\mathrm{trcl}(x)=x\cup\bigcup\{\mathrm{trcl}(y):y\in x\}$$

であるから，$\mathrm{trcl}(x)$ は κ 個未満の濃度が κ 未満の集合の和集合となる．κ が正則基数であることから (AC のもとでは) $\mathrm{trcl}(x)$ の濃度も κ 未満となる．□

定理 6.5. (AC)　κ が不可算な正則基数のとき $H(\kappa)$ は ZFC − P のモデルである．

【証明】 $H(\kappa)$ は推移的集合なので外延性公理をみたし，基礎の公理は任意のモデルでみたされる (補題 2.12)．ZF − P − Inf の残りの公理は，補題 6.4 を使えば $R(\omega)$ や **WF** について補題 2.13 を証明したのとまったく同様にできる．特に，和集合の公理は補題 6.4 (c) に，対の公理は補題 6.4 (d) によればよく，6.4 (e) から内包性公理，6.4 (f) から置換公理が確かめられる．

残るのは AC が $H(\kappa)$ で真になることだが，(定理 5.4 により) 整列順序づけの概念は $H(\kappa)$ に対して絶対的なので，

$$\forall A\in H(\kappa)\exists R\in H(\kappa)\,(\,R\,\text{は}\,A\,\text{を整列順序づけする}\,)$$

となることを確かめれば十分である．任意の $A\in H(\kappa)$ を考えこれを整列順序づける $A\times A$ の部分集合 R を ($\mathbf{V}$ での AC を使って) とる．すると補題 6.4 (d) によって $R\subset H(\kappa)$ であり，これと補題 6.4(f) によって $R\in H(\kappa)$ となる．□

定理 6.6. (AC)　κ を不可算な正則基数とするとき，次のことは同値である．

(a) $H(\kappa)$ は ZFC をみたす．

(b) $H(\kappa)=R(\kappa)$.

(c) κ は強到達不能基数である．

【証明】 (b) と (c) が同値であることは補題 6.3 そのものである．(a) について考えよう．$H(\kappa)$ が冪集合の公理をみたすということは

$$\forall x\in H(\kappa)\exists y\in H(\kappa)\forall z\in H(\kappa)\,(z\subset x\rightarrow z\in y)$$

ということにほかならない．ところが $z\subset x\in H(\kappa)\rightarrow z\in H(\kappa)$ であり，また $H(\kappa)$ は内包性公理をみたすので，冪集合の公理が $H(\kappa)$ で成立するためには

$$\forall x\in H(\kappa)(\mathcal{P}(x)\in H(\kappa))$$

となることが必要十分ということになる．この式は $H(\kappa)=R(\kappa)$ の場合には真だが，$\lambda<\kappa$ かつ $2^{\lambda}\geq\kappa$ となるような λ がある場合には $\lambda\in H(\kappa)$ かつ $\mathcal{P}(\lambda)\notin H(\kappa)$ となって真ではない．□

κ として到達不能基数以外を選べば

$$\mathrm{Con(ZFC)}\rightarrow\mathrm{Con(ZFC-P+\neg(\text{冪集合の公理}))}$$

が得られます．したがって冪集合の公理はそれ以外の ZFC の公理によって証明することはできません．ここで $\kappa=\omega_1$ とすればもっと強い次の結果も得られます．

系 6.7. $\mathrm{Con(ZFC)}\rightarrow\mathrm{Con(ZFC-P}+\forall x(x\,\text{は可算集合}))$.

【証明】 ZFC 集合論の内部で ZFC − P のモデル $H(\omega_1)$ が定義された．$x\in H(\omega_1)$ のとき x は可算集合であり，ω から x の上へのどんな関数も $H(\omega_1)$ に属するので，$(x\,\text{は可算集合である})^{H(\omega_1)}$ となる．□

κ が強到達不能基数であれば，基数の算術のおもな結果が $H(\kappa)$ に対して絶対的であることが容易にわかります (演習問題 2)．ここでは次のことを指摘するにとど

めておきます.

補題 6.8. (AC) κ が強到達不能基数であれば, 《α は強到達不能基数》は $H(\kappa)$ に対して絶対的である. □

特に κ として最小の強到達不能基数をとれば, $H(\kappa)$ は ZFC と強到達不能基数の不存在のモデルになります.

系 6.9. $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \neg\exists\kappa(\kappa$ は強到達不能基数$))$.

【証明】κ が強到達不能基数であることを $\mathrm{Si}(\kappa)$ と書こう. 正式に言えば, ZFC で考えている限り $\exists\kappa\mathrm{Si}(\kappa)$ を証明することは (この系そのものによって) できないから, そのような最小の κ を定めることもできないはずである. そのかわり

$$\mathbf{M} = \{x : \forall\kappa(\mathrm{Si}(\kappa) \to x \in H(\kappa))\}$$

と定義しよう. すると ZFC で考えている限り $\mathbf{M}$ が $\mathbf{V}$ になるか最小の到達不能基数 κ についての $H(\kappa)$ になるかは決定できないが, いずれにせよ $\mathbf{M}$ は ZFC+$\neg\exists\kappa\mathrm{Si}(\kappa)$ をみたす. □

すると次には当然の疑問として, ZFC から出発して ZFC+$\exists\kappa\mathrm{Si}(\kappa)$ のモデルを作れるかどうかが問われます. 答えはノーです. これについて詳しくは第 10 節を見てください.

§7 各種の反映定理

ZFC の公理すべてのモデルになるような集合 M があるでしょうか. 前の節では, κ が正則基数であれば $H(\kappa)$ が ZFC−P のモデルになることを見ました. ただし, κ が強到達不能基数でない限り $H(\kappa)$ では羃集合の公理が成立せず, その強到達不能基数の存在は ZFC では証明できないのでした. ZFC の範囲だけで議論して, ZFC の公理すべてのモデルとなるような集合を作ることは可能でしょうか.

限りなく可能に近い, とはいえます. ZFC の有限個の公理のどんなリスト $\phi_1, \ldots, \phi_n$ に対しても, ZFC から $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$ が M 上で真となるような推移的集合 M の存在を証明できます. 第 VII 章で強制法を論じる際には, このような集合 M がたいへん重要な意味をもってきます. 集合 M を構成する私たちの論法をみれば, ZFC の公理すべてをみたすようにできることも, 実在主義的には《正しい》といえそうです. しかし, ゲーデルの不完全性定理に関連した結果により, この実在

主義的議論は ZFC の内側では定式化できないのです (第 10 節を見てください).

これまでの節ではそれほど重大な意味をもたなかったある技術的な点について，ここでまずコメントしておく必要があります．集合 M が ZFC や ZFC − P のモデルであるという事実を表現する式を，私たちはもっているわけではありません (これについても第 10 節を見てください)．そこで，そうしたモデルについて述べた結果はなんらかの記号の濫用を含んでいたのです．定理 6.5 で $H(\kappa)$ が ZFC − P のモデルだと言ったときには，本当は，ZFC − P の任意の公理 ϕ について

$$\mathrm{ZFC} \vdash \forall\kappa(\kappa > \omega \wedge \kappa \text{ は正則基数} \rightarrow \phi^{H(\kappa)})$$

だと言うべきでした．これと同様に，この節では，ZFC の有限個の公理からなる任意のリスト $\phi_1,\ldots,\phi_n$ に対して

$$\mathrm{ZFC} \vdash \exists M(\phi_1^M \wedge \cdots \wedge \phi_n^M)$$

であり，特に M として $R(\beta)$ の形の集合かあるいは推移的な可算集合をとることができる，ということを証明するのです．

こうなると，ZFC の公理すべての集合モデルが存在するか否かという問題を，ZFC の内部で表現できるのかということすら怪しくなってきます．素朴な見方をすれば，ZFC の公理すべてを ϕ_i $(i \in \omega)$ のように列挙しておいて χ として

$$\exists M(\phi_1^M \wedge \phi_2^M \wedge \phi_3^M \wedge \cdots)$$

という文を考えればよさそうです．しかしこの χ は集合論の言語の文とは認められません．まあ，実在主義的にはこうした χ も意味をなすでしょうし，この節の議論を通じて《正しい》ことが (非公式には)《わかる》ことでしょう.

ZFC の公理すべてを一度に扱うのは困難だということも，じつはそれほど大きなハンディキャップにはなりません．というのも，私たちは ZFC の公理を一度には有限個しか使わないからです．つまり，たとえば $\mathrm{ZFC} \vdash \psi$ のときは ZFC の公理のある有限なリスト $\phi_1,\ldots,\phi_n$ について $\phi_1,\ldots,\phi_n \vdash \psi$ となるわけです (第 I 章定理 2.1)．第 3 節と第 5 節で示した各種の式の ZF − P の推移的モデルに対する絶対性も，実際にはこれと同様に，ZF − P の十分大きい有限部分の推移的モデルに対する絶対性を確立していたわけです.

補題 7.1. 第 3 節と第 5 節で ZF − P の推移的モデルに対する絶対性が (定理 3.9, 定理 3.11, 定理 5.1, 定理 5.3, 定理 5.4, 定理 5.5, 定理 5.7 において) 証明された式 χ の各々について，ZF − P の公理 $\phi_1,\ldots,\phi_n$ を見出して，

$$\mathrm{ZF-P} \vdash \forall M(M \text{ は推移的} \wedge \phi_1^M \wedge \cdots \wedge \phi_n^M \to \chi \text{ は } M \text{ に対して絶対的})$$

とできる．また，絶対性が証明された関数についても同様である．

【証明】 定義して追加した関数の絶対性は，それを定義する式の絶対性に帰着する．関数 $F(x_1, \ldots, x_n)$ の相対化を考えるのはそれを定義する式 $\chi(x_1, \ldots, x_n, y)$ の一意性条件

$$\forall x_1, \ldots, x_n \exists! y \chi(x_1, \ldots, x_n, y)$$

が M で成立している場合に限ると，第 3 節で取り決めた．ここで扱う関数の場合は，一意性条件が ZF − P 集合論の定理として証明できるものばかりだった．ということは，一意性条件は ZF − P の有限個の公理から証明できる．

定理 3.9 と定理 5.1 で式の絶対性を証明できた根拠は，その式とある Δ_0 式との同値性が ZF − P で証明できるということだった．したがってこの同値性も，ZF − P 集合論のなんらかの有限な部分理論で証明できる．第 3 節と第 5 節の他の定理では，以前に示された絶対性の結果から (補題 3.10 を使って) 合成によって，あるいは (定理 5.6 を使って) 超限再帰によって，新しい絶対性の結果を得た．合成にあたっては M に条件を追加する必要はないし，再帰にあたっては個々の再帰的定義を実行に移すのに十分なだけの ZF − P の公理を M がみたしていればよい．□

真のクラスであるモデルについても補題 7.1 と似た結果を主張できます．演習問題 26 を見てください．

次に ZFC 全体のモデルを作り出そうと試みる手順について論じましょう．モデル理論に通じた読者には，これが下向きのレーヴェンハイムとスコーレムとタルスキの定理を **V** に適用することだとわかることでしょう．あらゆる式がそれに対して絶対的となるような集合 M を見つけようというのが主なアイディアです．そうすれば任意の文 ϕ について $\phi^M \leftrightarrow \phi$ となるので，特に ϕ が ZFC の公理のときは ϕ^M が成り立ちます．実際には，さきほど言及したような事情のため，ZFC の範囲内では，あらかじめ与えられた有限なリストにある式についてそれらが絶対的であるような集合 M の存在が証明できるだけです．

これからこの節で述べる結果は第 3 節，第 5 節の結果や補題 7.1 の結果とは次の点で大きく異っています．ここまでに述べられた絶対性の結果は，ある限られた特別な形の式の絶対性に関するものでした．いっぽう，ここから先では任意の式が絶対的であるようなモデルを構成しようと試みます．補題 7.1 は ZFC の有限な部

分理論のモデルの有用性の根拠を与えるもので，これから証明する結果と組み合せて第 VI 章と第 VII 章で使います．

まず，式が M に対して絶対的となるかどうかに関するタルスキとヴォートによる判定基準 (補題 7.3) を提示することから始めます．

定義 7.2. 式のリスト $\phi_1,\ldots,\phi_n$ が**部分式について閉じている**とは，このリストにあるどの式のどの部分式も同じくこのリストに載っていることをいう．□

ここではこうしたリスト $\phi_1,\ldots,\phi_n$ は第 I 章第 2 節で述べた最初の正式な言語で書かれているものと考えます．リスト $\phi_1,\ldots,\phi_n$ が部分式について閉じていれば，各々の ϕ_i は原子式 (つまり $x\in y$ あるいは $x=y$ の形の式) か，ある番号 j ($j=1,\ldots,n$) について否定式 $\neg\phi_j$ か，ある番号 j,k について連接式 $\phi_j\wedge\phi_k$ か，あるいはある番号 j について存在量化式 $\exists x\,\phi_j$ ということになります．どんな式も有限個の部分式をもつだけですから，どんな有限なリストも，部分式について閉じたより大きな有限のリストに拡張できます．

補題 7.3. $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ は $\mathbf{M}\subset\mathbf{N}$ をみたすクラスとする．$\phi_1,\ldots,\phi_n$ は部分式について閉じた式のリストとする．このとき次の 2 条件は同値である．

(a) $\phi_1,\ldots,\phi_n$ は $\mathbf{M},\mathbf{N}$ に対して絶対的である．

(b) ϕ_i が $\exists x\phi_j(x,y_1,\ldots,y_l)$ の形で自由変数がここに示されたものだけであるときには，必ず

$$\forall y_1,\ldots,y_l\in\mathbf{M}[\exists x\in\mathbf{N}\,\phi_j^{\mathbf{N}}(x,y_1,\ldots,y_l)\rightarrow\exists x\in\mathbf{M}\,\phi_j^{\mathbf{N}}(x,y_1,\ldots,y_l)]$$

が成立する．

【証明】 (a)$\rightarrow$(b) について．$y_1,\ldots,y_l\in\mathbf{M}$ が与えられて $\exists x\in\mathbf{N}\phi_j^{\mathbf{N}}(x,y_1,\ldots,y_l)$ となっていたとする．このとき $\phi_i^{\mathbf{N}}(y_1,\ldots,y_l)$ なので ϕ_i の絶対性により $\phi_i^{\mathbf{M}}(y_1,\ldots,y_l)$, すなわち $\exists x\in\mathbf{M}\phi_j^{\mathbf{M}}(x,y_1,\ldots,y_l)$ であり，ϕ_j の絶対性により $\exists x\in\mathbf{M}\phi_j^{\mathbf{N}}(x,y_1,\ldots,y_l)$ となる．

(b)$\rightarrow$(a) について．式 ϕ_i の長さに関する帰納法によって，ϕ_i が $\mathbf{M},\mathbf{N}$ に対して絶対的であることをチェックする．そのため，リストにあって ϕ_i より長さが短い式はすべて絶対的であることが確かめられたと仮定しよう．ϕ_i が原子式のときはもちろん絶対的である．ϕ_i が $\phi_j\wedge\phi_k$ のときは ϕ_j と ϕ_k (これらは ϕ_i より短い) の絶対性から ϕ_i の絶対性が導かれる．ϕ_i の $\neg\phi_j$ である場合も同様．次に ϕ_i が

$\exists x \phi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$ の形だったとして，$y_1, \ldots, y_l \in \mathbf{M}$ をとる．すると

$$\phi_i^{\mathbf{M}}(y_1, \ldots, y_l) \leftrightarrow \exists x \in \mathbf{M} \phi_j^{\mathbf{M}}(x, y_1, \ldots, y_l) \leftrightarrow \exists x \in \mathbf{M} \phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l) \leftrightarrow$$
$$\exists x \in \mathbf{N} \phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l) \leftrightarrow \phi_i^{\mathbf{N}}(y_1, \ldots, y_l)$$

となる．最初と最後の $\leftrightarrow$ は相対化の定義により，二つめの $\leftrightarrow$ は ϕ_j の絶対性，三つめの $\leftrightarrow$ は条件 (b) による．□

補題 7.3 の便利なところは，条件 (b) が大きいほうのクラス $\mathbf{N}$ での式の真偽だけを問題にしているところです．この補題の第一の応用として，$\mathbf{N} = \mathbf{V}$ とし，$\phi_1, \ldots, \phi_n$ が絶対的であるような集合 $M = R(\beta)$ を見つけることを考えます．条件 (b) はこの M の演算に関する閉包条件とみなすことができます．

定理 7.4. (反映定理)　任意の式 $\phi_1, \ldots, \phi_n$ に対して，

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall \alpha \exists \beta > \alpha \, (\phi_1, \ldots, \phi_n \text{ は } R(\beta) \text{ に対して絶対的である}).$$

定理 7.4 の証明には，$R(\alpha)$ の構造上の特徴はほんの少ししか使われません．このことを強調する意味もあり，また第 VI 章で必要になるので，定理 7.4 よりも一般的な次の形の定理を証明します．定理 7.4 はここで $\mathbf{Z} = \mathbf{V}$ かつ $Z(\alpha) = R(\alpha)$ とした特別の場合になっています．

定理 7.5. $\mathbf{Z}$ をクラスとし，各順序数 α に集合 $Z(\alpha)$ が対応していて，

(1) $\alpha < \beta \rightarrow Z(\alpha) \subset Z(\beta)$,

(2) γ が極限順序数のとき $Z(\gamma) = \bigcup_{\alpha < \gamma} Z(\alpha)$,

(3) $\mathbf{Z} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} Z(\alpha)$

となっているものとする．このとき任意の式 $\phi_1, \ldots, \phi_n$ について

$$\forall \alpha \exists \beta > \alpha (\phi_1 \ldots, \phi_n \text{ は } Z(\beta), \mathbf{Z} \text{ に対して絶対的である}) \qquad (*)$$

が成立する．

定理 7.5 は定理 7.4 の直接な一般化ですが，定理 7.5 はより非公式な形で述べられているという点に注意してください．技術的により正確で，多少読みづらい形で定理 7.5 を述べれば，次のようになるでしょう：式 $\phi_1, \ldots, \phi_n$ と $\mathbf{Z}$, $Z(\alpha)$ の定義式が与えられたとき，条件 (1)–(3) が (*) を導くという主張が ZF で証明可能となる．

【定理 7.5 の証明】 補題 7.3 を $\mathbf{N} = \mathbf{Z}$ として適用し，その条件 (b) が成立するよう

な $\mathbf{M}$ すなわち $Z(\beta)$ を探す．ここで式のリスト $\phi_1,\ldots,\phi_n$ は部分式について閉じていると仮定してよい．そうでない場合はリストを拡大すればよい．

1 から n までの番号 i について関数 $\mathbf{F}_i:\mathbf{ON}\to\mathbf{ON}$ を以下のように定義する．ϕ_i が $\exists x\phi_j(x,y_1,\ldots,y_l)$ の形の場合に，もしも $\neg\exists x\in\mathbf{Z}\phi_j^{\mathbf{Z}}(x,y_1,\ldots,y_l)$ なら $\mathbf{G}_i(y_1,\ldots,y_l)=0$ とし，$\exists x\in\mathbf{Z}\phi_j^{\mathbf{Z}}(x,y_1,\ldots,y_l)$ なら

$$\exists x\in Z(\eta)\phi_j^{\mathbf{Z}}(x,y_1,\ldots,y_l)$$

をみたす最小の順序数 η を $\mathbf{G}_i(y_1,\ldots,y_l)$ と定めよう．そのうえで

$$\mathbf{F}_i(\xi)=\sup\{\,\mathbf{G}_i(y_1,\ldots,y_l):y_1,\ldots,y_l\in Z(\xi)\,\}$$

と定義する．置換公理によって，この上限は存在する．ϕ_i がこのような存在量化式でない場合には $\mathbf{F}_i(\xi)=0$ と定義する．

もしも β が極限順序数で $\forall\xi<\beta(\mathbf{F}_i(\xi)<\beta)$ となるなら，補題 7.3 によって $\phi_1,\ldots,\phi_n$ は $Z(\beta),\mathbf{Z}$ に対して絶対的である．与えられた順序数 α より大きいそのような β は次のようにして見出せる．$\beta_0=\alpha$ とし

$$\beta_p+1,\mathbf{F}_1(\beta_p),\ldots,\mathbf{F}_n(\beta_p)$$

のうち最大のものを β_{p+1} とすることで再帰的に $p\in\omega$ に対する β_p が定義される．$\beta=\sup\{\beta_p:p\in\omega\}$ としよう．$\alpha=\beta_0<\beta_1<\beta_2<\cdots$ なので β は α より大きな極限順序数である．また

$$\xi<\xi'\to\mathbf{F}_i(\xi)\leq\mathbf{F}_i(\xi')$$

に注意すれば，$\xi<\beta$ ならある番号 p について $\xi<\beta_p$ となり，$\mathbf{F}_i(\xi)\leq\mathbf{F}_i(\beta_p)\leq\beta_{p+1}<\beta$ となる．□

定理 7.4 で式 ϕ_i がどれも文である場合は

$$\mathrm{ZF}\vdash\forall\alpha\exists\beta>\alpha\left(\bigwedge_{i=1}^{n}(\phi_i^{R(\beta)}\leftrightarrow\phi_i)\right)\tag{1}$$

となります．ここで $\bigwedge_{i=1}^{n}\psi_i$ は $\psi_1\wedge\psi_2\wedge\cdots\wedge\psi_n$ の略記です．特に ϕ_i が公理の一つであれば $\mathrm{ZF}\vdash\phi_i$ なので，このときは $\mathrm{ZF}\vdash\forall\alpha\exists\beta>\alpha\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\phi_i^{R(\beta)}\right)$ が成立します．ここで，$R(\beta)$ が AC をみたすようにしたければ，ZFC で考えることにして $\mathbf{V}$ で AC が真であるとしなければなりません．ただし，ZF でも $\mathrm{AC}^{R(\beta)}\leftrightarrow\mathrm{AC}$ となるような β の存在を示すことはできます．一般に次のことが成立します．

系 7.6. S は ZF を拡張する公理の任意の集合とし，$\phi_1,\ldots,\phi_n$ を S の公理とするとき

$$S \vdash \forall\alpha\exists\beta>\alpha\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\phi_i^{R(\beta)}\right).$$

【証明】 S は ZF を含むので上記の (1) が成立する，それに加えて $S\vdash\phi_i$ という事実を使えばよい．□

この系 7.6 は純粋な存在定理であり，どのような β としてなにを使えばよいのか簡単にいう方法はありません．このような β が必ず ω_β と等しくなるように $\phi_1,\ldots,\phi_n$ を選ぶことも簡単にできます (演習問題 10).

系 7.6 からの帰結として，ZF や ZFC のような理論が有限公理化可能でないことがわかります．

系 7.7. S を ZF を拡張する公理の任意の集合とし，$\phi_1,\ldots,\phi_n$ を S の公理とする．もしも $\phi_1,\ldots,\phi_n$ から S の公理すべてが証明できれば S は矛盾を含む．

【証明】 $\phi_1,\ldots,\phi_n$ から S のすべてが証明できると仮定しよう．S において議論して矛盾を導くことにする．

β を

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\phi_i^{R(\beta)}$$

をみたす最小の順序数とすると，S の公理はすべて $R(\beta)$ において成立する．S は ZF の拡張であるから，第 5 章で証明した絶対性についての結果はすべて $R(\beta)$ に対して成立する．特に補題 5.8 から $\alpha\in R(\beta)$ のとき $R^{R(\beta)}(\alpha)$ は $R(\alpha)\cap R(\beta)$ すなわち $R(\alpha)$ であるから，関数 $R(\alpha)$ は $R(\beta)$ に対して絶対的である．S から

$$\exists\alpha\bigwedge_{i=1}^{n}\phi^{R(\alpha)}$$

が証明されるから，この式は $R(\beta)$ において真であり

$$\exists\alpha<\beta\bigwedge_{i=1}^{n}\phi^{R(\alpha)}$$

が成立することになるが，これは，そのような順序数のうち最小のものであるという β の定義と矛盾する．□

補題 7.3 から系 7.6 までの議論をすべての式について同時に実行すれば，ZFC

のすべての公理を ϕ_i にリストアップして $\forall\alpha\exists\beta>\alpha\left(\bigwedge_{i\in\omega}\phi^{R(\beta)}\right)$ を示すことも，実在主義的には可能に思われます．しかしこの論法を ZFC の範囲内で定式化することはできません．系 7.7 によって有限個の公理のリストは決して ZFC 全体と同値にはなりません．実際，公理のリスト $\phi_1,\ldots,\phi_n$ が与えられたとき，$\bigwedge_{i=1}^{n}\phi_i$ のモデルとなるような最初の $R(\beta)$ は ZFC のモデルには決してなりません．系 7.7 の証明にはっきりと示されているとおり，$\exists\alpha\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\phi_i^{R(\alpha)}\right)$ は ZFC の定理でありながらこの $R(\beta)$ においては成立しないのです．

定理 7.4 の証明を少し手直しすれば，与えられた式のリストが絶対的となるような**可算集合** A を作ることができます．もちろんこの場合 A は $R(\beta)$ の形にはできないし，推移的集合にもなりません．というのも，可算な推移的モデルに対して $\mathcal{P}$ が絶対的ではありえないからです．推移的でないモデルそのものにはあまり使い道はないのですが，モストフスキの収縮定理 (第 III 章定理 5.15) を適用して推移的モデルを得ることはできます．ここでも定理 7.5 と同様の一般的な枠組みで結果を述べることにしましょう．

定理 7.8. (AC)　$\mathbf{Z}$ を任意のクラスとし，$\phi_1,\ldots,\phi_n$ を任意の式とする．このとき

$$\forall X\subset\mathbf{Z}\exists A[X\subset A\subset\mathbf{Z}\wedge\phi_1,\ldots,\phi_n \text{ は } A,\mathbf{Z} \text{ に対して絶対的}\wedge$$
$$|A|\le\max(\omega,|X|)].$$

【証明】 先ほどと同様 $\phi_1,\ldots,\phi_n$ というリストは部分式について閉じていると仮定する．$Z(\alpha)=\mathbf{Z}\cap R(\alpha)$ と定義すると $\mathbf{Z}$ と $Z(\alpha)$ は定理 7.5 の仮定をみたす．いま $X\subset Z(\alpha)$ となるような α をとり，定理 7.5 によって β をこの α より大きな順序数で $\phi_1,\ldots,\phi_n$ が $Z(\beta),\mathbf{Z}$ に対して絶対的になるようなものとする．この $Z(\beta)$ の部分集合として A を見つけようというわけだ．AC によって，$Z(\beta)$ を整列順序づけする $\lhd$ をとろう．

ϕ_i が l_i 個の自由変数 $y_1,\ldots,y_{l_i}$ を含むものとして，関数 $H_i:Z(\beta)^{l_i}\to Z(\beta)$ を次のように定義しよう．もしも ϕ_i が $\exists x\phi_j(x,y_1,\ldots,y_{l_i})$ の形で

$$\exists x\in Z(\beta)\,\phi_j^{Z(\beta)}(x,y_1,\ldots,y_{l_i})$$

が成立するならば $H_i(y_1,\ldots,y_{l_i})$ はそのような $\lhd$-最小な x とする．いっぽう

$$\neg\exists x\in Z(\beta)\,\phi_j^{Z(\beta)}(x,y_1,\ldots,y_{l_i})$$

であるか，そもそも ϕ_i が存在量化式でないならば $H_i(y_1,\ldots,y_{l_i})$ は $Z(\beta)$ の $\lhd$-最小の要素とする．また $l_i=0$ となる場合 H_i は $Z(\beta)$ のなんらかの要素に一致させる．

補題 7.3 より，集合 A がすべての H_i のもとで閉じていれば，各 ϕ_i は $A, Z(\beta)$ に対して，したがって $A, \mathbf{Z}$ に対して絶対的である．そこで，A として X の $H_1,\ldots,H_n$ に関する閉包を考えよう，このとき第 I 章の定理 10.23 により $|A| \leq \max(\omega, |X|)$ が成立する．□

この証明にいう H_i は ϕ_i に対する**スコーレム関数**と呼ばれます．

定理 7.8 の証明では，$Z(\beta)$ を得るためと A を得るために，同種の論法を二回使いました．この意味でこの証明はエレガントさを欠くように思われます．しかし残念なことに，$\mathbf{Z}$ を整列順序づけする $\lhd$ から出発して直接的に A を選び出すという論法は，$\mathbf{Z}$ が真のクラスである場合 ZFC では使えません．真のクラスに対する量化を認める (第 I 章第 12 節で紹介したような) 集合論においても，AC (任意の集合は整列順序づけできる) から真のクラスが整列順序づけできることは証明できないのです．

ここで定理 7.8 の集合 A にモストフスキ収縮による同型写像を適用してみましょう．予想されるとおり，同型写像はすべての性質を保存します．そこで次のことが成り立ちます．

補題 7.9. G が集合 A から集合 M の上への 1 対 1 写像であって $\in$ 関係の同型写像となっているとするとき，任意の式 $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ について

$$\forall x_1,\ldots,x_n \in A[\,\phi(x_1,\ldots,x_n)^A \leftrightarrow \phi(G(x_1),\ldots,G(x_n))^M\,]$$

が成立する．

【証明】 ϕ に関する帰納法．□

特に ϕ が文のときは $\phi^A \leftrightarrow \phi^M$ となります．

系 7.10. (AC)　$\mathbf{Z}$ を推移的クラスとし，$\phi_1,\ldots,\phi_n$ を文とする．このとき

$$\forall X \subset \mathbf{Z}\Big[\,X \text{ は推移的である} \rightarrow \exists M\Big[\,X \subset M \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}(\phi_i^M \leftrightarrow \phi_i^{\mathbf{Z}}) \wedge \\ \wedge M \text{ は推移的である} \wedge |M| \leq \max(\omega, |X|)\Big]\Big].$$

【証明】 最後の文 ϕ_n として外延性公理が含まれていると仮定してよい．もしそう

なっていなければこの公理をリストに追加しなさい．集合 A を定理 7.8 の結論をみたすようにとろう．すると $\phi_i^A \leftrightarrow \phi_i^{\mathbf{Z}}$ である．$\mathbf{Z}$ は推移的クラスであるから外延性公理は $\mathbf{Z}$ で真であり，したがって A でも真である．そこで第 III 章の系 5.15 により，A からなんらかの推移的集合 M の上への $\in$-同型写像 G が存在する．$X \subset M$ であることを見るには，X の任意の要素 x について X の推移性から

$$G(x)=\{G(y):y\in A\wedge y\in x\}=\{G(y):y\in x\}$$

となることに注意しよう．すると，x に関する $\in$-帰納法により，X の任意の要素 x について $G(x)=x$ となる．□

この系で，$\mathbf{Z}$ として $\mathbf{V}$ を考え $X=\omega$ とした特別の場合を考えてみます．すると次の結果が成立します．

系 7.11. S を ZFC を拡張する公理の任意の集合とし，$\phi_1,\ldots,\phi_n$ を S の公理とするとき

$$S\vdash \exists M\left(|M|=\omega\wedge\ M \text{ は推移的である} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}\phi_i^M\right).\ \square$$

特に，ZFC の任意の有限な部分の可算な推移的モデル M の存在が ZFC で証明できます．十分に多くの公理をリストに含めておけば，第 3 節と第 5 節で示した絶対性に関するすべての結果が M で成立し，さらに $\mathcal{P}^M(x)$ と ω_α^M が定義できます．この二つの概念は絶対的ではありません．ω_1^M は可算順序数なのに M はあたかもこれが不可算であるかのように《思って》しまいます．これは ω から ω_1^M の上への関数が M **の中には**存在しない，ということを意味するにすぎません．同様に，$\mathcal{P}^M(\omega)=\mathcal{P}(\omega)\cap M$ であってこれは実際には可算集合なのですが，M の中に住む人にとってはそう見えません．M の中から見ると不可算な集合が実際には可算でありうる (つまり《可算である》という性質が絶対的でない) という事実は，《スコーレムのパラドックス》の名で知られています．

以前の結果と同じように，実在主義者は ZFC 全体の可算な推移的モデルが存在するはずだと信じることでしょう．というのも，系 7.11 の証明をすべての式について同時に実行できればそのようなモデルが得られるはずだからです．ただし，この論法は ZFC の内部で定式化できません．

§8 補遺 1：相対化についてもう少し

ここでは，第 2 節の内容の正式な扱いについて概略を述べます．論理学では相対化についての一般論も考えられていますが，いまは私たちにとって特に興味のある集合論の場合についてだけ考えることにします．

集合論の，集合論自身の中での**相対解釈**は，二つの式 $\mathbf{M}(x,v)$ と $\mathbf{E}(x,y,v)$ によって構成されます．ここで，どちらの式もここに示した以外の自由変数を含まないとします．変数 v をクラス $\{x:\mathbf{M}(x,v)\}$ と二項関係 $\{\langle x,y\rangle:\mathbf{E}(x,y,v)\}$ を定義するさいのパラメータとみなします．式 ϕ について，$x\in y$ を $\mathbf{E}(x,y,v)$ に書き換え，すべての束縛変数の範囲をクラス $\mathbf{M}$ に制限することによって，相対化 $\phi^{\mathbf{M},\mathbf{E}}$ を定義します．この章のここまでの例ではどれも，$\mathbf{E}(x,y,v)$ は式 $x\in y$ でした．**WF** のような固定されたモデルを扱っている場合は $\mathbf{M}$ もパラメータ v を含まないのですが，集合モデルを考えるときには，$\mathbf{M}(x,v)$ は正式には $x\in v$ という式であり，第 7 節で登場した $\exists M(\phi^M)$ という形の結果はここでの記法を使えば $\exists v(\phi^{x\in v,x\in y})$ と書かれることになります．

このような相対化を考えることで相対的無矛盾性の証明を得ることができることを示すためには，まず次のことをチェックする必要があります．

補題 8.1. 文 $\phi_1,\ldots,\phi_n,\psi$ について $\phi_1,\ldots,\phi_n\vdash\psi$ とし，$\mathbf{M}$ と $\mathbf{E}$ を上に述べたようなものとすると

$$\vdash\forall v[[\exists x\mathbf{M}(x,v)\land\phi_1^{\mathbf{M},\mathbf{E}}\land\cdots\land\phi_n^{\mathbf{M},\mathbf{E}}]\to\psi^{\mathbf{M},\mathbf{E}}].$$

【証明】 ゲーデルの完全性定理のやさしい方の向きと同様である．□

補題 2.3 をより正式に述べると次のようになります．

補題 8.2. S と T を集合論の言語における文の集合とし，ある式 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{E}$ について，S の公理のあらゆる有限なリスト $\phi_1,\ldots,\phi_n$ が

$$T\vdash\exists v[\exists x\mathbf{M}(x,v)\land\phi_1^{\mathbf{M},\mathbf{E}}\land\cdots\land\phi_n^{\mathbf{M},\mathbf{E}}]$$

をみたすことがわかったとする．このとき $\mathrm{Con}(T)\to\mathrm{Con}(S)$ である．

【証明】 S が矛盾を含むと仮定しよう．すると S に属する文のある有限なリスト $\phi_1,\ldots,\phi_n$ とある文 χ について $\phi_1,\ldots,\phi_n\vdash\chi\land\neg\chi$ となる．ここで $(\chi\land\neg\chi)^{\mathbf{M},\mathbf{E}}$ とは $\chi^{\mathbf{M},\mathbf{E}}\land\neg\chi^{\mathbf{M},\mathbf{E}}$ のことだから，補題 8.1 によって

$$T \vdash \exists v[\chi^{\mathbf{M},\mathbf{E}} \wedge \neg\chi^{\mathbf{M},\mathbf{E}}]$$

となる．こうして T も矛盾を含むことになる．□

S と T が実効的にきちんと記述されてさえいれば，たとえそれらが無限集合の概念を定式化する理論であったとしても，完全に有限主義的な相対的無矛盾性証明が補題 8.2 によって作り出される，という点に注意してください．

次に，あとから定義して追加された概念の相対化は正式にはどう扱えばよいか考えましょう．$\mathcal{L}=\{\in\}$ を集合論の言語，S を言語 $\mathcal{L}$ におけるなんらかの公理の集合とし，より大きい言語 $\mathcal{L}'$ における S の定義による拡大 (第 I 章第 13 節) S' を考えます．$\phi'(x_1,\ldots,x_n)$ が $\mathcal{L}'$ の式であれば，$\mathcal{L}$ の式 $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ で

$$S' \vdash \forall x_1,\ldots,x_n(\phi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \phi'(x_1,\ldots,x_n))$$

をみたすものが存在します (第 I 章定理 13.1)．そこで，$\phi'^{\mathbf{M},\mathbf{E}}$ とは $\phi^{\mathbf{M},\mathbf{E}}$ のことだと**定義**してしまいます．それには ϕ' を見て ϕ がわかるようなある一定の手段があることが前提になります．というのも，別の $\mathcal{L}$ の式 ψ についても

$$S' \vdash \forall x_1,\ldots,x_n(\psi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \phi'(x_1,\ldots,x_n))$$

が成立するからといって，$\psi^{\mathbf{M},\mathbf{E}}$ がいつでも $\phi^{\mathbf{M},\mathbf{E}}$ と同値になるとは限らないからです．それでも，ϕ と ψ は S' で同値性が証明可能であり S' は S の保守拡大 (第 I 章定理 13.2) ですから，S でも ϕ と ψ の同値性が証明可能です．ということは，$\mathbf{M},\mathbf{E}$ が S のモデルである場合は (あるいは，ϕ と ψ の同値性が証明できるような有限な部分理論のモデルでありさえすれば)，$\phi^{\mathbf{M},\mathbf{E}}$ と $\psi^{\mathbf{M},\mathbf{E}}$ が同値になるわけです．今後 $\phi'^{\mathbf{M},\mathbf{E}}$ について議論するのは $\mathbf{M},\mathbf{E}$ が S のモデルであること (あるいは ϕ' に含まれる定義を可能にするような S の有限部分理論のモデルであること) がチェック済みである場合に限ることにします．

§9　補遺 2：メタ理論のもとでのモデルの理論

無限を扱う手法をメタ理論にも取り入れる意欲があるなら，モデル理論の諸結果を ZF やそれに関連した各種の理論に適用してみるのが有益です．

集合論の言語に対応する構造とは，集合 A と $A \times A$ の部分集合 E をあわせた $\mathfrak{A}=\langle A,E\rangle$ のことです．S がこの言語の文のなんらかの集合をあらわすとして，ゲーデルの完全性定理は

$$\mathrm{Con}(S) \leftrightarrow \exists \mathfrak{A}(\mathfrak{A} \models S)$$

のことです．ただし，$\mathfrak{A} \models S$ とは S に属する文がすべて $\mathfrak{A}$ において真であることを意味します．

この視点があるので，相対的無矛盾性証明に含まれる証明論的な部分のいくらかをモデル論的なものに置き換えられます．たとえば第 4 節の結果 $\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^-) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZF})$ を次のように見ることができるでしょう．$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^-)$ を仮定し $\mathfrak{A} \models \mathrm{ZF}^-$ とします．そのとき

$$B = \{a \in A : \mathfrak{A} \models a \text{ は整礎的集合}\}$$

とおけば，第 4 節の議論により

$$\langle B, E \cap (B \times B) \rangle \models \mathrm{ZF}$$

となり，したがって ZF も無矛盾だとわかります．

先だっては ZF の内側で定式化されるとして扱った構造の分析も，ここではメタ理論において実行できるわけです．たとえば構造 $\mathfrak{A}$ が**整礎的**であるとは，A の空でない任意の部分集合に E-極小要素が存在するということです．また，$\mathfrak{A}$ が整礎的で外延的なら，$\mathfrak{A}$ はある推移的集合 M を本当の $\in$ 関係のもとで考えたものと同型になります．

ZF の無矛盾な拡大理論 S がいつでも整礎的なモデルをもつとは限りません (これについては第 10 節を見てください)．しかし，ZFC はおそらく整礎的なモデルをもつでしょう．というのも，ZFC は $\mathbf{V}$ で真なので，第 7 節の論法をメタ理論において (すべての式について一斉に) 実行すれば ZFC のモデルになっているような $R(\beta)$ が得られるでしょうから．

そんな話はあまりにも実在主義的でいけないと思う読者もいるかもしれません．それでも，無限集合があると認める人なら誰でも，(定理 3.13 より) $\mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf}$ のモデルである $R(\omega)$ の存在は認めるでしょう．そして直観主義者といえども (有限主義者でなければ) $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf})$ だと信じているはずです．なにしろ $\mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf}$ はペアノ算術の範囲内で解釈でき (演習問題 30 を見てください)，しかもペアノ算術は直観主義的に見ても無矛盾だからです ([Kleene 1952] を見てください)．直観主義の教義は曖昧に表明されていて，おかげで Con(ZF) の直観主義的に容認できる証明がはたしてあるかどうかも不明瞭なほどです．

有限主義者でも，有限なモデルをもつような理論は無矛盾であると信じていま

す．そのような理論の例として，S を外延性公理プラス内包性公理プラス $\forall y(y=0)$ としましょう．これは $\{0\}$ というモデルをもちます．そこで $\mathrm{Con}(S)$ は有限主義的にみても真です．系 2.8 では $\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^-)$ を仮定して $\mathrm{Con}(S)$ を示しましたが，この仮定は必要なかったわけです．

§10　補遺 3：形式化された理論のもとでのモデルの理論

前節と違ったやり方として，モデルの理論を ZF の内側で定式化されたと考えることもできます (ただし，より深い結果を得るには ZFC が必要です)．この場合，メタ理論は有限主義的であるとみなすこともできます．

第 I 章第 14 節で構文論的な基本用語を形式化したさいに，モデル理論の形式化への最初の一歩が踏みだされたといえます．さらに一歩を進めれば，自由変数 X について，X は集合論の言語における文の集合でありその集合から矛盾を導くことができない，と《主張する》式 $\mathrm{CON}(X)$ を書き下せます．

意味論的なアイディアを同様に形式化して，$\mathfrak{M}$ は対 $\langle M, E\rangle$ であり x は式であり s は $M^{<\omega}$ の要素であって，x の自由変数に M の要素の値を s を使って割当ててやれば，$\mathfrak{M}$ で真となる，と《主張する》三つの自由変数をもつ式

$$\mathfrak{M} \models x[s]$$

を書き下せます．x が文のときは $[s]$ を消しましょう．$\mathfrak{M} \models X$ とは $\forall x \in X(\mathfrak{M} \models x)$ のことです．するとゲーデルの完全性定理を

$$\forall X(\mathrm{CON}(X) \leftrightarrow \exists \mathfrak{M}(\mathfrak{M} \models X))$$

と書き表すことができ，ZF で証明できます．この場合，言語が可算なので AC の使用を避けることが可能です．

ここまでの話は，数学のあらゆる分野と同様モデルの理論も ZFC の内側で (選択公理を使わないなら ZF で) 定式化できるという事実を詳細に述べ直したに過ぎません．ところが，メタ理論の対象を形式的な対象になぞらえようと試みるところから，話が面白くなり，また混乱を誘いやすくなってきます．ただし，第 I 章第 14 節でやったように，クワインのカッコ記法を用いることによって，この混乱を多少は軽減できます．

いまや，$\mathfrak{M}$ で式が真であるということについて，二つの異なった表現が可能に

なった点に注意してください．一つの式 $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ を考えます．第一に，相対化 $\phi^{M,E}(x_1,\ldots,x_n)$ を書くことができます．これには論理を ZF の内側で形式化する必要はありません．第二に，第 I 章第 14 節のやり方で定数「ϕ」を作り $\langle M,E\rangle \models$「$\phi$」$[\langle x_1,\ldots,x_n\rangle]$ と書くことができます．この二つの表現方法が等価なものであることは，メタ理論において，ϕ に関するストレートな帰納法によって証明されます．これを正式に次のように表明しましょう．

補題 10.1. 任意の式 $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ について

$$\mathrm{ZF}\vdash\forall\langle M,E\rangle\forall x_1,\ldots,x_n\,(\phi^{M,E}(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\langle M,E\rangle\models\ulcorner\phi\urcorner[\langle x_1,\ldots,x_n\rangle]).\ \Box$$

S がメタ理論において文の再帰的集合をなす場合，S の表示式 χ_S (第 I 章定理 14.1) を使うと，この集合 S をあらわす定数「S」$=\{x:\chi_S(x)\}$ を形式化された理論に付け加えることができます．ただし実際のところ「S」は S を表示する式の選び方に依存するはずなので，この書き方は少し厳密さを欠いているのですが．

このような S について，こうして集合論の言語における文 CON(「S」) が得られました．この文 CON(「S」) は S が無矛盾であるという主張を表現しており，第 I 章第 14 節の CON^S と同値になります．ゲーデルの不完全性定理 (第 I 章定理 14.3) によると，S が無矛盾で ZF を含めば (実際には ZF − P − Inf を含めば十分です．第 I 章演習問題 23 を参照)．$S\nvdash$CON(「S」) となります (ここで注意：これには S を表現する式 χ_S が適切に選ばれているということが前提となります (演習問題 36 を見てください)．

それでも S からより弱い理論の無矛盾性を証明することはできます．たとえば ZFC$\vdash$CON(「ZFC − P」)．これを示すには $H(\omega_1)$ が ZFC − P のモデルであることを ZFC の内側で定式化するように，定理 6.5 の証明を手直しすればよいのです．ただし，第 6 節で証明したことは ZFC − P の各公理 ϕ について ZFC$\vdash\phi^{H(\omega_1)}$ だということでしたから，ここではもっと多くのことを言わなくてはいけません．同じように，$\exists\kappa$(κ は強到達不能基数である) という公理を I とあらわすなら，定理 6.6 の証明を手直しすることで

$$\mathrm{ZFC}+\mathrm{I}\vdash\mathrm{CON}(\ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner) \tag{1}$$

となります．

こうした事実によって，有限主義的な相対的無矛盾性証明の可能性が制約されます．

$$\mathrm{Con(ZFC)} \to \mathrm{Con(ZFC} + \neg \mathrm{I)}$$

の有限主義的な証明は可能だった (系 6.9) のですが,

$$\mathrm{Con(ZFC)} \to \mathrm{Con(ZFC} + \mathrm{I)} \tag{2}$$

の有限主義的な証明は, ZFC が矛盾を含まない限り存在しません. このことを見るために, 仮にそんな証明があったとすると, ZFC の内側でそれを形式化することで

$$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{CON}(\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner) \to \mathrm{CON}(\ulcorner \mathrm{ZFC} + \mathrm{I} \urcorner)$$

が得られ, (1) によりこれが

$$\mathrm{ZFC} + \mathrm{I} \vdash \mathrm{CON}(\ulcorner \mathrm{ZFC} + \mathrm{I} \urcorner)$$

を導きます. すると不完全性定理によって ZFC+I が矛盾を含むことになり, (2) によって結局 ZFC が矛盾を含むことになります.

無限を扱う手法をメタ理論でも使ってよいのであれば, 上の議論も第 9 節で述べたようなメタ理論におけるモデルの理論を使ったものに直せます.

$\mathfrak{A} = \langle M, E \rangle \models \mathrm{ZF}$ だとします. 各自然数 n に対して $n^{\mathfrak{A}}$ を定数 $\ulcorner n \urcorner$ の $\mathfrak{A}$ における解釈としましょう. これらが $\mathfrak{A}$ の自然数のすべてであるときに, $\mathfrak{A}$ のことを **ω-モデル**と呼びます. これはいいかえると, $\mathfrak{A} \models a \in \omega$ でありながらどの自然数 n についても $a \neq n^{\mathfrak{A}}$ なってしまうような A の要素 a は存在しない, ということです. このような a があれば, それを**非標準自然数**あるいは**無限大自然数**と呼びます. 整礎的なモデルはすべて ω-モデルですが, その逆は正しくありません. コンパクト性定理によって, どんなモデル $\mathfrak{A}$ も ω-モデルでないモデルに初等拡大できます. タイプの排除定理によって, どんな ω-モデルも, 整礎的でない ω-モデルに初等拡大できます.

$\mathfrak{A} \models \mathrm{ZF}$ とすると, メタ理論の各々の式 ϕ に対して $\ulcorner \phi \urcorner$ の $\mathfrak{A}$ での解釈 $\phi^{\mathfrak{A}}$ が A の要素として定まります. $\mathfrak{A}$ が ω-モデルであれば, これが $\mathfrak{A}$ で式と呼ばれるもののすべてですが, $\mathfrak{A}$ が ω-モデルでなければ, $\mathfrak{A}$ には式の長さが無限大の自然数であるような非標準の式が含まれます.

ZF はおそらく無矛盾であり, 整礎的なモデルをもつことでしょう (第 9 節). しかし, ω-モデルをもたないような無矛盾な ZF の拡大 S も簡単に作れます. たとえば S を $\mathrm{ZF} + \neg \mathrm{CON}(\ulcorner \mathrm{ZF} \urcorner)$ としましょう. ゲーデルの不完全性定理によれば S は無矛盾です. $\mathfrak{A}$ が S のモデルであれば $\mathfrak{A}$ には ZF から矛盾を導く証明が含まれ

るはずですが，ZF はじつは無矛盾なのですから，その証明は非標準の証明のはずです．したがって，$\mathfrak{A}$ は ω-モデルではありません．

この S を使って別の奇妙な例を作ることができます．メタ理論で S を再帰的に数え上げる ϕ_n $(n\in\omega)$ を考えます．このリストを S の内側で形式化しましょう．S において c を

$$\exists\beta(R(\beta)\models\{\phi_n : n<x\})$$

をみたす ω の要素 x のうち最大のものと定義します．S の内側でこの定義が意味をもつことは $S\vdash\neg\mathrm{CON}(\ulcorner S\urcorner)$ (というのは $S\vdash\neg\mathrm{CON}(\ulcorner \mathrm{ZF}\urcorner)\wedge\ulcorner S\urcorner\supset\ulcorner \mathrm{ZF}\urcorner$ だからですが) ということからわかります．すべての標準の自然数 n について反映定理により $S\vdash(c>\ulcorner n\urcorner)$ となり，したがって S のいかなるモデル $\mathfrak{A}$ においても $c^{\mathfrak{A}}$ は非標準の自然数になっています．さて，次に S において b を $R(\beta)\models\{\phi_n : n<c\}$ となる最小の順序数 β と定義しましょう．このとき $R(b)^{\mathfrak{A}}$ は S の標準の公理 ϕ_n すべてのモデルであるけれども，なんらかの非標準の公理をみたさないわけです．こうして，無矛盾な理論 S において，弱い意味で S 自身のモデルとなっている集合が定義できたことがわかります．すなわち，S において推移的な集合 $R(b)$ が定義され，S のすべての公理 ϕ について $S\vdash(R(b)\models\phi)$ となるけれども，だからといって $\exists\mathfrak{M}(\mathfrak{M}\models\ulcorner S\urcorner)$ が S で証明されるわけではない (むしろその否定が証明されてしまう) というわけです．

上のパラグラフで述べたことは，S を ZF の再帰的な拡大で ω-矛盾する任意のもの (演習問題 32) に置き換えて成立します．

集合論のモデルの理論について詳しくは，[Keisler–Morley 1968] と [Keisler–Silver 1971] を参照してください．

第 IV 章の演習問題

特に指定のない限り ZF で考えなさい．

[1] ZF のどの公理がクラス **ON** で真だろうか．

[2] (AC)　κ を強到達不能基数とする．次のものが $R(\kappa)$ に対して絶対的であることを確かめなさい．

(a) $\mathcal{P}(x)$,

(b) ω_α,

(c) $\beth_\alpha$,

(d) $R(\alpha)$,

(e) $\mathrm{cf}(\alpha)$,

(f) α は強到達不能基数である.

[3] 前問の (a)–(f), および

(g) $\exists\alpha$ (α は強到達不能基数である).

が **WF** に対して絶対的であることを，ZFC^- において確かめなさい.

[4] (AC) 不可算基数 κ について $|H(\kappa)|=2^{<\kappa}$ であることを示しなさい.

[5] (AC)　不可算基数 κ について，$H(\kappa)=R(\kappa)$ であるためには $\kappa=\beth_\kappa$ が必要かつ十分であることを示しなさい.

[6] ツェルメロの集合論 Z とは，ZF から置換公理を取り除いた体系のことである. ZC とは Z に AC を加えたものである. ω より大きな任意の極限順序数 γ について，$R(\gamma)$ が Z のモデルであることを示しなさい. 次に **V** において AC が成り立つものとして，このような $R(\gamma)$ が ZC のモデルであることを示しなさい.

[7] (AC) すべての不可算基数 κ について $H(\kappa)$ が $\mathrm{Z}-\mathrm{P}$ のモデルであることを示しなさい. $H(\kappa)$ において冪集合の公理が真となるためには，$\kappa=\beth_\gamma$ をみたす極限順序数 γ の存在することが必要十分であることを示しなさい. 置換公理が $H(\beth_\omega)$ において成立しないことを示しなさい.

[8] 任意の整列順序が順序数と同型となるという命題は $R(\omega+\omega)$ において真でないことを示しなさい.　[ヒント] 辞書式に順序づけされた集合 $2\times\omega$ を考えなさい. $R(\omega+\omega)$ において成立しない置換公理の実例を見つけなさい.

[9] 任意の集合 A, B に対して $A\times B$ が存在することを，Z 集合論において証明しなさい.　[ヒント] $A\times B\subset\mathcal{P}\mathcal{P}(A\cup B)$. Z において，関数や整列順序の基本性質 (第 I 章第 6 節) および ω, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ の基本性質 (第 I 章の第 7 および第 11 節) についての議論を展開しなさい. さらに，近代の数学の少なくとも 99% が ZC 集合論の範囲内で展開できることを確かめなさい.

[10] 次のような集合論の文 ϕ を見つけなさい，$R(\beta)$ に対して ϕ が絶対的であるような順序数 β についてはいつでも $\beta=\omega_\beta$ が成立する. 次に，次のような集合論の式 $\psi(x)$ を見つけなさい. 空でない推移的集合 M に対して $\psi(x)$ が絶対的であれ

ば，ある順序数 β について $M=R(\beta)$ かつ $\beta=\omega_\beta$ となる． [ヒント] ϕ は $\forall\alpha(\omega_\alpha$ が存在する) を保証するのに十分なだけの ZF の部分理論．$\psi(x)$ としては $\phi\wedge(x$ は $R(\alpha)$ の形の集合である) を考えればよろしい．

[11] 《R は A 上で整礎的である》という関係が ZF－P の推移的モデルに対して絶対的であることを示しなさい．

[12] 定理 3.11 で列挙された関係や関数が，いずれもその Δ_0 式との同値性が $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ において証明できるような式で定義されていることを確かめなさい．

***[13]** $n\in\omega$ のとき $F(n)=n+n$, $x\notin\omega$ のとき $F(x)=0$ として関数 F を定義する．F は Δ_0 関数にならない (すなわち，$F(x)=y$ がいかなる Δ_0 式とも同値にならないこと) が，二つの Δ_0 関数の合成になっている．このことを示しなさい．[ヒント] F が Δ_0 関数でないことの証明にはモデル理論の知識が必要．まず $\{m\in\omega : m$ は偶数$\}$ が $\langle\omega,<\rangle$ 上では一階論理で定義できないことを示しなさい．

[14] 集合論の言語の Δ_0 式 θ について $\exists y_1\cdots\exists y_n\,\theta$ の形をもつ式を Σ_1 式といい，$\forall y_1\cdots\forall y_n\,\theta$ の形をもつ式を Π_1 式という．$\phi(x_1,\ldots,x_m)$ を Σ_1 式，$\psi(x_1,\ldots,x_m)$ を Π_1 式としよう．$\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ は推移的クラスで $\mathbf{M}\subset\mathbf{N}$ だとする．このとき，$\mathbf{M}$ のすべての要素 $x_1,\ldots,x_m$ について

$$\phi^{\mathbf{M}}(x_1,\ldots,x_m)\rightarrow\phi^{\mathbf{N}}(x_1,\ldots,x_m)$$

および

$$\psi^{\mathbf{N}}(x_1,\ldots,x_m)\rightarrow\psi^{\mathbf{M}}(x_1,\ldots,x_m)$$

を示せ．このように，Σ_1 は上向きに，Π_1 は下向きに相対化される．

[15] S を文の集合とする．式 $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ が S からの証明可能性の意味で Δ_1 である ($\vdash_S\Delta_1$) とは，ある Σ_1 式 $\psi_\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$ と Π_1 式 $\psi_\Pi(x_1,\ldots,x_n)$ について

$$S\vdash\forall x_1,\ldots,x_n\,[\phi(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\psi_\Sigma(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\psi_\Pi(x_1,\ldots,x_n)]$$

となることをいう．$\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ はともに S の推移的モデルで $\mathbf{M}\subset\mathbf{N}$ となっているとする．もしも ϕ が $\vdash_S\Delta_1$ なら，ϕ は $\mathbf{M},\mathbf{N}$ に対して絶対的である．このことを示しなさい．

[16] 第 3 節と第 5 節ではいろいろな式が ZF－P の推移的モデルに対して絶対的であることを証明した．それらの式がじつは $\vdash_{\mathrm{ZF-P}}\Delta_1$ であることをチェックしな

さい.

[17] 任意の式 ϕ について次の二つの条件が同値であることを示しなさい.

(a) ϕ は $\vdash_{\mathrm{ZF}} \Delta_1$ である.

(b) ZF の有限個の公理からなるなんらかの集合 S について,

$$\mathrm{ZF}\vdash\forall M[(M \text{ は推移的である} \wedge (\bigwedge S)^M) \to \phi \text{ は } M \text{ に対して絶対的}].$$

ただし, $\bigwedge S$ は S に属する文すべての連言をあらわす. [ヒント] (b)→(a) には反映定理を用いなさい.

訳注：複数の式を ∧ で一つに結び合わせてできた式のことを, もとの式たちの**連言**と呼びます. また, 複数の式を ∨ で結びつけてできた式は, **選言**です.

[18] $\mathbf{F}$ は $\mathbf{V}$ から $\mathbf{V}$ の上への 1 対 1 関数だとする. $x\in\mathbf{F}(y)$ のとき $x\mathbf{E}y$ として $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ の部分クラス $\mathbf{E}$ を定義するとき, $\mathbf{V},\mathbf{E}$ が ZFC^- のモデルとなることを (ZFC において) 証明しなさい (式の $\mathbf{V},\mathbf{E}$ への相対化の定義は第 8 節を見なさい).

[19] Con(ZFC) から $\mathrm{ZFC}^- + \exists x(x=\{x\})$ の無矛盾性が導かれることを, 前問の結果を用いて示しなさい. [ヒント] $\mathbf{F}(0)=1$, $\mathbf{F}(1)=0$ としなさい. 同様にして $\mathrm{ZFC}^- + \exists x\exists y(x=\{y\}\wedge y=\{x\}\wedge x\neq y)$ の無矛盾性を示しなさい.

[20] Con(ZFC) を仮定して, ZFC^- にモストフスキの収縮定理の次のような変形を付け加えても無矛盾であることを証明しなさい：R を集合 A 上の外延的な関係とするとき, $\langle A,R\rangle$ はなんらかの推移的集合 M について $\langle M,\in\rangle$ と同型になる. ここでは R が整礎的とは仮定していないことに注意.

***[21]** ZFC^- の有限個の公理からなる集合 S をどのようにとっても《R は A を整列順序づけする》が S の任意の推移的モデルに対して絶対的であることは, ZFC^- では証明できない. このことを示しなさい. [ヒント] 前問の結果と, 若干のモデル理論を使います.

[22] 任意の集合 A について次のように $R(\alpha,A)$ を定義しよう：$R(0,A)=\{A\}\cup\operatorname{trcl}A$, $R(\alpha+1,A)=\mathcal{P}(R(\alpha,A))$. また, α が極限順序数のときは $R(\alpha,A)=\bigcup_{\xi<\alpha} R(\xi,\alpha)$ とする. $\mathbf{WF}(A)=\bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} R(\alpha,A)$ とおこう. $\mathbf{WF}(A)$ が ZF^- のモデルであることと, AC から $\mathrm{AC}^{\mathbf{WF}(A)}$ が導かれることを, ZF^- において証明しなさい.

[23] $\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^-)$ を仮定して, $\forall x\in U(x=\{x\})$ をみたす無限集合 U について $\mathbf{V}=$

WF(U) となることが ZF^- と矛盾しないことを証明しなさい.

***[24]** (フレンケルとモストフスキ)　$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}^-)\to\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}^-+\neg\mathrm{AC})$ を示しなさい.　[ヒント] 演習問題 23 のとおり $\mathbf{V}=\mathbf{WF}(U)$ とします. U 上の置換全体のなす群を G とします. U の部分集合 B に対して

$$G_B=\{\pi\in G:\forall x\in B(\pi(x)=x)\}$$

とおきましょう. G の各要素 π に対応した $\mathbf{V}$ の自己同型 π_* を, $x\in U$ のときは $\pi_*(x)=\pi(x)$, それ以外の y については $\pi_*(y)=\{\pi_*(z):z\in y\}$ と定義します. さらに

$$\mathbf{A}=\{y:\exists B\subset U(|B|<\omega\wedge\forall\pi\in G_B(\pi_*(y)=y))\}$$

および

$$\mathbf{HA}=\{y\in\mathbf{A}:\mathrm{tr\,cl}(y)\subset\mathbf{A}\}$$

とおきなさい. このとき **HA** が ZF^-+ ≪U は整列順序づけできない≫ のモデルとなることを示しなさい.

[25] $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}^-)$ を仮定して, ZF^- に $\neg\mathrm{AC}$ と $\mathrm{AC}^{\mathbf{WF}}$ と, いかなる整礎的な群とも同型でないような群 H の存在をつけ加えても矛盾しないことを証明しなさい. [ヒント] 演習問題 24 を見なさい. 群 H としては, **HA** に属するが **HA** において整列順序づけ可能でないような任意の群を考えればよい.

[26] 真のクラスであるようなモデルに適用できる補題 7.1 の修正版を証明しなさい.

[27] 定理 7.8 と系 7.10 を (第 III 章の演習問題 19 で述べた) $\mathrm{ZFC}^*-\mathrm{P}$ において証明しなさい.

[28] 第 III 章の演習問題 18 で定義した AF^* が, 任意の集合に相対化したとき, そこで真となることを示しなさい.

[29] (バーワイズ)　推移閉包の存在しないような集合 x が $\mathrm{ZFC}-\mathrm{P}-\mathrm{Inf}$ と矛盾しないことを示しなさい.　[コメント] 演習問題 24 と第 III 章の演習問題 19 により, ZF で考え, 本物の $\in$ 関係を用いている限りこのモデルは作れません.　[ヒント] $\forall n(x_n=\{x_{n+1}\})$ をみたすような互いに相異なる x_n を考えなさい. $M_0=\{x_n:n\in\omega\}$, $M_{k+1}=\{y\subset M_k:|y|<\omega\}$ と定めて $M=\bigcup_k M_k$ とおきなさい.

[30] 一階ペアノ算術を PA と書く．PA と ZF − Inf が互いに相手を解釈でき，したがって

$$\mathrm{Con}(\mathrm{PA}) \leftrightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZF}-\mathrm{Inf})$$

が有限主義的に証明できることを示しなさい． [ヒント] ZF − Inf を PA の内部で解釈するには第 III 章の演習問題 5 を使いなさい．

***[31]** 次のような可算集合 M と $M \times M$ の部分集合 E を ZF において定義しなさい：ZF のすべての公理 ϕ について

$$\mathrm{ZF} \vdash \phi^{M,E}$$

が成立する． [ヒント] これはゲーデルの完全性定理を ZF 内部で定式化することと関わっています．

[32] $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} - \mathrm{Inf}$ を拡張する公理の集合 S が **ω-矛盾する**とは，任意の自然数 n について $S \vdash \phi(\ulcorner n \urcorner)$ であると同時に $S \vdash \neg \forall x \in \omega \phi(x)$ でもあることを意味する．ZF を拡張する S が ω-矛盾するとき，S において次の条件をみたす順序数 b が定義できることを示しなさい：S の任意の公理 ϕ に対して

$$S \vdash \phi^{R(b)}.$$

[ヒント] 第 10 節の終わりの部分を見なさい．

[33] $S \cup \{\chi\}$ と $S \cup \{\neg\chi\}$ の両方が ω-矛盾するときは S 自身が ω-矛盾する．このことを示しなさい． [ヒント] $S \cup \{\chi\}$ の ω-矛盾を示す式 $\phi(x)$ と $S \cup \{\neg\chi\}$ の ω-矛盾を示す式 $\psi(x)$ について

$$(\chi \to \phi(x)) \wedge (\neg\chi \to \psi(x))$$

を考えなさい．

***[34]** S を ZF を拡張する公理の再帰的な集合とする．$S \vdash \exists x \psi(x)$ および S の各公理 ϕ について $S \vdash \forall x(\psi(x) \to \phi^x)$ をみたすような式 $\psi(x)$ が存在するとする．このとき S は ω-矛盾することを示しなさい． [ヒント] χ を

$$\forall x(\psi(x) \to x \models \ulcorner S \urcorner)$$

という文だとすると，$S \cup \{\neg\chi\}$ は ω-矛盾します．ところが $S \cup \{\chi\}$ も ω-矛盾します．これを示すために $S \cup \{\chi\}$ で次のように議論しなさい：

$$\alpha = \min\{\mathrm{rank}(M) : M \models \ulcorner S \urcorner \wedge M \text{ は推移的集合}\}$$

とおけば

$$\forall M((\mathrm{rank}(M)=\alpha \wedge M \models \ulcorner S \urcorner \wedge M \text{ は推移的集合}) \to \neg\chi^M)$$

が成立し，これが $S \cup \{\neg\chi\}$ の場合と同じようにして ω-矛盾を生み出します．

***[35]** ZF^- が ω-矛盾しないと仮定する．任意の式 ϕ に対して，次の文が ZF^- と矛盾しないような Δ_0 式 ψ があることを示しなさい：もしも ϕ が ZF^- のすべての推移的モデルに対して絶対的なら ϕ と ψ は同値である．［ヒント］T を演習問題 20 で述べた理論だとします．ZF^- が ω-矛盾しないので T も ω-矛盾しません．仮に，上にいうような式 ψ がなかったとすると

$$T \vdash \langle\!\langle \phi \text{ は } \mathrm{ZF}^- \text{ の推移的モデルに対して絶対的} \rangle\!\rangle \tag{1}$$

であり，しかも T は

$$\text{いかなる } \Delta_0 \text{ 式 } \psi \text{ に対しても } \mathrm{ZF}^- \vdash \langle\!\langle \phi \text{ と } \psi \text{ は同値} \rangle\!\rangle \text{ とはならない} \tag{2}$$

という言明と矛盾しません．ここで ϕ が $\phi(x_1,\dots,x_n)$ という形だったとして，(2) と若干のモデル理論の知見を使い，任意のモデルが推移的集合と同型だという事実によって，(2) から

$$\exists M,N\text{:推移的集合}\,(M \models \mathrm{ZF}^- \wedge N \models \mathrm{ZF}^- \wedge$$
$$\wedge \exists x_1,\dots,x_n \in M \cap N(\phi(x_1,\dots,x_n)^M \wedge \neg\phi(x_1,\dots,x_n)^N)).$$

が導かれることが T において証明されますが，このことは (1) と矛盾します．

[36] 次のような式 $\chi(x)$ があることを示しなさい．

(a) χ は ZF を表現する．すなわち，

$$\phi \in \mathrm{ZF} \to \mathrm{ZF} \vdash \chi(\ulcorner \phi \urcorner), \quad \phi \notin \mathrm{ZF} \to \mathrm{ZF} \vdash \neg\chi(\ulcorner \phi \urcorner)$$

が成立する．

(b) $\ulcorner \mathrm{ZF} \urcorner$ を $\ulcorner \mathrm{ZF} \urcorner = \{x : \chi(x)\}$ によって定義した場合，$\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{CON}(\ulcorner \mathrm{ZF} \urcorner)$ が成立する．

第V章

定義可能性を定義する

集合 a があって，日本語 (数式を含んでいてもよい) によって表現されたなんらかの属性 $P(x)$ について，a がこの属性 P をもつような唯一の対象

$$\forall x(P(x) \leftrightarrow x = a)$$

となっている場合に，a は**定義可能**であるということにします．たとえば $\mathbb{R}, \omega_8, 34$ などは定義可能です．日本語による表現は可算個しかありませんから，定義可能な集合も可算個です．特に，すべての順序数が定義可能というわけではありません．そこで，定義可能でない最初の順序数を δ としましょう．ところが δ は今まさに定義できてしまいました．この場合の $P(x)$ は

$$x \text{ は順序数である} \wedge x \text{ は定義可能でない} \wedge \forall y < x(y \text{ は定義可能である})$$

です．

第I章第2節で述べた，40 文字以内で定義できない最小の自然数という例と同様，上記の《パラドックス》も，《属性》という厳密でないことばを不用意に使った結果として引き起こされたのです．このことばの意味を式によって厳密に規定すれば，《パラドックス》は消え去ります．《x は式を使って定義できる》ということは式を使って表現しようがないので，上記のような δ は ZF の中には登場しません．すべての式を一度に扱うことに関連して現れるこれと同様の問題点が，すでに第IV章第7節に見られます．

この章の第1節では，x は A に相対化された集合論の式によって定義可能な A の要素であると主張する，二つの自由変数 x と A を含む式を書く方法を述べます．ここで考察することは，第2節で順序数定義可能な集合について論じて

$\mathrm{Con(ZF)} \to \mathrm{Con(ZFC)}$ を証明するさいにも，第 VI 章で構成可能的集合について論じて $\mathrm{Con(ZF)} \to \mathrm{Con(ZFC+GCH)}$ を証明するさいにも重要です．

この章の結果は ZFC のモデルを ZF の内部に作ることを最終目標としているわけですから，第 1 節でも第 2 節でもすべての議論が AC を使わず ZF の内部でなされるように注意することが大切です．じつは第 1 節では ZF − P で考えれば十分です．

§1 定義可能性の形式化

これから定義する 2 変数の関数 $\mathrm{Df}(A,n)$ が基本となります．直観的にいうと，$\mathrm{Df}(A,n)$ とは n 個の自由変数をもつ A に相対化された式によって定義できる A 上の n 項の関係の全体の集合です．そうすると，A の要素 x が A に相対化された式によって定義可能であることを $\{x\} \in \mathrm{Df}(A,1)$ と表現できます．

私たちは $\mathrm{Df}(A,n)$ を，n 個の自由変数を含むなんらかの式 ϕ によって

$$\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle : \phi^A(x_1,\ldots,x_n)\}$$

の形をもつような A^n の部分集合全体の集合と定義したいわけです．しかし n 個の自由変数をもつ式は無限個ですから，この非公式なアイディアをどうすれば ZF 内部での正式な定義に直せるのかは，直ちに明らかというわけにはいきません．この目的をはたす方法の一つは，まず一階論理の構文規則 (第 I 章第 14 節) を ZF 内部で定式化し，次に式の充足というモデル理論的な概念 (第 IV 章第 10 節) を定式化するというものです．ただ，この方法を細部までやり遂げるのはどちらかというと面倒で退屈です．ここではそのかわりに，$\bigcup_n \mathrm{Df}(A,n)$ を，$\{\langle x,y\rangle \in A^2 : x \in y\}$ のような基本的な関係を含み共通部分と補集合と射影の演算 (それぞれ論理の $\wedge, \neg, \exists$ に対応します) のもとで閉じている関係の集合のうち最小のものと簡単に定義します．このアプローチから，定義可能性の概念が一階論理を記述するさいの構文上の詳細には依存しないという事実が導かれます．手間を厭わず論理を ZF の内部で形式化すれば，どちらのアプローチでも同じ結果が得られることが容易にわかります (演習問題 10)．

定義 1.1. $n \in \omega$ かつ $i, j < n$ のときに，

(a) $\mathrm{Proj}(A,R,n) = \{s \in A^n : \exists t \in R(t \restriction n = s)\}$.

(b) $\mathrm{Diag}_\in(A,n,i,j) = \{s \in A^n : s(i) \in s(j)\}$.

(c) $\mathrm{Diag}_{=}(A,n,i,j)=\{s\in A^n : s(i)=s(j)\}$.

(d) 自然数 k に関する再帰によって $\mathrm{Df}'(k,A,n)$ を次のように (すべての n について一斉に) 定義する：

(1) $\mathrm{Df}'(0,A,n)=\{\mathrm{Diag}_{\in}(A,n,i,j) : i,j<n\}\cup\{\mathrm{Diag}_{=}(A,n,i,j) : i,j<n\}$.

(2) $\mathrm{Df}'(k+1,A,n)=\mathrm{Df}'(k,A,n)\cup\{A^n\setminus R : R\in\mathrm{Df}'(k,A,n)\}\cup\{R\cap S : R,S\in\mathrm{Df}'(k,A,n)\}\cup\{\mathrm{Proj}(A,R,n) : R\in\mathrm{Df}'(k,A,n+1)\}$.

(e) $\mathrm{Df}(A,n)=\bigcup\{\mathrm{Df}'(k,A,n) : k\in\omega\}$. □

補題 1.2. $R,S\in\mathrm{Df}(A,n)$ のとき $A^n\setminus R\in\mathrm{Df}(A,n)$ かつ $R\cap S\in\mathrm{Df}(A,n)$. $R\in\mathrm{Df}(A,n+1)$ のとき $\mathrm{Proj}(A,R,n)\in\mathrm{Df}(A,n)$. □

次の補題では，A に相対化した式で定義できる A 上の関係を $\mathrm{Df}(A,n)$ が期待どおりすべて含むことを示します．

補題 1.3. $\phi(x_0,\dots,x_{n-1})$ を，自由変数として $x_0,\dots,x_{n-1}$ だけを含む任意の式とする．このとき

$$\forall A\,[\{s\in A^n : \phi^A(s(0),\dots,s(n-1))\}\in\mathrm{Df}(A,n)]. \tag{$*$}$$

【証明】 ϕ の長さに関する帰納法による．ϕ が $x_i\in x_j$ のとき $(*)$ は $\mathrm{Diag}_{\in}(A,n,i,j)\in\mathrm{Df}(A,n)$ という事実から導かれる．ϕ が $x_i=x_j$ である場合も同様．ϕ が $\psi\wedge\chi$ で ψ と χ については $(*)$ がわかっているとすると，ϕ について $(*)$ が成り立つことは $\mathrm{Df}(A,n)$ が共通部分をとる演算のもとで閉じているという事実から導かれる．ϕ が $\neg\psi$ のときは，$\mathrm{Df}(A,n)$ が補集合をとる演算のもとで閉じているという事実を使う．最後に ϕ が $\exists y\psi$ の場合を考える．y が $x_0,\dots,x_{n-1}$ のどれでもないなら，ψ に関する $(*)$ を適用して

$$\{s\in A^n : \phi^A(s(0),\dots,s(n-1))\}= \mathrm{Proj}(A,\{t\in A^{n+1} : \psi^A(t(0),\dots,t(n))\},n)\in\mathrm{Df}(A,n)$$

となる．y が x_j だったら $\phi(x_0,\dots,x_{n-1})$ は $\exists x_j\psi(x_0,\dots,x_j)$ であり，x_j は ϕ の自由変数ではない．このときは，z を ϕ に一度も使われていない変数として $\psi(x_0,\dots,x_{j-1},z,x_{j+1},\dots,x_{n-1})$ を $\psi'(x_0,\dots,x_{n-1},z)$ とおき，さらに $\exists z\psi'$ を ϕ' とおく．すると ϕ' は ϕ と論理的に同値となり，ϕ' について $(*)$ が成立することは先ほどの議論からわかるから，ϕ についても $(*)$ が成立する．□

ここで一つコメントしておくと，補題 1.2 は一つの言明 (を略記法で書いたもの) なのに対して補題 1.3 は実際には一つの補題図式で，一つ一つの式 ϕ について (*) が ZF において証明できると主張しています.

補題 1.3 の逆を直観的に言えば，$\mathrm{Df}(A,n)$ の要素はなんらかの式によって定義される，ということになりますが，これを表現しようとすると，例によって，すべての式に一度に言及することにともなう困難に行き当ります．自由変数として $x_0,\ldots,x_{n-1}$ 以外を含まないような式全部を $\phi_0,\phi_1,\phi_2,\ldots$ と列挙しましょう．すると，実在主義的にみれば

$$\forall R \forall Y \in \mathrm{Df}(A,n) \bigvee_{i\in\omega} (Y = \{s \in A^n : \phi_i^A(s(0),\ldots,s(n-1))\}) \qquad (**)$$

は正しいでしょう．その《証明》は次のとおりです．$Y \in \mathrm{Df}(A,n)$ ならある番号 k について $Y \in \mathrm{Df}'(k,A,n)$ なので，k に関する帰納法で (**) を証明すればよろしい．帰納法のステップでは，$\mathrm{Df}'(k+1,A,n)$ に新しい関係が入れられるしかたが，式が $\neg$ と $\wedge$ と $\exists$ を使って構成されるしかたに対応しているという事実を使います．もちろん，(**) は集合論の言語の正式な文ではありません.

それでも，$\mathrm{Df}(A,n)$ のことを A に相対化された式で定義できる A 上の n 項関係の全体にほかならないと知っていれば，発見的方法という観点から有用です．どんなことが正しい《はず》であるかはそれでわかるので，あとはそれを他の方法できちんと証明すればよいわけです．たとえば，$\mathrm{Df}(A,n)$ は可算集合である《はず》です．なぜなら式が可算個しかないからです．そして，$\mathrm{Df}(A,n)$ が可算であることは ZF において正式に証明できます．それには $\mathrm{Df}(A,n)$ がある可算集合の有限的な演算に関する閉包として定義されているという事実が用いられます (第 I 章定義 1.6 を見てください)．また，$\mathrm{Df}(A,n)$ は ZF $-$ P の任意の推移的モデルに対して絶対的である《はず》です．というのも，$\mathbf{M}$ が推移的クラスで $A \in \mathbf{M}$ のとき A の要素はすべて $\mathbf{M}$ に属するので，ある式を A に相対化することは，$\mathbf{M}$ で考えても $\mathbf{V}$ で考えるのと同じ意味をもつはずだからです．このことは，正式には Df を定義 1.1 において定義した手順にしたがって証明します (補題 1.7)．第 2 節と第 VI 章では，ある技術的な理由から，Df だけでなくその要素を数え上げる ω 上のなんらかの関数が絶対的であることが重要な意味をもつので，$\mathrm{Df}(A,n)$ が可算であることを証明するにあたっても，通常必要とされるよりもいっそう明示的な方法を用いることにします.

定義 1.4. 自然数 m に関する再帰によって $\mathrm{En}(m,A,n)$ を次の条項のとおりに (す

べての n について一斉に) 定義する：

(a) $m=2^i\cdot 3^j$ かつ $i,j<n$ のとき，$\mathrm{En}(m,A,n)=\mathrm{Diag}_\in(A,n,i,j)$.

(b) $m=2^i\cdot 3^j\cdot 5$ かつ $i,j<n$ のとき，$\mathrm{En}(m,A,n)=\mathrm{Diag}_=(A,n,i,j)$.

(c) $m=2^i\cdot 3^j\cdot 5^2$ のとき，$\mathrm{En}(m,A,n)=A^n\setminus\mathrm{En}(i,A,n)$.

(d) $m=2^i\cdot 3^j\cdot 5^3$ のとき，$\mathrm{En}(m,A,n)=\mathrm{En}(i,A,n)\cap\mathrm{En}(j,A,n)$.

(e) $m=2^i\cdot 3^j\cdot 5^4$ のとき，$\mathrm{En}(m,A,n)=\mathrm{Proj}(A,\mathrm{En}(i,A,n+1),n)$.

(f) m が (a) から (e) までのどの形とも異なるとき，$\mathrm{En}(m,A,n)=0$. □

補題 1.5. すべての n と A について $\mathrm{Df}(A,n)=\{\mathrm{En}(m,A,n):m\in\omega\}$.

【証明】 $\forall n\,(\mathrm{En}(m,A,n)\in\mathrm{Df}(m,A,n))$ は，m に関する帰納法で証明できる．特に (条項 (f) について) $0\in\mathrm{Df}(A,n)$ となることは $\mathrm{Df}(A,n)$ が共通部分と補集合について閉じていることからわかる．あとは，k に関する帰納法によって

$$\forall n\,(\mathrm{Df}'(k,A,n)\subset\{\mathrm{En}(m,A,n):m\in\omega\})$$

が示される．□

系 1.6. $|\mathrm{Df}(A,n)|\leq\omega$. □

補題 1.7. 定義によってつけくわえられた関数 Df と En は，ZF − P の任意の推移的モデルに対して絶対的である．

【証明】 Proj, $\mathrm{Diag}_\in$, $\mathrm{Diag}_=$, Df′, Df, En がいずれも絶対的であることが，順を追って第 IV 章第 5 節の方法を適用することで容易に確かめられる．絶対的な概念から再帰によって定義された関数も絶対的であるという事実 (第 IV 章定理 5.6) を繰り返し用いる．En について考えるときは順序数の冪の絶対性 (第 IV 章定理 5.7) を使う．□

数学基礎論の専門家には，Df の構成が論理式の構文論と充足関係を ZF 内部で定式化する手順を簡略にしたものであり，En は簡略化されたゲーデル数化であるとわかるでしょう．この節でこのあと示すとおり，この他にもさまざまなモデル論的な概念が Df と En を使って表現できます．この本でこうした題材が必要になる箇所は多くはありませんが，**L** についての進んだ議論，たとえば **L** における $\diamondsuit^+$ の証明などには重要になります (第 VI 章定理 4.10 を見てください)．En を用いれば補題 1.3 を次のように改良することができます．証明もほとんど同じです．

補題 1.8. $\phi(x_0,\ldots,x_{n-1})$ を，$x_0,\ldots,x_{n-1}$ 以外には自由変数を含まない式だとする．このとき，ある m について

$$\forall A[\{s\in A^n : \phi^A(s(0),\ldots,s(n-1))\}=\mathrm{En}(m,A,n)] \qquad (**)$$

が成立する．□

正式に言えば，補題 1.8 は (**) が ZF で証明されるような番号 m をそれぞれの式 ϕ に対して見出すことができるというメタ理論における主張です．非公式には，ϕ のことを En で列挙された n 変数の式の m 番目だと思っているわけです．

関数 En を使えば，$A\subset B$ であってしかもすべての式が A,B に対して絶対的 (第 IV 章定義 3.1) であることを《意味する》関係 $A\prec B$ を記述できます．二つの集合の間に定義される関係 $A\prec B$ は，モデル理論で用いられる**初等的部分モデル**という発想の一例です．

定義 1.9. $A\prec B$ (A は B に初等的に含まれている) とは，$A\subset B$ であって，さらに

$$\forall m,n[\mathrm{En}(m,A,n)=\mathrm{En}(m,A,n)\cap A^n]$$

となることをいう．□

補題 1.10. 任意の式 $\phi(x_0,\ldots,x_{n-1})$ について

$$\forall A,B[A\prec B\rightarrow\phi \text{ は } A,B \text{ に対して絶対的}].$$

【証明】 補題 1.8 による．□

次に，$A\prec B$ となる可算集合 A が任意の集合 B について存在するという，下向きのレーヴェンハイムとスコーレムとタルスキの定理 (定理 1.11) を証明します．これは第 IV 章の定理 7.8 とほとんど同じですが，そこでは式の有限なリストだけが A,B に対して絶対的だったという意味で，定理 1.11 の方が強力だといえます．しかし，B が真のクラスの場合も含んでいたという意味では，第 IV 章定理 7.8 の方が強力だともいえます．ここで，B が真のクラスのときは $\mathrm{En}(m,B,n)$ が定義されないので補題 1.10 は意味をなさない，ということに注意しましょう．

定理 1.11. (AC)

$$\forall B\forall X\subset B\exists A[X\subset A\subset B\wedge A\prec B\wedge|A|\leq\max(\omega,|X|)].$$

【証明】B の整列順序づけ $\lhd$ を決めておく．これから各自然数 m と n について関数 $H_{mn}:B^n \to B$ を定義する．非公式な言い方をすれば，H_{mn} は m 番目の n 変数の式に対するスコーレム関数である．正式には次のようにする：m が $2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$ の形で s が $\mathrm{En}(m,B,n)$ に属するとき (すなわち，m 番目の n 変数式が存在量化式でしかもそれが s という n 組について真であるとき) $H_{mn}(s)$ は $s^\frown\langle x\rangle \in \mathrm{En}(i,B,n)$ をみたす B の要素 x のうちで $\lhd$-最小のものとする．それ以外の場合 $H_{mn}(s)$ は B の $\lhd$-最小要素とする．

集合 X の H_{mn} についての閉包を A とすると $|A| \le \max(\omega, |X|)$ (第 I 章定理 10.23)．m に関する帰納法で

$$\forall n[\mathrm{En}(m,A,n) = \mathrm{En}(m,B,n) \cap A^n]$$

となることが難なく証明できる．□

$n=0$ の場合に上記のことが意味することも検討してみる価値があります．空集合を定義域とする関数は 0 ただ一つなので，$A^0=\{0\}$ です．したがって A^0 の部分集合は 0 と $\{0\}$ つまり 1 の二つだけです．$n=0$ のとき $\phi(s(0),\ldots,s(n-1))$ は ϕ のことですから，補題 1.8 によって，どんな文 ϕ に対しても自然数 m が定まって，すべての集合 A について，ϕ^A が真のとき $\mathrm{En}(m,A,0)=1$ で，ϕ^A が偽のとき $\mathrm{En}(m,A,0)=0$ となります．いっぽう，補題 1.10 によれば，$A \prec B$ のときはすべての文 ϕ について $\phi^A \leftrightarrow \phi^B$ です．

定義 1.12. $A \equiv B$ (A と B が**初等的に同値**) とは，

$$\forall m(\mathrm{En}(m,A,0) = \mathrm{En}(m,B,0))$$

ということ．□

非公式には，$A \equiv B$ は A と B がちょうど同じ文をみたすということです．ですから，A と B が同型であれば $A \equiv B$ が期待されます．

補題 1.13. G は A から B の上への 1 対 1 写像で $\in$ 関係の同型写像になっているとする．このとき，

(1) $\forall m,n \forall x \in A^n(s \in \mathrm{En}(m,A,n) \leftrightarrow G \circ s \in \mathrm{En}(m,B,n))$.

(2) $A \equiv B$.

【証明】(1) は m に関する帰納法でできる．(2) は (1) で $m=0$ とした場合である．□

$A \prec B$ は $A \equiv B$ を導きますが，$A \equiv B$ だからといって $A \subset B$ や $B \subset A$ になるとは限りません．たとえば $A = \{a\}$ で $B = \{b\}$ なら，補題 1.13 から $A \equiv B$ です．G としてモストフスキ収縮関数を使うもう少しましな応用例が，$\mathbf{L}$ における $\Diamond^+$ の証明にあらわれます．第 VI 章定理 4.10 を見てください．

§2　順序数定義可能集合

非公式な言い方をすると，集合 a が順序数定義可能とは，なんらかの順序数の有限列を用いて a を定義できること，いいかえると，なんらかの性質 $P(y_1, \ldots, y_n, x)$ と順序数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ について

$$\forall x(P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \leftrightarrow x = a)$$

が成立するということです．順序数定義可能集合のクラスを $\mathbf{OD}$ としましょう．すると，すべての順序数は $\mathbf{OD}$ に属します ($P(y_1, x)$ として $y_1 = x$ を考えなさい)．したがって $\mathbf{ON} \subset \mathbf{OD}$ です．

すべての順序数が $\mathbf{OD}$ に属していることで，この章の最初に述べた最小の定義不可能順序数をめぐるパラドックスは回避できていますが，一見する限り，この《順序数定義可能》という概念も《定義可能》の概念と同様に疑わしく見えます．ところが，$\mathbf{OD}$ を ZF 内部で合法的に定義できるゲーデルの発案によるうまい方法があるのです．この方法に関する技術的な細部は [Myhill–Scott 1971] で明らかにされました．

鍵になるアイディアは次のようなものです．これもまだ非公式な議論ですが，a が順序数定義可能であるためには，ある $R(\beta)$ において a が順序数定義可能であることが必要かつ十分です．つまり，性質 $P(y_1, \ldots, y_n, x)$ と順序数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ と，$\beta > \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mathrm{rank}(a))$ をみたす順序数 β があって

$$\forall x \in R(\beta)(P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \leftrightarrow x = a)^{R(\beta)} \tag{$*$}$$

となる，ということです．これを示すために，まず $a \in \mathbf{OD}$ だったとします．すると $P(y_1, \ldots, y_n, x)$ と $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ があって

$$\forall x(P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \leftrightarrow x = a)$$

となります．反映定理 (第 IV 章定理 7.4) によって，$\beta > \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mathrm{rank}(a))$ をみたすなんらかの順序数 β について P は $R(\beta)$ に対して絶対的となり，したがって $(*)$ が成立します．逆に $(*)$ が成立していれば，a は $\mathbf{V}$ において順序数

$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ と β を用いて定義可能になるわけです．ここで β を加える必要があるので，この議論は《順序数定義可能》を単なる《定義可能》に置き換えると破綻してしまいます．

さて，第 1 節で構成した Df 関数を使えば，《a はなんらかの $R(\beta)$ において順序数定義可能である》という主張を ZF の範囲内で表現できます．そこで，これを **OD** の公式な定義として採用します．

定義 2.1. **OD** とは

$$\exists\beta > \mathrm{rank}(a)\,\exists n\,\exists s\in\beta^n\,\exists R\in \mathrm{Df}(R(\beta),n+1)$$

$$\forall x\in R(\beta)(s^\frown\langle x\rangle\in R\leftrightarrow x=a)$$

をみたす集合 a のなすクラスである．□

定理 2.2. 式 $\phi(y_1,\ldots,y_n,x)$ の自由変数はここに示されたものだけだとするとき，

$$\forall\alpha_1\cdots\forall\alpha_n\forall a\,[\forall x(\phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,x)\leftrightarrow x=a)\rightarrow a\in\mathbf{OD}]$$

が成立する．

【証明】$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ および a について $\forall x(\phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,x)\leftrightarrow x=a)$ であったと仮定する．反映定理 (第 IV 章定理 7.4) によって，ある順序数 β が存在して，$\beta>\max(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\mathrm{rank}(a))$ かつ ϕ が $R(\beta)$ に対して絶対的となる．

$$R=\{\langle y_1,\ldots,y_n,x\rangle\in R(\beta)^{n+1}:\phi(y_1,\ldots,y_n,x)\}$$

とおこう．このとき β^n の要素 $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$ を s とすれば

$$\forall x\in R(\beta)(s^\frown\langle x\rangle\in R\leftrightarrow x=a)$$

となり，また，ϕ が $R(\beta)$ に関して絶対的であることから

$$R=\{\langle y_1,\ldots,y_n,x\rangle\in R(\beta)^{n+1}:\phi(y_1,\ldots,y_n,x)^{R(\beta)}\}$$

であるから補題1.3より $R\in\mathrm{Df}(R(\beta),n+1)$ となり，結果として $a\in\mathbf{OD}$ となる．□

定理 2.2 も反映定理や補題 1.3 と同じように一つの定理図式で，一つ一つの式 ϕ についてここへ書いた式が証明可能となることを主張します．

定理 2.2 の逆を考えると，$a\in\mathbf{OD}$ のときは a を順序数を用いて定義するなんらかの式 ϕ が存在する，と主張することになり，補題 1.3 の逆を考えたときと同じく，これを ZF の内部で定式化できるかどうかという問題に直面します．ところ

が，一つの特別な式 $\phi(y,x)$ をうまく定義すると

$$\forall a(a \in \mathbf{OD} \rightarrow \exists \alpha \forall x(\phi(\alpha,x) \leftrightarrow x=a))$$

となることが証明できます．じつはこの ϕ は **ON** から **OD** の上への関数を定義しています．これは次のようなアイディアによります．a が **OD** に属するとしたら，a は定義 2.1 にもとづいて **OD** へ入れられるわけです．その際定義 2.1 にでてきた s, n, β という有限個の順序数のほかに，Df の要素を列挙する関数 En (定義 1.4) を用いて R を $\mathrm{En}(m, R(\beta), n)$ の形であらわしたさいの，番号 m がかかわってきます．これにより，$\mathbf{ON}^{<\omega}$ から **OD** の上への写像が得られます．さらに $|\kappa \times \kappa| = \kappa$ の証明 (第 I 章定理 10.12) を一般化すると，**ON** から $\mathbf{ON}^{<\omega}$ の上への写像を AC を使わずに定義できます．

定義 2.3. $\mathbf{ON}^{<\omega}$ の要素 s と t について，$s \lhd t$ とは，

(a) $\max(\mathrm{ran}(s)) < \max(\mathrm{ran}(t))$,

(b) $\max(\mathrm{ran}(s)) = \max(\mathrm{ran}(t)) \wedge \mathrm{dom}(s) < \mathrm{dom}(t)$,

(c) $\max(\mathrm{ran}(s)) = \max(\mathrm{ran}(t)) \wedge \mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(t) \wedge \exists k \in \mathrm{dom}(s)(s \restriction k = t \restriction k \wedge s(k) < t(k))$

のいずれかが成立することだとする．□

条項 (c) が意味することは，もしも s と t の最大値が同じで長さ (つまり定義域) も同じなら，両者を辞書式に比較しなさい，ということです．

$\lhd$ が $\mathbf{ON}^{<\omega}$ を整列順序づけすることは簡単に示せます．さらに，$\mathbf{ON}^{<\omega}$ の任意の要素 t について，それより前にくる要素の全体は集合をなします．実際，$\alpha = \max(\mathrm{ran}(t))$ とすれば，$s \lhd t$ をみたす s はどれも定義 2.3 の条項 (a) のおかげで $(\alpha+1)^{<\omega}$ に属するはずです．無限順序数 α については常に $|(\alpha+1)^{<\omega}| = |\alpha|$ なので (第 I 章補題 10.13)，不可算基数 κ について $\kappa^{<\omega}$ は順序型 κ で整列順序づけされ，しかもそれが $\mathbf{ON}^{<\omega}$ の始切片になっていることがわかります．$\omega^{<\omega}$ は順序型 ω^2 で順序づけされます．

定義 2.4. $\mathrm{Enon}(\gamma)$ とは $\lhd$ に関して γ 番目の $\mathbf{ON}^{<\omega}$ の要素のことである．□

補題 2.5. Enon は **ON** から $\mathbf{ON}^{<\omega}$ の上への 1 対 1 写像である．□

Enon は正式には超限再帰によって定義されたものと考えられます．あるいは，Enon^{-1} のほうを $\mathbf{ON}^{<\omega}$ 上の $\lhd$ 関係のモストフスキ収縮関数 (第 III 章定理 5.14)

と考えることもできます.

OD の数え上げ Enod は，この順序数の列の数え上げ Enon を用いて定義できます.

定義 2.6. 順序数 γ に対する $\mathrm{Enod}(\gamma)$ を次のとおり定義する：

(a) $\mathrm{Enon}(\gamma)=s^\frown\langle\beta,n,m\rangle$ かつ $n,m\in\omega$ かつ $s\in\beta^{<\omega}$ かつ $\mathrm{dom}(s)=n$ で，しかも $R(\beta)$ のある (一意的な) 要素 a について

$$\forall x\in R(\beta)\,(\,s^\frown\langle x\rangle\in\mathrm{En}(m,R(\beta),n+1)\leftrightarrow x=a\,)$$

となるときには $\mathrm{Enod}(\gamma)=a$ と定める.

(b) 条項 (a) の仮定が成立しないときには $\mathrm{Enod}(\gamma)=0$ と定める. □

補題 2.7. $\mathbf{OD}=\{\,\mathrm{Enod}(\gamma):\gamma\in\mathbf{ON}\,\}$.

【証明】En が Df の要素の数え上げになること (補題 1.5) と，0 が **OD** に属することからすぐにわかる．$0\in\mathbf{OD}$ となることを見るには，$\phi(y,x)$ として式 $y=x$ を考え α として順序数 0 をとって定理 2.2 を適用する. □

補題 2.7 が，約束どおり補題 2.2 の逆になっていることを確かめておきましょう．$\phi(y,x)$ として $(y\in\mathbf{ON}\wedge x=\mathrm{Enod}(y))$ という式を考えれば,

$$\forall a\in\mathbf{OD}\,\exists\alpha\forall x\,(\,\phi(\alpha,x)\leftrightarrow x=a\,)$$

となります．補題 2.2 と補題 2.7 を使うと，**OD** がすべての順序数を含み，あらゆる定義可能な集合論的操作のもとで閉じていることが証明できます．たとえば次のことが成立します.

補題 2.8.

(a) $\mathbf{ON}\subset\mathbf{OD}$.

(b) $w,z\in\mathbf{OD}$ のとき $\{w,z\}\in\mathbf{OD}$.

(c) $w\in\mathbf{OD}$ のとき $\bigcup w\in\mathbf{OD}$ かつ $\mathcal{P}(w)\in\mathbf{OD}$.

【証明】(a) は，定理 2.2 にいう式 $\phi(y,x)$ として $y=x$ を使えば順序数 α について $\alpha\in\mathbf{OD}$ が得られる．(b) を示すために $w=\mathrm{Enod}(\alpha_1),\,z=\mathrm{Enod}(\alpha_2)$ だったとしよう．$a=\{w,z\}$ とおき式 $\phi(y_1,y_2,x)$ として

$$y_1\in\mathbf{ON}\wedge y_2\in\mathbf{ON}\wedge x=\{\mathrm{Enod}(y_1),\mathrm{Enod}(y_2)\}$$

を考えると，定理 2.2 から $a \in \mathbf{OD}$ が得られる．(c) の二つの部分も同じように定理 2.2 を用いて証明できる．その際用いる式 $\phi(y,x)$ はそれぞれ $y \in \mathbf{ON} \wedge x = \bigcup \mathrm{Enod}(y)$ と $y \in \mathbf{ON} \wedge x = \mathcal{P}(\mathrm{Enod}(y))$ である．□

補題 2.8 を用いて対の公理，和集合の公理，冪集合の公理が **OD** で成立するという事実が確立されたので，ひょっとすると **OD** は ZF のモデルになるのではと推測したくなるかもしれません．残念なことに **OD** は推移的クラスにならないかもしれないので，外延性公理に問題が生じます．実際，$\mathbf{V} = \mathbf{OD}$ でない限り **OD** では外延性公理は成立しません (演習問題 5)．$\mathbf{V} = \mathbf{OD}$ は無矛盾ではあるものの，ありそうもないことです．こうなる可能性についてはこの節の最後にもう一度検討します．

OD のかわりに遺伝的に順序数定義可能な集合のクラスを考えることで，ZF のモデルが得られます．つまり，x 自身が **OD** に属するだけでなく，x の要素，x の要素の要素，等々がすべて **OD** に入るような x を考えるのです．

定義 2.9. $\mathbf{HOD} = \{x \in \mathbf{OD} : \mathrm{trcl}(x) \subset \mathbf{OD}\}$．□

補題 2.10. $\mathbf{ON} \subset \mathbf{HOD} \subset \mathbf{OD}$ であり，**HOD** は推移的クラスである．□

補題 2.11. 集合 a について，$a \in \mathbf{OD}$ かつ $a \subset \mathbf{HOD}$ であれば $a \in \mathbf{HOD}$ である．□

補題 2.12. 任意の順序数 α について $(R(\alpha) \cap \mathbf{HOD}) \in \mathbf{HOD}$.

【証明】 $(R(\alpha) \cap \mathbf{HOD}) \subset \mathbf{HOD}$ は明らかなので，補題 2.11 によりあとは $(R(\alpha) \cap \mathbf{HOD}) \in \mathbf{OD}$ を示せばよいが，これは順序数 α から定義できるから正しい．もう少しきちんと言えば，$\phi(y,x)$ として $y \in \mathbf{ON} \wedge x = R(y) \cap \mathbf{HOD}$ という式を用いて定理 2.2 を適用すればよい．□

定理 2.13. (ZF)　ZFC のすべての公理が **HOD** で成立する．

【証明】 外延性公理は **HOD** が推移的クラスであるから成立する．また，基礎の公理は任意のクラスにおいて成立する (それぞれ第 IV 章補題 2.4 と第 IV 章補題 2.12 を見なさい)．

内包性公理を確かめるには，任意の式 $\psi(v,z,w_1,\ldots,w_n)$ について

$$\forall z, w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{HOD}\left(\{v \in z : \psi^{\mathbf{HOD}}(v,z,w_1,\ldots,w_n)\} \in \mathbf{HOD}\right)$$

を示せば (第 IV 章補題 2.5 により) 十分である．**HOD** の要素 $z, w_1, \ldots, w_n$ を固定し，$z = \mathrm{Enod}(\alpha_0)$ かつ $w_i = \mathrm{Enod}(\alpha_i)$ としよう．

$$a = \{ v \in z : \psi^{\mathbf{HOD}}(v, z, w_1, \ldots, w_n) \}$$

とすると，a は次にいう式 $\phi(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, x)$ をみたすただ一つの集合 x となる．ここで $\phi(y_0, y_1, \ldots, y_n, x)$ は

$$y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{ON} \wedge x = \{ v \in \mathrm{Enod}(y_0) :$$
$$\psi^{\mathbf{HOD}}(v, \mathrm{Enod}(y_0), \mathrm{Enod}(y_1), \ldots, \mathrm{Enod}(y_n)) \}$$

という式だとする．したがって，定理 2.2 により $a \in \mathbf{OD}$. いっぽう $a \subset z \in \mathbf{HOD}$ で **HOD** が推移的クラスであることから $a \subset \mathbf{HOD}$ となり，補題 2.11 より $a \in \mathbf{HOD}$ となる．

対の公理と和集合の公理と置換公理と羃集合の公理は，どれも **HOD** が十分大きな集合を含むという形の主張であって，補題 2.12 を使えばどれも同様の方法で証明される．対の公理を例にとると，**HOD** の要素 x と y に対して $x \in w \wedge y \in w$ をみたす **HOD** の要素 w があることを示せばよいので，$w = R(\alpha) \cap \mathbf{HOD}$, ただし $\alpha > \max(\mathrm{rank}(x), \mathrm{rank}(y))$ とすればよい．ここでもちろん **HOD** は内包性公理をみたすので $\{x, y\} \in \mathbf{HOD}$ となることがわかる．この事実は補題 2.8 (b) からも導けるが，それはここでは問題にならない．和集合の公理，置換公理，羃集合の公理についても同じように議論すればよい．

$\omega \in \mathbf{HOD}$ であるから **HOD** で無限公理が成立する (第 IV 章補題 3.2)．したがって，**HOD** は ZF をみたす．

AC を確認するには，整列順序づけは絶対的なので (第 IV 章補題 5.4)，**HOD** の任意の要素 A に対してそれを整列順序づけする別の **HOD** の要素 R が存在することを示せばよい．そこで $A = \mathrm{Enod}(\alpha)$ だったとしよう．すると $A \subset \mathbf{OD}$ なので，A のすべての要素を，それらが Enod による数え上げに最初に現れる場所にもとづいて並べることができる．すなわち

$$R = \{ \langle x, y \rangle \in A \times A : \exists \xi (x = \mathrm{Enod}(\xi) \wedge \forall \eta \leq \xi (y \neq \mathrm{Enod}(\eta))) \}$$

とすればよい．このとき R は α から定義できるから **OD** に属する．このことを厳密に証明するには，やはり定理 2.2 を使う．$R \subset A \times A \subset \mathbf{HOD}$ だから補題 2.11 によって $R \in \mathbf{HOD}$ である．□

内包性公理と選択公理を別にすると，それ以外の ZFC の公理を確かめるさいに

は，**HOD** のくわしい定義ではなく **HOD** のもつ非常に一般的な性質を使いました．演習問題 6 では，ここでやったことについて抽象的な言明の形で述べてあります．

OD や **HOD** の定義は本質的にきわめて非構成的なので，どうも胡散臭いと思う人がいるかもしれません．たとえば，ω の順序数定義可能な部分集合 x であって最小の強到達不可能基数より小さな順序数からでは定義できないようなものが存在する，ということも矛盾しません (第 VIII 章演習問題 J13)．つまり $x \in \mathbf{OD}$ という述語は，(第 IV 章演習問題 2 にあるような) たいていのもっと《まとも》な述語とは違って，κ が強到達不能基数であっても $R(\kappa)$ に対して絶対的とは限らないのです．$x \in \mathbf{OD}$ かどうか決定するためには，本当に **V** のすべての集合について知っていなければなりません．

哲学的な難点を別にしても，その非構成的な本質のおかげで **OD** はたいへん扱いにくいのです．**HOD** に関する興味ある問題の答えはたいてい ZFC と独立です．たとえば **HOD** が CH のモデルになるかどうかは ZFC＋GCH と独立になります (第 VIII 章演習問題 J14)．

HOD について議論する過程で **OD** が **V** の真部分クラスになるかどうかは決定しませんでした．じつは $\mathbf{V} = \mathbf{OD}$ という言明は ZFC＋GCH と矛盾せず (第 VI 章)，独立です (第 VII 章演習問題 E5)．

HOD は $\mathbf{V} = \mathbf{OD}$ という言明のモデルなのではないか，という疑いをかけてみたくなるところですが，これは正しくないこともあります．$x \in \mathbf{HOD}$ のとき $x \in \mathbf{OD}$ となるのは明らかですが，なにしろ **OD** の定義 (定義 2.1) が絶対的とは限らないので，このことから $(x \in \mathbf{OD})^{\mathbf{HOD}}$ が導かれるとは限らないのです．$(\mathbf{V} = \mathbf{OD})^{\mathbf{HOD}}$ (つまり $\forall x \in \mathbf{HOD}[(x \in \mathbf{OD})^{\mathbf{HOD}}]$) という言明も，ZFC＋GCH のもとで決定できないのです (第 VIII 章演習問題 J14)．

定理 2.13 において，ZF 内で作業することにより **HOD** が ZFC のモデルであることが証明できたので，次の結果が得られます．

系 2.14. $\mathrm{Con(ZF)} \to \mathrm{Con(ZFC)}$．□

しかし **HOD** についてこれ以上のことは，ZF からは，あるいは ZFC＋GCH からでさえ，なにも証明できないので，**HOD** はこの他の相対的無矛盾性の結果を得るためには使えません．次の第 VI 章では，モデル **L** を定義することにします．**L** もまた定義可能性の概念を利用して得られるものですが，今度はその概念をもっ

と構成的に用いることによって，ZFC ばかりでなく，GCH や $\Diamond^+$ を $\mathbf{L}$ に相対化したものまで検証できるのです．

第 V 章の演習問題

特に指定がない場合は ZF で考えなさい．

[1] $\mathrm{Df}^*(A,n)=\mathrm{Df}(A,n)\cup\omega$ とおきなさい．この Df^* について補題 1.3 と補題 1.5 から補題 1.7 までが成立するような関数 En^* があることを示しなさい． [コメント] $\mathrm{Df}^*(A,n)$ はかならずしも $\mathcal{P}(A^n)$ の部分集合ではないので，$\mathrm{Df}(A,n)$ と等しいとは限りません．

*[2] 補題 1.3 と補題 1.5 から補題 1.7 までをみたす関数 Df^* と En^* で，さらに

$$\forall A\,\forall n\,(\mathrm{Df}(A,n)\subset\mathrm{Df}^*(A,n)\subset\mathcal{P}(A^n)) \text{ かつ}$$

$$\exists A\,\exists n\,(\mathrm{Df}(A,n)\neq\mathrm{Df}^*(A,n))$$

をみたすものがあることを示しなさい．

*[3] $\mathrm{ZF}+\neg\mathrm{CON}(\ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner)$ を S と書く．S においては，補題 1.3 と補題 1.5 から補題 1.7 までをみたす関数 Df^* と En^* で，さらに

$$\forall A\,\forall n\,(\mathrm{Df}^*(A,n)\subset\mathrm{Df}(A,n)) \text{ かつ } \exists A\,\exists n\,(\mathrm{Df}^*(A,n)\neq\mathrm{Df}(A,n))$$

を (S で証明できるという意味で) みたすものが定義できることを示しなさい．

[4] Df^* と En^* を，補題 1.3 と補題 1.5 が成立するような関数として，$\mathbf{OD}$ の定義の Df をこの Df^* に置き換えて $\mathbf{OD}^*$ を定義したとする．このとき $\mathbf{OD}^*=\mathbf{OD}$ を証明しなさい． [ヒント] 補題 2.7 と定理 2.2*から $\mathbf{OD}\subset\mathbf{OD}^*$ が得られます．

[5] 次のことが互いに同値であることを示しなさい．

(a) $\mathbf{V}=\mathbf{OD}$.

(b) $\mathbf{V}=\mathbf{HOD}$.

(c) $\mathbf{OD}$ は推移的クラスである．

(d) 外延性公理が $\mathbf{OD}$ で真である．

[ヒント] すべての順序数 α について $R(\alpha)\in\mathbf{OD}$ かつ $(R(\alpha)\cap\mathbf{OD})\in\mathbf{OD}$.

[6] $\mathbf{M}$ は内包性公理をみたす推移的クラスであり，$\forall x\subset\mathbf{M}\,\exists y\in\mathbf{M}(x\subset y)$ となっていると仮定する．このとき $\mathbf{M}$ が ZF のモデルになることを示しなさい．逆に $\mathbf{M}$

が ZF (あるいは ZF の十分大きな有限部分理論) をみたす推移的な真のクラスであるとき，$\forall x \subset \mathbf{M} \exists y \in \mathbf{M}(x \subset y)$ を示しなさい．

[7] ZF の有限個の公理の集合で次の性質をもつものがあることを示しなさい．それら有限個の公理を $\wedge$ で結んで一つにした文を ϕ とすると，ϕ をみたす推移的な真のクラス $\mathbf{M}$ は ZFC の公理すべてをみたす． [ヒント] 第 IV 章定理 7.5 を $\mathbf{M} \cap R(\alpha)$ に適用しなさい． [コメント] この結果を ZF が有限公理化不可能であるという事実 (第 IV 章系 7.7) とよく比較してごらんなさい．

[8] 述語 Df を使って，A が ZF の推移的モデルであるということを《意味する》述語 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{ZF}}(A)$ を書きなさい．

[9] T を推移的集合として，$\mathbf{OD}(T)$ とは直観的には $\mathbf{ON} \cup T \cup \{T\}$ の有限個の要素から定義可能な集合全体のなすクラスのことを意味するものとする．この定義を厳密に表現するにはどうすればいいかを示しなさい．$\mathbf{HOD}(T)$ を定義してそれが ZF をみたすことを示しなさい．$\mathbf{HOD}(T)$ が AC をみたすためには，T のなんらかの整列順序づけが $\mathbf{HOD}(T)$ の要素として存在することが必要かつ十分であることを示しなさい． [コメント] $\mathbf{HOD}(\mathcal{P}(\omega))$ は AC をみたすとは限りません．第 VII 章の演習問題 E4 を見てください．

[10] 第 IV 章第 10 節で示された手順にしたがって，ZF の内部でモデル理論を定式化しなさい．$\mathrm{Df}(A,n)$ が $\langle A, \in \rangle$ において一階論理で定義可能な A 上の n 項関係の全体の集合であることを，ZF 内で証明しなさい．同様に，$A \prec B$ と $A \equiv B$ の (第 1 節での) われわれの定義が，それぞれモデル理論上の $\langle A, \in \rangle \prec \langle B, \in \rangle$ と $\langle A, \in \rangle \equiv \langle B, \in \rangle$ の定義と同値になることを示しなさい．

第 VI 章

構成可能的集合

この章では ZF の範囲内で作業して，構成可能的集合のクラス $\mathbf{L}$ を定義します．$\mathbf{L}$ は推移的な真のクラスで，ZFC＋GCH のモデルとなり，さらに $\Diamond$ や $\Diamond^+$ をはじめとする多数の強力な組み合わせ論的原理をみたします．

クラス $\mathbf{L}$ は $\mathbf{L}=\bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} L(\alpha)$ の形で定義されます．この $L(\alpha)$ は再帰を用いて次のように定義されます：まず $L(0)=0$ とし，α が極限順序数のときは $L(\alpha)=\bigcup_{\xi<\alpha} L(\xi)$ とします．$L(\alpha)$ が与えられたとき，$L(\alpha+1)$ は $L(\alpha)$ に相対化された式によって $L(\alpha)$ の有限個の要素から定義できるような $L(\alpha)$ の部分集合の全体とします．正確な定義 (定義 1.4) に際しては,《式によって定義できる》という部分を第 V 章第 1 節の Df 関数を用いて厳密に言い直します．

$L(\alpha)$ には $R(\alpha)$ との密接な類似関係があります．両者の定義上の違いはただ一つで，$R(\alpha+1)$ は $R(\alpha)$ のすべての部分集合を含むのに対し，$L(\alpha+1)$ は $L(\alpha)$ の定義可能な部分集合だけを含む，という点だけです．この違いはあとあとたいへん重要になってくるのですが，$L(\alpha)$ のもつ簡単な性質の多くは，定義の類似性のおかげで $R(\alpha)$ と共通になっています．

§1　L の基本的な性質

この節では，ZF の範囲内で作業して $\mathbf{L}$ の厳密な定義を与え，その基本的な性質についての理論を展開します．最初に**定義可能冪集合**の演算 $\mathcal{D}$ を定義することから始めます．直観的には，$\mathcal{D}(A)$ とは有限個の A の要素から A に相対化された式によって定義できるような A の部分集合の全体のことです．

定義 1.1. $\mathcal{D}(A)=\{X\subset A:\exists n\in\omega\,\exists s\in A^n\,\exists R\in\mathrm{Df}(A,n+1)\,(X=\{x\in A:s^\frown\langle x\rangle\in R\})\}$. □

$\mathcal{D}$ は式 ϕ とメタ理論において次のように関連づけられています.

補題 1.2. 式 $\phi(v_0,v_1,\ldots,v_{n-1},x)$ の自由変数はここに示されたものだけだとする. このとき,

$$\forall A\,\forall v_0,\ldots,v_{n-1}\in A\,[\{x\in A:\phi^A(v_0,v_1,\ldots,v_{n-1},x)\}\in\mathcal{D}(A)].$$

【証明】 Df 関数に関するこれと対応した結果, すなわち第 V 章補題 1.3 による. □

第 V 章補題 1.3 と同じく, 補題 1.2 はじつはメタ理論で提示された一つの補題図式であって, 一つ一つの式 ϕ について, ここに示された式が ZF で証明できることを主張するものです.

補題 1.3. 任意の集合 A について,

(a) $\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{P}(A)$.
(b) A が推移的集合のときは $A\subset\mathcal{D}(A)$.
(c) $\forall X\subset A\,(|X|<\omega\to X\in\mathcal{D}(A))$.
(d) (AC) $|A|\geq\omega\to|\mathcal{D}(A)|=|A|$.

【証明】 (a) は定義から明らか. (b) について, 補題 1.2 を式 $x\in v$ に適用して

$$\forall v\in A\,[\{x\in A:x\in v\}\in\mathcal{D}(A)]$$

を得る. A が推移的集合であればこれは $\forall v\in A[v\in\mathcal{D}(A)]$ ということになる.

(c) について, まず次のことを確認しておこう. $R,S\in\mathrm{Df}(A,n+1)$ のとき $A^{n+1}\setminus R\in\mathrm{Df}(A,n+1)$ かつ $R\cap S\in\mathrm{Df}(A,n+1)$ であるから (第 V 章補題 1.2)

$$R\cup S=A^{n+1}\setminus((A^{n+1}\setminus R)\cap(A^{n+1}\setminus S))\in\mathrm{Df}(A,n+1)$$

であり, また $0=R\cap(A^{n+1}\setminus R)\in\mathrm{Df}(A,n+1)$ である. 次に, n 以下の自然数 m に対して帰納的に

$$E_n^m=\{t\in A^{n+1}:\exists i<m\,(t(n)=t(i))\}\in\mathrm{Df}(A,n+1)$$

を示そう. 帰納法のステップでは, E_n^{m+1} が E_n^m と $\{t\in A^{n+1}:t(n)=t(m)\}$ との和集合であり, 後者が $\mathrm{Df}(A,n+1)$ に属すること (第 V 章定義 1.1 (c)) を使う. こうして, A^n の任意の要素 s について

$$\mathrm{ran}(s)=\{x\in A: s^\frown\langle x\rangle\in E^n_n\}\in\mathcal{D}(A)$$

となり，$\forall n<\omega\forall X\subset A\,(|X|\leq n\to X\in\mathcal{D}(A))$ が得られる．

(d) について，AC を仮定しているので，$|A|\geq\omega$ ならすべての n について $|A^n|=|A|$ である．これと $|\mathrm{Df}(A,n+1)|\leq\omega$ から $|\mathcal{D}(A)|\leq|A|$. $|\mathcal{D}(A)|\geq|A|$ は (c) の特別の場合である $\forall x\in A(\{x\}\in\mathcal{D}(A))$ という事実からわかる．□

補題 1.2 を見れば (c) は簡単にわかると思った人は，ぜひ演習問題 19 と 20 に取り組んでみてください．

定義 1.4. 順序数 α に対する $L(\alpha)$ を超限再帰によって次のように定義する：

(a) $L(0)=0$.
(b) $L(\alpha+1)=\mathcal{D}(L(\alpha))$.
(c) α が極限順序数のときは，$L(\alpha)=\bigcup_{\xi<\alpha}L(\xi)$. □

定義 1.5. $\mathbf{L}=\bigcup\{L(\alpha):\alpha\in\mathbf{ON}\}$. □

第 III 章第 2 節で $R(\alpha)$ について証明した結果の (全部とはいいませんが) 多くは，$R(\alpha)$ のなんらかの定義可能な部分集合が $R(\alpha+1)$ に入ることを用いていましたので，$L(\alpha)$ についても同じ結果が成り立ちます．第 III 章第 2 節と類似の結果について調べていきましょう．

補題 1.6. 任意の順序数 α について

(a) $L(\alpha)$ は推移的集合である．
(b) $\forall\xi\leq\alpha\,(L(\xi)\subset L(\alpha))$.

【証明】 第 III 章補題 2.3 の証明とほとんど同じで，α に関する帰納法で示される．α 未満のすべての順序数 β について補題が成立していると仮定して α の場合を考える．α が 0 の場合と極限順序数の場合は自明なので，$\alpha=\beta+1$ と仮定しよう．このとき $L(\beta)$ は推移的集合であり，$L(\alpha)=\mathcal{D}(L(\beta))$ である．そこで (補題 1.3 (b) により) $L(\beta)\subset L(\alpha)\subset\mathcal{P}(L(\alpha))$ となり，ここから α についての (a) と (b) の両方が導かれる．□

$x\in\mathbf{L}$ のとき $x\in L(\alpha)$ となる最小の順序数は，定義 1.4 (c) によれば，かならず後続型順序数となるはずです．

定義 1.7. $x \in \mathbf{L}$ のとき，x の **L-階数**$\rho(x)$ とは $x \in L(\beta+1)$ をみたす最小の順序数 β のことである．□

第 III 章補題 2.5 とまったく同じようにして，次のことがわかります．

補題 1.8. すべての順序数 α について

$$L(\alpha) = \{x \in \mathbf{L} : \rho(x) < \alpha\}. \ \square$$

$R(\alpha)$ の場合と同様に，$x \in \mathbf{L}$ で $\beta = \rho(x)$ のときは $x \subset L(\beta)$ ですが $x \notin L(\beta)$ で $x \in L(\beta+1)$ となります．ただし $R(\alpha)$ の場合とは違って，$L(\beta)$ のある部分集合が，$\mathbf{L}$ には属するが $L(\beta+1)$ には入らない，ということがよく起こります．順序数に関しては，どちらの場合も同じ場所にあらわれます．

補題 1.9.

(a) $\forall \alpha \in \mathbf{ON}\,(\alpha \in \mathbf{L} \wedge \rho(\alpha) = \alpha)$.

(b) $\forall \alpha \in \mathbf{ON}\,(L(\alpha) \cap \mathbf{ON} = \alpha)$.

【証明】 (a) は (b) から直ちにわかるので，(b) を α に関する帰納法で示す．α が 0 の場合と極限順序数の場合は自明なので，$\alpha = \beta+1$ とし，$L(\beta) \cap \mathbf{ON} = \beta$ と仮定する．ここから $L(\alpha) \cap \mathbf{ON} = \alpha$ という結論を導きたい．

$L(\beta) \subset L(\alpha) \subset \mathcal{P}(L(\beta))$ なので $\beta \subset L(\alpha) \cap \mathbf{ON} \subset \alpha$ である．そこで，あとは $\beta \in L(\alpha)$ を示せばよい．第 IV 章定理 5.1 により，なんらかの Δ_0 式 $\phi(x)$ について

$$\forall x (x \text{ は順序数である} \leftrightarrow \phi(x))$$

となっている．Δ_0 式は任意の推移的集合に対して絶対的なので

$$\beta = L(\beta) \cap \mathbf{ON} = \{x \in L(\beta) : \phi^{L(\beta)}(x)\}$$

となり，補題 1.2 によって $\beta \in \mathcal{D}(L(\beta)) = L(\alpha)$．□

補題 1.2 の別の応用例として，

補題 1.10. $L(\alpha) \in L(\alpha+1)$.

【証明】 $L(\alpha) = \{x \in L(\alpha) : (x = x)^{L(\alpha)}\}$ だから，補題 1.2 によりこれは $\mathcal{D}(L(\alpha))$，つまり $L(\alpha+1)$ に属する．□

このあと，第 III 章補題 2.8 や第 III 章補題 2.9 に対応する結果を証明することもできます．たとえば $x \in \mathbf{L}$ なら $\bigcup x \in \mathbf{L}$ であるという結果ですが，$\mathbf{L}$ が ZF のモ

デルであることさえわかれば，この結果は $\bigcup$ 演算の絶対性からどのみち導かれます．ただ，第 III 章補題 2.8 の証明をたどりなおせば，$\rho(\bigcup x)$ の $\rho(x)$ による評価も得られることになります．演習問題 5 を見てください．**WF** の場合と違って，$\mathbf{L}$ は $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ を含むとはいえませんし，絶対的でない $\mathcal{P}$ のような演算のもとで閉じているとはいえません．

$R(\alpha)$ と $L(\alpha)$ の構成を，もう少し立ち入って比較してみましょう．

補題 1.11. すべての順序数 α について $L(\alpha)\subset R(\alpha)$.

【証明】 α に関する超限帰納法による．□

補題 1.12. $L(\alpha)$ の有限な部分集合はどれも $L(\alpha+1)$ に属する．

【証明】 補題 1.3 (c) による．□

補題 1.13.

(a) $\forall n\in\omega\,(L(n)=R(n))$.

(b) $L(\omega)=R(\omega)$.

【証明】 (a) は n に関する帰納法で補題 1.12 を用いる．(b) は (a) から導かれる．□

補題 1.14. (AC) 任意の無限順序数 α について $|L(\alpha)|=|\alpha|$.

【証明】 まず $\alpha\subset L(\alpha)$ なので $|\alpha|\le|L(\alpha)|$ であることに注意．$|\alpha|=|L(\alpha)|$ を α に関する超限帰納法で証明する．$\alpha\ge\omega$ として $\forall\beta<\alpha(\beta\ge\omega\rightarrow|L(\beta)|=|\beta|)$ を仮定する．α が極限順序数のときは，$L(\alpha)$ は $|\alpha|$ 個の濃度がたかだか $|\alpha|$ の集合の和だから (AC によれば) それ自身の濃度もたかだか $|\alpha|$ である．$\alpha=\beta+1$ のときは $|L(\beta)|=|\beta|=|\alpha|$ であり，$L(\alpha)=\mathcal{D}(L(\beta))$ だから補題 1.3 (d) によって $|L(\alpha)|=|\alpha|$ となる．□

じつは，補題 1.14 は選択公理を使わなくても証明できます (演習問題 1)．補題 1.14 によると，濃度を比べるだけで,《たいていの》無限順序数 α について $L(\alpha)\neq R(\alpha)$ となることがわかります．たとえば $\omega<\alpha<\omega_1$ のときは $L(\alpha)$ は可算で $R(\alpha)$ は不可算ですから．実際，$\alpha>\omega$ の場合，$|L(\alpha)|=|R(\alpha)|$ となるためには $\alpha=\beth_\alpha$ が必要かつ十分です (演習問題 2)．また，$\mathcal{P}(\omega)\subset R(\omega+1)$ ですが，$\mathbf{L}$ に属さない ω の部分集合が存在することもおおいにあり得ます．もしも $\mathcal{P}(\omega)\not\subset\mathbf{L}$ であれば (第

VII 章でわかるとおりこれは無矛盾です)，$\alpha>\omega$ ならかならず $L(\alpha)\neq R(\alpha)$ となります．しかし，系 3.4 によれば $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ であることもまた無矛盾です．この仮定からは，$\alpha=\beth_\alpha$ ならばかならず $L(\alpha)=R(\alpha)$ となることが導かれます (演習問題 3).

§2 Lにおける ZF

この節では ZF で作業して **L** において ZF のすべての公理が真であることを証明します.

定理 2.1. (ZF) **L** は ZF のモデルである.

【証明】 **L** は推移的クラスであるから，外延性公理が **L** で成立する．また，基礎の公理は任意のクラスにおいて成立する (第 IV 章補題 2.4 と第 IV 章補題 2.12).

第IV章補題2.5によると，内包性公理を確かめるには，任意の式 $\psi(x,z,v_1,\ldots,v_n)$ について，自由変数がここに示されたものだけだという前提のもとで

$$\forall z,v_1,\ldots,v_n\in\mathbf{L}\,(\{\,x\in z:\psi^{\mathbf{L}}(x,z,v_1,\ldots,v_n)\,\}\in\mathbf{L})$$

となることを示せばよい．そもそも $L(\alpha+1)=\mathcal{D}(L(\alpha))$ と定義したのは，これがうまくいくために仕組んだことだった．しかし $\mathcal{D}(L(\alpha))$ では **L** ではなく $L(\alpha)$ への相対化を問題にしているので，その部分を反映原理を使って修正する．**L** の要素 z, $v_1,\ldots,v_n$ を固定し，$z,v_1,\ldots,v_n\in L(\alpha)$ となるような順序数 α を考える．β を，α より大きい順序数で ψ が $L(\beta),\mathbf{L}$ に対して絶対的となるようなものとする (第 IV 章定理 7.5)．このとき，$(x\in z)\wedge\psi$ を ϕ と書けば

$$\{\,x\in z:\psi^{\mathbf{L}}(x,z,v_1,\ldots,v_n)\,\}=\{\,x\in L(\beta):\phi^{L(\beta)}(x,z,v_1,\ldots,v_n)\,\}$$

となり，補題 1.2 により，この集合は $\mathcal{D}(L(\beta))$, すなわち $L(\beta+1)$ に属する.

対の公理と和集合の公理と置換公理と冪集合の公理はどれも要するに十分大きな集合の存在に関するもので，**L** で確かめるのは容易である．たとえば置換公理を確かめるには，(第 IV 章補題 2.11 によると) 次のことを示せば十分である：任意の式 $\phi(x,y,A,w_1,\ldots,w_n)$ と **L** の任意の要素 $A,w_1,\ldots,w_n$ について，もしも

$$\forall x\in A\,\exists!y\in\mathbf{L}\,\phi^{\mathbf{L}}(x,y,A,w_1,\ldots,w_n) \tag{1}$$

であるとしたら

$$\exists Y\in\mathbf{L}\,(\{\,y:\exists x\in A\,\phi^{\mathbf{L}}(x,y,A,w_1,\ldots,w_n)\,\}\subset Y) \tag{2}$$

となる．そのために，(1) を仮定して

$$\alpha = \sup\{\rho(y)+1 : \exists x \in A\, \phi^{\mathbf{L}}(x,y,A,w_1,\ldots,w_n)\}$$

とおけば，$Y=L(\alpha)$ は補題 1.10 より $\mathbf{L}$ に属し (2) をみたす．

最後に，$\omega\in\mathbf{L}$ だから，$\mathbf{L}$ で無限公理が成立する．□

ひと仕事必要だったのは内包性公理の部分だけだったという事情は，第 V 章の演習問題 6 で一般化されています．

§3　構成可能性公理

$\mathbf{L}$ をめぐるここまでの議論で，$\mathbf{L}$ が $\mathbf{V}$ の真部分クラスであることを証明してこなかったことを確認してください．実際，この節で示すとおり，$\mathbf{V}=\mathbf{L}$ という言明は，ありそうもないことですが ZF と矛盾しないのです．いっぽう，$\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$ もまた ZF と矛盾しないことを第 VII 章で証明します．

定義 3.1. **構成可能性公理**とは $\mathbf{V}=\mathbf{L}$, つまり $\forall x\,\exists\alpha(x\in L(\alpha))$ という言明である．□

ZF のモデルであることを確かめた $\mathbf{L}$ が $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ もみたすことを示すことによって，ZF$+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ の無矛盾性を証明します．ここで注意してほしいのですが，$\mathbf{V}=\mathbf{L}$ が $\mathbf{L}$ において成立していることは，$1=1$ あるいは $\mathbf{L}=\mathbf{L}$ のようにまったく当たり前ではありません．$\forall x\in\mathbf{L}\,\exists\alpha(x\in L(\alpha))$ は明らかですが，$(\mathbf{V}=\mathbf{L})^{\mathbf{L}}$ の意味するところは $\forall x\in\mathbf{L}\,\exists\alpha\in\mathbf{L}\,(x\in L(\alpha)^{\mathbf{L}})$ ですから，$(\mathbf{V}=\mathbf{L})^{\mathbf{L}}$ を証明するためにはまず $x\in L(\alpha)$ という式の絶対性を検証する必要があります．

$\mathbf{L}$ をめぐるこの状況を $\mathbf{HOD}$ の場合 (第 V 章第 2 節) と比較するといいでしょう．ZF において $(\mathbf{V}=\mathbf{HOD})^{\mathbf{HOD}}$ を証明することはできません．一見明らかな《証明》は，$\mathbf{HOD}$ が絶対的でないために成立しないのです．

補題 3.2. 関数 $L(\alpha)$ は ZF$-$P の任意の推移的モデルに対して絶対的である．

【証明】 Df 関数が絶対的であることは第 V 章補題 1.7 で見た．そこで第 IV 章第 5 節の方法によって，$\mathcal{D}$ 関数が絶対的であることが容易に導かれる．$L(\alpha)$ は $\mathcal{D}$ から超限再帰によって定義されるからこれもやはり絶対的である (第 IV 章定理 5.6)．□

定理 3.3. (ZF)　$\mathbf{L}$ は ZF$+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ のモデルである．

【証明】 $\mathbf{L}$ が ZF のモデルであることについては定理 2.1 を見なさい．$(\mathbf{V}=\mathbf{L})^{\mathbf{L}}$ を示すためには

$$\forall x \in \mathbf{L}\, \exists \alpha \in \mathbf{L}\, ((x \in L(\alpha))^{\mathbf{L}})$$

を示す必要がある．$\mathbf{L}$ の要素 x を固定し，$x \in L(\alpha)$ となる順序数 α を固定しなさい．$\mathbf{ON} \subset \mathbf{L}$ なので $\alpha \in \mathbf{L}$ となり，また補題 3.2 より $(x \in L(\alpha))^{\mathbf{L}}$ となる．□

系 3.4. $\mathrm{Con(ZF)} \to \mathrm{Con(ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L})$．□

構成可能性公理 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ と基礎の公理 $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ (第 IV 章第 4 節) の無矛盾性証明はたいへんよく似ていますが，重大な違いがあることもはっきりさせておく必要があります．私たちは ZF^- で作業して $\mathbf{WF}$ を定義し，それが ZF^- および基礎の公理のモデルであることを示しました．そのことによって

$$\mathrm{Con(ZF^-)} \to \mathrm{Con(ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{WF})$$

の形式的証明が得られたわけです．それと同時に，どのみち数学の全体が $\mathbf{WF}$ 内で展開できるのだから，$\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ を公理の一つとして加えた ZF を基本的な公理系にしよう，と提案しました．ところが，すべての数学的対象が，それどころか ω の部分集合ですら，すべてが $\mathbf{L}$ に属すると信じるべき理由などはありません．だから私たちは $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ をもっともらしい基本的な公理として ZF に追加したりしないで，単にそれを相対的無矛盾性証明を得るためのツールの一つとして用いるにとどめます．$\mathrm{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ から証明できる文が ZF と矛盾しないこと，またそれが $\mathbf{L}$ において真であること，こうした結果こそが有用なのです．ϕ がある程度数学的に込みいった文だとしたら，$\phi^{\mathbf{L}}$ を証明するには，$\mathbf{V} = \mathbf{L}$ を仮定して ϕ を証明するほうが，議論の最中にあらゆるものごとを $\mathbf{L}$ に相対化してから考えるのとくらべて，神経を使わずに済むので簡単です．第 4 節ではこの手順を AC + GCH について実行し，また第 5 節では $\diamondsuit$ や $\diamondsuit^+$ をこの方法で扱います．

この節を終える前に，$L(\alpha)$ の絶対性から導かれる他の結果の数々を述べましょう．これらの結果には $\mathbf{L}$ のモデルとしての最小性が関連しています．

定理 3.5. $\mathbf{M}$ を $\mathrm{ZF} - \mathrm{P}$ の推移的モデルであるような真のクラスとする．このとき $\mathbf{L} = \mathbf{L}^{\mathbf{M}} \subset \mathbf{M}$ となる．

【証明】 まず $\mathbf{ON} \subset \mathbf{M}$ であることを示そう．任意の順序数 α をとる．$\mathbf{M} \not\subset R(\alpha)$ であるから $\mathbf{M}$ に属するある x について $\mathrm{rank}(x) \geq \alpha$ となる．ところが rank 関数は $\mathbf{M}$ に対して絶対的であり (第 IV 章定理 5.7)，それゆえ $\mathrm{rank}(x) \in \mathbf{M}$ であって，いっぽう $\mathbf{M}$ は推移的クラスなので $\alpha \in \mathbf{M}$ となる．

あとは，$L(\alpha)$ と $\mathbf{ON}$ の絶対性によって

$$\mathbf{L}^{\mathbf{M}}=\{x\in\mathbf{M}:(\exists\alpha(x\in L(\alpha)))^{\mathbf{M}}\}=\bigcup\{L(\alpha):\alpha\in\mathbf{ON}\}=\mathbf{L},$$

したがって $\mathbf{L}=\mathbf{L}^{\mathbf{M}}\subset\mathbf{M}$ となる．□

真のクラスを扱うときはいつでもそうですが，定理 3.5 が本当に意味をなすかどうか気をつけて見ておく必要があります．きちんと言えば，順序数，階数，$L(\alpha)$ などの概念が ϕ の任意の推移的モデルに対して絶対的となるような，ZF − P のなんらかの有限個の公理の連言 ϕ があります (第 IV 章補題 7.1)．すると，定理 3.5 を表現するには，任意のクラス (すなわち述語) $\mathbf{M}$ について

$$\mathbf{M}\text{ は真のクラスである}\wedge\phi^{\mathbf{M}}\rightarrow\mathbf{L}\subset\mathbf{M}$$

が証明可能だと言えばよいわけです．

訳注：《連言》については第 IV 章演習問題 17 の訳注を見てください．

次に，集合モデルに対する類似の結果を見ておきましょう．

定義 3.6. $\mathrm{o}(M)=M\cap\mathbf{ON}$．□

補題 3.7. M が推移的集合であれば $\mathrm{o}(M)\in\mathbf{ON}$ であり，これは M に属さない最小の順序数に一致する．□

定理 3.8. ZF − P の有限個の公理の連言 ψ で，

$$\forall M\,(M\text{ は推移的集合}\wedge\psi^{M}\rightarrow(L(\mathrm{o}(M))=\mathbf{L}^{M}\subset M))$$

をみたすものがある．

【証明】 上で論じた ϕ に加えて，最大の順序数がないことを証明するのに十分なだけの公理を追加して ψ とする．M が推移的集合で ψ^{M} であれば $\mathrm{o}(M)$ は極限順序数だから，$L(\mathrm{o}(M))=\bigcup_{\alpha\in M}L(\alpha)$ である．ところが $L(\alpha)$ の絶対性によって

$$\mathbf{L}^{M}=\{x\in M:(\exists\alpha(x\in L(\alpha)))^{M}\}=\bigcup_{\alpha\in M}L(\alpha)$$

となり，したがって $L(\mathrm{o}(M))=\mathbf{L}^{M}\subset M$ となる．□

最小性と同様に，ZF + $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ のモデルに関する一意性定理もあります．この理論の推移的モデルは，それが真のクラスである場合は $\mathbf{L}$ であり，集合である場合はある順序数 δ についての $L(\delta)$ です．ここでも，公理は有限個で十分です．

定理 3.9. ZF − P + **V** = **L** のある有限個の公理の連言 χ で，

(a) **M** が推移的な真のクラスであり $\chi^{\mathbf{M}}$ であれば **M** = **L** となる．

(b) $\forall M(M$ は推移的である $\wedge \chi^M \rightarrow M = L(\mathrm{o}(M)))$.

という条件をみたすものがある．

【証明】 χ としては定理 3.8 の ψ と **V** = **L** との連言を考えればよい．もしも **M** が推移的で $\chi^{\mathbf{M}}$ ならば $(\forall x(x \in \mathbf{L}))^{\mathbf{M}}$ となり，したがって $\mathbf{M} = \mathbf{L}^{\mathbf{M}}$ となる．(a) と (b) はそれぞれ定理 3.5 と定理 3.8 から導かれる．□

ZF − P + **V** = **L** の推移的集合モデルの例としては，任意の不可算基数 κ に対する $L(\kappa)$ が考えられます (系 4.12 を見てください).

L の最小性の結果として **V** = **HOD** の無矛盾性が得られます．

定理 3.10. (ZF)　**V** = **L** → **V** = **HOD**.

【証明】 モデル **HOD** に定理 3.5 を適用すると **L** ⊂ **HOD** が得られる．そこで，**V** = **L** → **V** ⊂ **HOD** となる．□

系 3.11. Con(ZF) → Con(ZF + **V** = **HOD**).　□

系 3.12. (ZF)　**V** = **L** → AC.

【証明】 定理 3.10 と，**HOD** においては AC がいつでも成立しているという事実 (第 V 章定理 2.13) をあわせると直ちに導かれる．□

次の節では，**V** = **L** → AC の，**HOD** の理論に頼らない直接の証明を与えます．

§4　L における選択公理と一般連続体仮説

ここでは ZF で作業して，**V** = **L** から AC と GCH が導かれることを示します．すると，前節の結果により，$\mathrm{AC}^{\mathbf{L}}$ と $\mathrm{GCH}^{\mathbf{L}}$ とが ZF の定理として成立し，**L** は AC + GCH のモデルになります．

まず AC について考えましょう．じつは **V** = **L** → AC であることはすでに (系 3.12 において) わかっているのですが，ここではもっと直接に，$L(\alpha)$ の整列順序づけを明示的に定義することで証明します．この定義は帰納法によって進められます．基本的なアイディアは次のようなものです．すでに $L(\alpha)$ の整列順序づけが得

られているとすると，それを用いて $L(\alpha)^{<\omega}$ に辞書式の順序づけが導入されます．すると，$L(\alpha)$ の部分集合が $L(\alpha)^{<\omega}$ の要素から定義される可算無限とおりのしかたを数え上げることによって，$\mathcal{D}(L(\alpha))$ つまり $L(\alpha+1)$ を整列順序づけできます．これを厳密に表現するために，Df の要素を数え上げる En 関数 (第 V 章定義 1.4) を用います．

定義 4.1. 順序数 α に関する再帰によって，$L(\alpha)$ の整列順序づけ $\lhd_\alpha$ あるいは $\lhd(\alpha)$ を次のように定義する．まず，$\lhd_0=0$ とする．α が極限順序数のときは

$$\lhd_\alpha=\{\langle x,y\rangle\in L(\alpha)\times L(\alpha):\rho(x)<\rho(y)\vee$$
$$(\rho(x)=\rho(y)\wedge\langle x,y\rangle\in\lhd(\rho(x)+1))\}$$

と定める．$\lhd_\alpha$ が得られたら，$\lhd_\alpha^n$ をそれに導かれた $L(\alpha)^n$ の辞書式順序づけとする：

$$s\lhd_\alpha^n t\leftrightarrow\exists k<n\,(s\restriction k=t\restriction k\wedge s(k)\lhd_\alpha t(k)).$$

$L(\alpha+1)$ すなわち $\mathcal{D}(L(\alpha))$ の要素 X に対して，n_X とは

$$\exists s\in L(\alpha)^n\,\exists R\in\mathrm{Df}(L(\alpha),n+1)\,(X=\{x\in L(\alpha):s^\frown\langle x\rangle\in R\})$$

となるような最小の自然数 n のことだとする．また s_X とは

$$\exists R\in\mathrm{Df}(L(\alpha),n_X+1)\,(X=\{x\in L(\alpha):s^\frown\langle x\rangle\in R\})$$

となるような $L(\alpha)^{n_X}$ の要素 s のうちで $\lhd_\alpha^{n_X}$-最小のもののことだとする．そして m_X とは,

$$X=\{x\in L(\alpha):s_X^\frown\langle x\rangle\in\mathrm{En}(m,L(\alpha),n_X)\}$$

をみたす最小の自然数 m のことだとする．そのうえで，$L(\alpha+1)$ の要素 X と Y に対して $X\lhd_{\alpha+1}Y$ を,

(a) $X,Y\in L(\alpha)\wedge X\lhd_\alpha Y$ であるかまたは

(b) $X\in L(\alpha)\wedge Y\notin L(\alpha)$ であるかまたは

(c) $X,Y\notin L(\alpha)\wedge[(n_X<n_Y)\vee(n_X=n_Y\wedge s_X\lhd_\alpha^{n_X}s_Y)\vee(n_X=n_Y\wedge s_X=s_Y\wedge m_X<m_Y)]$ であること,

と定義する．□

ここで注意すべきことですが，定義 4.1 では，定義が帰納的に進行するのと並行して，$\lhd_\alpha$ が実際に整列順序づけになることをチェックしてゆく必要があります．

というのも，s_X の定義が $\lhd_\alpha$ が整列順序づけであることを前提しているからです．ですから，きちんと書こうとすれば，$\lhd_\alpha$ が整列順序づけでない場合には $\lhd_{\alpha+1}=0$ とすると定義しておいてから，$\lhd_\alpha$ が実際にすべての順序数 α について整列順序づけであることを補題として証明する，ということになるでしょう．つまり，定義 4.1 はじつは定義と補題が一体になったものなのです．

補題 4.2. $\mathbf{V}=\mathbf{L}\rightarrow \mathrm{AC}$.

【証明】 $x\in\mathbf{L}$ とするとある順序数 α について $x\subset L(\alpha)$ となり，このとき x は $\lhd_\alpha$ によって整列順序づけされる．□

この $\lhd_\alpha$ を，**L** 全体を整列順序づけするために使うこともできます．

定義 4.3. $x<_L y$ とは，$x,y\in\mathbf{L}$ であり，かつ

$$\rho(x)<\rho(y)\vee(\rho(x)=\rho(y)\wedge\langle x,y\rangle\in\lhd(\rho(x)+1))$$

となることをいう．□

つまり，**L** の要素の間にまず **L**-階数によって順序をつけ，**L**-階数がどちらも α であるような要素の間は $\lhd_{\alpha+1}$ で順序づけします．これは $\lhd_\alpha$ を帰納的に定義するさいに用いられた手続きと同じなので，次の結果が得られます．

補題 4.4. $<_L$ は **L** を整列順序づけする．各 $L(\alpha)$ は $<_L$ のもとでの **L** の始切片であり，$<_L$ を $L(\alpha)$ に制限したものは $\lhd_\alpha$ と一致する．□

HOD の場合と違って，**L** の整列順序づけは次にいう意味で絶対的です．

補題 4.5.

(a) 関数 $\lhd(\alpha)$ は，ZF − P の推移的モデルに対して絶対的である．

(b) **M** が ZF − P のモデルで真のクラスのとき，$<_L$ は **M** に対して絶対的である．

(c) M が ZF − P のモデルで集合のとき，M の要素 x と y が $x,y\in\mathbf{L}^M$ をみたせば，$x<_L y$ と $(x<_L y)^M$ とは同値となる．

【証明】 (a) は再帰によって定義された関数の絶対性から導かれる．(b) は $\mathbf{L}\subset\mathbf{M}$ (定理 3.5) と (a) から導かれる．(c) も (a) から導かれるが，それは $x,y\in\mathbf{L}^M$ のとき (定理 3.8 によって) $\mathrm{o}(M)$ 未満のある順序数 α について $x,y\in L(\alpha)$ となるからである．□

実際，(c) において $<_L$ が M に対して絶対的であると主張することはできません．第 VII 章で示すとおり，$\mathbf{L}$ に属する M で ZF$+\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$ の十分に大きな有限部分理論のモデルになっているようなものを構成できます．このとき，もしも x と y が $M\setminus\mathbf{L}^M$ の要素であれば，x と y は $<_L$ では比較できますが $(<_L)^M$ では比較できません．同様の理由により，関数 $L(\alpha)$ が絶対的であるにもかかわらず $x\in\mathbf{L}$ という述語は絶対的ではありません．$x\in\mathbf{L}$ なのに $(x\notin\mathbf{L})^M$ だとしたら，それは，$\mathrm{o}(M)$ より大きな順序数 α について $x\in L(\alpha)$ となる，ということです．

それでは次に GCH に目を向けましょう．$\mathbf{V}=\mathbf{L}$ を仮定すると，ω のあらゆる部分集合がある可算の段階で構成されるという事実から CH が導かれます．つまり $\mathcal{P}(\omega)\subset L(\omega_1)$ となり $|L(\omega_1)|=\omega_1$ (補題 1.14) なので，$2^\omega\leq\omega_1$ となるというわけです．より一般に次のことが成立します．

定理 4.6. $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ であれば，任意の無限順序数 α に対して $\mathcal{P}(L(\alpha))\subset L(\alpha^+)$.

【証明】 ZF$+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ の有限個の公理の連言 χ で

$$\forall M(\,M \text{ は推移的集合である} \wedge \chi^M \to M=L(\mathrm{o}(M))\,)$$

となるものをとろう．定理 3.9 によればこれは可能である．

$\mathbf{V}=\mathbf{L}$ を仮定して $\mathcal{P}(L(\alpha))$ の要素 A を考えよう．$X=L(\alpha)\cup\{A\}$ とおく．このとき補題 1.14 により $|X|=|\alpha|$ となる (補題 1.14 には AC が必要だったが，すでに $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ から AC が導かれることが証明済みなのでよい)．レーヴェンハイムとスコーレムの定理を使った論法とモストフスキの収縮定理により，$|M|=|\alpha|$, $X\subset M$, $\chi^M\leftrightarrow\chi^{\mathbf{V}}$ をみたす推移的集合 M が存在する (第 IV 章の系 7.10 を $\mathbf{Z}=\mathbf{V}$ として適用する)．いま $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ なので $\chi^{\mathbf{V}}$ は真であり，したがって χ^M も成立する．このとき $M=L(\mathrm{o}(M))$ である．また，$|M|=|\alpha|$ なので $\mathrm{o}(M)<\alpha^+$ である．したがって

$$A\in L(\mathrm{o}(M))\subset L(\alpha^+). \ \square$$

系 4.7. (ZF)　$\mathbf{V}=\mathbf{L}\to$AC$+$GCH.

【証明】 AC については補題 4.2 による．GCH については，定理 4.6 から任意の無限基数 κ に対して $\mathcal{P}(\kappa)\subset\mathcal{P}(L(\kappa))\subset L(\kappa^+)$ となるから $2^\kappa\leq|L(\kappa^+)|=\kappa^+$ (補題 1.14 による) となる．$\square$

系 4.8. (ZF)　$(\mathrm{AC}+\mathrm{GCH})^{\mathbf{L}}$. □

系 4.9. $\mathrm{Con}(\mathrm{ZF})\to\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\mathrm{GCH})$. □

GCH や $\diamondsuit$ や $\diamondsuit^+$ の証明でもそうですが，$\mathbf{V}=\mathbf{L}$ という仮定からなにかを証明しようとするときには，しばしば **V** の初等部分モデルを考える，と実在主義者なら表現するような論法が用いられます．すべての式が $W,\mathbf{V}$ に対して絶対的となるような集合 W を考え，これにモストフスキの収縮定理を適用して定理 4.6 で用いた推移的集合 M を得るというわけです．しかし，すべての式について同時に語ることはできないので，正式な議論のさいは実在主義者のこの論法には手直しが必要です．

ここでの証明では，なんらかの有限な式のリストが絶対的となるような集合 W を得る，という方法を用いました．第 5 節の $\diamondsuit^+$ の証明は，これとは別のアプローチの例になっています．そこでは，**集合** N に対する初等部分モデルであるという関係 $W\prec N$ を定義して (第 V 章定義 1.9)，N として **L** のかわりに適当な $L(\kappa)$ を用いることによってこれを応用しています．

L を組み合わせ論的に構成するというアプローチもあり，ゲーデルが数学基礎論の専門家以外の人たちを対象に自分の仕事を紹介した論説 [Gödel 1940] はその方法で展開されています．ここでゲーデルは，$\mathcal{D}$ を反復適用するかわりにとてもシンプルな八つの関数 $F_1,\ldots,F_8$ (たとえば $F_1(x,y)=\{x,y\}$ とか $F_3(x,y)=x\setminus y$) を定義して，これを反復して適用することで **L** を構成しています．レーヴェンハイムとスコーレムの定理の論法は，$F_1,\ldots,F_8$ という演算に関する閉包を考えることに帰着します．このアプローチには，**L** を取扱うにあたって，論理学の痕跡をきれいに消し去ってしまえるという利点があります．

この節を終わるまえに，$\mathbf{V}=\mathbf{L}$ の集合モデルの存在をめぐる結果をいくつか述べることにします．第 IV 章系 7.11 では，ZFC のいくらでも大きな有限部分理論について，その可算な推移的モデルの存在が ZFC から証明できることを示しました．これはさらに次のように改良できます．

定理 4.10. (ZF)　$\phi_1,\ldots,\phi_n$ を $\mathrm{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ の任意の公理とするとき，

$$\exists M\left(|M|=\omega\wedge M\ \text{は推移的集合である}\wedge\bigwedge_{i=1}^{n}\phi_i^M\right).\qquad(*)$$

【証明】 式 $(*)$ が $\mathrm{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ から導かれることは，第 IV 章系 7.11 を使えばすぐ

にわかる．そこで ZF で考えると，$(*)$ を $\mathbf{L}$ に相対化したものが成立することがわかる．$\mathbf{L}$ の要素 M を，$(*)$ の条件を $\mathbf{L}$ においてみたすものとする．あとは，絶対性により M が $(*)$ の条件を $\mathbf{V}$ においてみたすことをチェックする．

$(|M|=\omega)^{\mathbf{L}}$ なので，$\mathbf{L}$ のある要素 f について (f は ω から M の上への 1 対 1 写像である)$^{\mathbf{L}}$ となる．このとき f は ω から M の上への 1 対 1 写像であるから，$|M|=\omega$ となる．(M は推移的集合である)$^{\mathbf{L}}$ ということから M は推移的集合である．また，$\mathbf{L}$ は推移的クラスだから $(\phi_i^M)^{\mathbf{L}}$ は ϕ_i^M と同値になる．したがって M は $\mathbf{V}$ においても $(*)$ をみたす．□

定理 4.10 において $\mathrm{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ の十分多くの公理をリストしておけば，M は $\omega<\delta<\omega_1$ であるようなある順序数 δ に対応した $L(\delta)$ となります (定理 3.9)．しかし，この種の反映定理ではいつもそうですが，この δ がどのようなものなのか，組み合わせ論的な方法で単純明快に言いあらわすことはできません．そのかわりにここでは，不可算正則基数 κ に対して，$L(\kappa)$ が $\mathrm{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ のうち冪集合の公理を除くすべての公理をみたすこと (系 4.12) を証明します．

補題 4.11. $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ のとき，κ が不可算な正則基数であればかならず $L(\kappa)=H(\kappa)$ となる．

【証明】 $x\in L(\kappa)$ ならばある α について $\alpha<\kappa$, $x\in L(\alpha)$ で，このとき $\mathrm{trcl}(x)\subset L(\alpha)$ となるから $|\mathrm{trcl}(x)|\le|L(\alpha)|<\kappa$. したがって $x\in H(\kappa)$. もしも $L(\kappa)\ne H(\kappa)$ だとしたら，基礎の公理によって，$A\in H(\kappa)\setminus L(\kappa)$ かつ $A\cap(H(\kappa)\setminus L(\kappa))=0$ となる集合 A がとれる．$H(\kappa)$ は推移的集合であるから，

$$A\subset H(\kappa)\cap L(\kappa)=L(\kappa)$$

である．また，$|A|<\kappa$ であり κ は正則基数であるから，$\omega<\alpha<\kappa$ をみたすある順序数 α について $A\subset L(\alpha)$. このとき定理 4.6 によって $A\in L(\alpha^+)\subset L(\kappa)$ となり矛盾が生じる．□

系 4.12. (ZF)　κ が不可算な正則基数であるとき，$\mathrm{ZF}-\mathrm{P}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ のすべての公理が $L(\kappa)$ において成立する．もしも κ が弱到達不能基数であれば，冪集合の公理も $L(\kappa)$ において成立する．

【証明】 もしも $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ であったなら，この結果は補題 4.11 と，$H(\kappa)$ に関する類似の結果 (第 IV 章定理 6.5, 定理 6.6. GCH があるため弱到達不能基数は強到達

不能基数でもあることに注意) によってすぐに導かれる．ZF だけから出発するには，定理 4.10 の証明と同じようにする．κ が正則基数であれば (κ は正則基数であり)$^{\mathbf{L}}$, κ が弱到達不能基数であれば (κ は弱到達不能基数である)$^{\mathbf{L}}$ ことに注意すればよい．□

系 4.13. $\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\mathrm{GCH}+\neg\exists\alpha$ (α は弱到達不能基数である)).

【証明】 これは第 IV 章補題 6.9 を改良するもので，証明もたいへん似通ったものになる．《κ は弱到達不能基数である》を手短かに $\mathrm{Wi}(\kappa)$ と書くことにする．

$$\mathbf{M} = \{ x \in \mathbf{L} : \forall\kappa\,(\mathrm{Wi}(\kappa) \to x \in L(\kappa)) \}$$

としよう．$\mathbf{M}=\mathbf{L}$ なのかそれとも最小の弱到達不能基数 κ があって $\mathbf{M}=L(\kappa)$ となるのか，ZF 集合論では決定することはできないが，いずれにせよ $\mathbf{M}$ は $\mathrm{ZFC}+\mathrm{GCH}+\neg\exists\alpha(\mathrm{Wi}(\alpha))$ をみたす．□

§5 **L** における $\diamondsuit$ と $\diamondsuit^+$

ここでは，$\mathbf{V}=\mathbf{L}$ から第 II 章第 7 節の組み合わせ論的原理 $\diamondsuit$ と $\diamondsuit^+$ が導かれることを示します．といっても，第 II 章定理 7.14 によれば $\diamondsuit^+ \to \diamondsuit$ ですから，証明する必要があるのは $\diamondsuit^+$ だけです．$\diamondsuit^+$ の証明は GCH の証明の変形になっています．定理 4.6 の証明では，$A \subset \omega_1$ のときに $L(\omega_1) \cup \{A\}$ にスコーレム閉包の論法を適用して $A \in L(\omega_2)$ を示したわけですが，ここでは $\{\omega, A\}$ にスコーレム閉包の論法を適用して，A が可算順序数の c.u.b. 集合上で《把握される》ことを示します．ここではこの論法を第 V 章定義 1.9 の記号 $\prec$ を使って表記しています．

補題 5.1. 集合 $\{\rho < \omega_1 : L(\rho) \prec L(\omega_1)\}$ は ω_1 において非有界である．

【証明】 $H_{nm} : L(\omega_1)^n \to L(\omega_1)$ を，第 V 章定理 1.11 の証明と同じやりかたで定義される $L(\omega_1)$ のスコーレム関数としよう．つまり B として $L(\omega_1)$ を考え，$\lhd$ として $L(\omega_1)$ のなんらかの整列順序づけを考えればよい．ここで，$L(\rho)$ がすべての H_{nm} に関して閉じていれば $L(\rho) \prec L(\omega_1)$ となる．ところがそのような順序数 ρ の集合は ω_1 において c.u.b. である (第 II 章補題 6.13)．□

系 4.12 によって，$L(\rho) \prec L(\omega_1)$ であれば $L(\rho)$ は $\mathrm{ZF}-\mathrm{P}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ のモデルとなります．

定理 5.2. $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ から $\Diamond^+$ が (したがって $\Diamond$ も) 導かれる.

【証明】 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ を仮定しよう．可算順序数 α に対し，$q(\alpha)$ を $\rho>\alpha$ および $L(\rho)\prec L(\omega_1)$ をみたす最小の順序数 ρ とする．$\mathcal{A}_\alpha=\mathcal{P}(\alpha)\cap L(q(\alpha))$ と定める．補題 5.1 より $q(\alpha)<\omega_1$ なので，$\mathcal{A}_\alpha$ は可算集合である．この $\langle\mathcal{A}_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$ が $\Diamond^+$-列であることを証明しよう．

まず，$L(\omega_2)$ にレーヴェンハイムとスコーレムの定理の論法を適用することについて考察する．$L(\omega_2)$ 上で順序づけ $<_L$ を使ってスコーレム関数 $K_{nm}:L(\omega_2)^n\to L(\omega_2)$ を定義したとする．つまり，m が $2^i\cdot 3^j\cdot 5^4$ という形になっていて，さらに $s\in\mathrm{En}(m,L(\omega_2),n)$ である，という条件がみたされている場合には，$s^\frown\langle x\rangle\in\mathrm{En}(i,L(\omega_2),n+1)$ をみたす $L(\omega_2)$ の要素 x のうち $<_L$-最小のものを $K_{nm}(s)$ と定め，この条件がみたされていない場合は $K_{nm}(s)=0$ とする．

$X\subset L(\omega_2)$ として Y を $\mathrm{cl}(X)$, すなわちすべての K_{nm} に関する X の閉包とする．このとき $Y\prec L(\omega_2)$ であり，$\mathrm{ZF}-\mathrm{P}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ のすべての公理について，それを Y に相対化したものが成立している．それらの公理のうちに外延性公理も含まれるので，$\in$ は Y において外延的であり，Y 上で定義されたモストフスキ収縮関数は同型写像になる．

《x は最小の不可算順序数である》という式を $\phi(x)$ とすると，$(\exists x\phi(x))^{L(\omega_2)}$ より $(\exists x\phi(x))^Y$ となる．γ を $\phi(\gamma)^Y$ をみたす Y の要素とすれば，$Y\prec L(\omega_2)$ より $\phi(\gamma)^{L(\omega_2)}$ であるから $\gamma=\omega_1$ となり，$\omega_1\in Y$ になる．同様に $0\in Y, \omega\in Y$ となる．また Y は順序数の後続者関数 S のもとで閉じているから，$\omega\subset Y$ となる．さらに，$\zeta\in Y$ かつ $\zeta<\omega_1$ のとき (ζ は可算である)^Y となるので，Y に属するある関数 f について $(f''\omega=\zeta)^Y$ となるが，このとき $(f''\omega=\zeta)^{L(\omega_2)}$ より $f''\omega=\zeta$. $\omega\subset Y$ であるから各 n について $f(n)\in Y$ であり，したがって $\zeta\subset Y$ となる．こうして，$\omega_1\subset Y$ あるいは $Y\cap\omega_1\in\omega_1$ のどちらかが成立する．

ここからは X が可算である場合を考える．このとき Y も可算である．そこで $\alpha=Y\cap\omega_1$ とおく．すなわち Y に属さない可算順序数のうち最小のものを α とする．Y から推移的集合 M の上へのモストフスキ収縮関数を G とする．このとき $\mathrm{ZF}-\mathrm{P}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ の公理はすべて M において真であるから，ある順序数 δ について $M=L(\delta)$ となる．M が可算であることから $\delta<\omega_1$ である．G は順序数に関しては同型写像であり $Y\cap(\omega_1+1)=\alpha\cup\{\omega_1\}$ であるから，$\zeta<\alpha$ のときは $G(\zeta)=\zeta$, いっぽう $G(\omega_1)=\alpha$ となるから $\alpha<\delta<\omega_1$. $\phi(\omega_1)^Y$ より $\phi(\alpha)^M$ すなわち (α は不可算で

ある$)^M$ が，他方で (α は可算であり$)^{L(\omega_1)}$，したがって (α は可算である$)^{L(q(\alpha))}$. ω から α の上への写像は δ 段階ではまだ存在せず，$q(\alpha)$ 段階ではすでに構成されているから，$\alpha<\delta<q(\alpha)<\omega_1$ となる．次に $A\in Y$ かつ $A\subset\omega_1$ としよう．写像 G の定義 (第 III 章定義 5.9) より $G(A)=\{G(x):x\in Y\wedge x\in A\}$ となり，$G(A)=\{G(\zeta):\zeta\in A\cap\alpha\}=A\cap\alpha$. したがって $A\cap\alpha=G(A)\in L(\delta)$ となり $A\cap\alpha\in\mathcal{A}_\alpha$ となる．

それでは，$\langle\mathcal{A}_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$ が $\Diamond^+$-列であることの証明に移ろう．A を ω_1 の任意の部分集合としなさい．そして

$$C=\{\alpha<\omega_1:\alpha=\mathrm{cl}(\alpha\cup\{A\})\cap\omega_1\}$$

と定めよう．この C が ω_1 内で閉であることは容易にわかるし，C が ω_1 において有界でないことは，任意の可算順序数 β に対して $\mathrm{cl}(\beta\cup\{A\})\cap\omega_1$ が C に属する β 以上の順序数であることからわかる．さて，$\alpha\in C$ としよう．示すべきことは $A\cap\alpha\in\mathcal{A}_\alpha$ と $C\cap\alpha\in\mathcal{A}_\alpha$ である．$Y=\mathrm{cl}(\alpha\cup\{A\})$ とおいてさきほどの議論を適用する．このとき Y の定義により $A\in Y$ であるから，すでに示されたとおり $A\cap\alpha\in\mathcal{A}_\alpha$. いっぽう，$C\notin Y$ であって $C\cap\alpha\in L(\delta)$ は証明できない (演習問題 11)．ところが，われわれが主張しているのは $C\cap\alpha\in L(q(\alpha))$ であった．

K_{nm} と類似したスコーレム関数を $L(\delta)$ 上で定義しようとすると，二通りの方法がある．K^1_{nm} を，同型写像 G によって K_{nm} から導かれてくるもの，すなわち

$$K^1_{nm}(G(y_1),\ldots,G(y_n))=G(K_{nm}(y_1,\ldots,y_n))$$

としよう．すべての K^1_{nm} についての閉包を cl^1 であらわす．このとき $G(A)=A\cap\alpha$ より

$$C\cap\alpha=\{\beta<\alpha:\beta=\mathrm{cl}^1(\beta\cup\{A\cap\alpha\})\cap\alpha\}$$

となる．次に，K^2_{nm} を $\mathrm{En}(m,L(\delta),n)$ を使って直接定義されるとしよう．すなわち，m が $2^i\cdot3^j\cdot5^4$ の形で，$s\in\mathrm{En}(m,L(\delta),n)$ である場合は $K^2_{nm}(s)$ は $s^\frown\langle x\rangle\in\mathrm{En}(i,L(\delta),n+1)$ をみたす $L(\delta)$ の要素 x のうち $<_L$-最小のものとし，この条件にあてはまらない場合は $K^2_{nm}(s)=0$ とする．すべての K^2_{nm} についての閉包を cl^2 であらわすことにして，

$$C^2=\{\beta<\alpha:\beta=\mathrm{cl}^2(\beta\cup\{A\cap\alpha\})\cap\alpha\}$$

と定める．$L(\delta)\in L(q(\alpha))$ であり，$L(q(\alpha))$ は $L(\omega_1)$ の初等部分モデルとして $\mathrm{ZF}-\mathrm{P}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ の推移的モデルである．そこで，C^2 の定義に関連したいろいろな概念の絶対性により $C^2\in L(q(\alpha))$ となる．そこで，あとは K^1_{nm} と K^2_{nm} が同じもので

したがって $C \cap \alpha = C^2$ となることを示せば，目的は果たされる．それと同じことだが，示すべきことは，Y の任意の要素 $y_1, \ldots, y_n$ について

$$K^2_{nm}(G(y_1), \ldots, G(y_n)) = G(K_{nm}(y_1, \ldots, y_n))$$

となるということである．

$m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$ かつ $s = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \in \mathrm{En}(m, L(\omega_2), n)$ となっていると仮定しよう．この仮定が成り立っていない場合の議論も似たようなもので，しかもいっそう簡単である．さてこのとき ($Y \prec L(\omega_2)$ なので) $s \in \mathrm{En}(m, Y, n)$ であり，しかも $K_{nm}(s)$ は $s^\frown\langle x \rangle \in \mathrm{En}(i, Y, n+1)$ をみたす Y の要素 x のうち $<_L$-最小のものである．また，第 V 章補題 1.13 によれば

$$\langle G(y_1), \ldots, G(y_n) \rangle \in \mathrm{En}(m, L(\delta), n)$$

であり，しかも $K^2_{nm}(G(y_1), \ldots, G(y_n))$ は $s^\frown\langle x \rangle \in \mathrm{En}(i, Y, n+1)$ をみたす $L(\delta)$ の要素 $G(x)$ のうち $<_L$-最小のものである．これが $G(K_{nm}(s))$ と一致することは，$x, z \in Y$ のとき $x <_L z \leftrightarrow G(x) <_L G(z)$ となるという事実から導かれる．この事実の理由は $x <_L z \leftrightarrow (x <_L z)^{L(\omega_2)} \leftrightarrow (x <_L z)^Y \leftrightarrow (G(x) <_L G(z))^{L(\delta)} \leftrightarrow G(x) <_L G(z)$ ということで，このうち最初と最後の $\leftrightarrow$ は絶対性により，第二の $\leftrightarrow$ は $Y \prec L(\omega_2)$ により，第三の $\leftrightarrow$ には第 IV 章補題 7.9 を用いる．□

弱いほうの公理 $\diamondsuit$ が $\mathbf{L}$ で成立していることの直接の証明もあります．$\diamondsuit$ の興味深い点は，それが ω_1 以上のすべての正則基数に拡張できるところです．いっぽう，$\diamondsuit^+$ はそれらの基数に必ずしも拡張できるとは限りません．演習問題 13 から 17 までを見てください．

第 VI 章の演習問題

[1] 任意の無限順序数 α に対して $|L(\alpha)| = |\alpha|$ となることを，AC を使わずに示しなさい．［ヒント］定理 4.10 や系 4.12 の証明を検討してみなさい．

[2] AC を用いて，ω より大きい α が条件 $|L(\alpha)| = |R(\alpha)|$ をみたすためには $\alpha = \beth_\alpha$ が必要かつ十分であることを示しなさい．

[3] $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ ならば，ω より大きい α が条件 $L(\alpha) = R(\alpha)$ をみたすためには $\alpha = \beth_\alpha$ が必要かつ十分である．このことを示しなさい．

[4] $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ ならば，任意の無限基数 κ について $L(\kappa) = H(\kappa)$ となる．このことを

示しなさい．

[5] x, y が $\mathbf{L}$ に属すると仮定し，$\bigcup x$, $\{x\}$, $x\times y$, $x\cup y$, $\{x,y\}$, $\langle x,y\rangle$ の ρ ($\mathbf{L}$-階数) を，$\rho(x)$ と $\rho(y)$ を使ってあらわしなさい．$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ が $L(\omega+\omega)$ に属することを示しなさい．$\mathbb{R}$ は (第 I 章第 11 節でしたように) デデキントの切断によって定義されるものと仮定して，$\mathbb{R}^{\mathbf{L}}=\mathbb{R}\cap\mathbf{L}$ と $\rho(\mathbb{R}^{\mathbf{L}})=\omega_1^{\mathbf{L}}$ を示しなさい．

[6] 任意の集合 A について $L(0,A)=\{A\}\cup\mathrm{trcl}(A)$, $L(\alpha+1,A)=\mathcal{D}(L(\alpha,A))$ とし，α が極限順序数のときは $L(\alpha,A)=\bigcup_{\xi<\alpha} L(\xi,A)$ とする．また $\mathbf{L}(A)=\bigcup\{L(\alpha,A):\alpha\in\mathbf{ON}\}$ とする．$\mathbf{L}(A)$ は ZF のモデルであること，$\mathbf{L}(A)$ で AC が成立するためには $\mathrm{trcl}(A)$ の整列順序づけが $\mathbf{L}(A)$ に存在することが必要かつ十分であること，これを証明しなさい．さらに，$\mathbf{L}(A)$ は A を要素として含む ZF の推移的モデルであるような真のクラスのうち最小のものであることを示しなさい． [コメント] $\mathbf{L}(\mathcal{P}(\omega))$ は AC をみたすとは限りません (第 VII 章演習問題 E4)．

[7] $\exists S\subset\omega_1\,(\mathbf{V}=\mathbf{L}(S))$ と仮定する．このとき AC と GCH が成立することを示しなさい． [ヒント] CH については，$A\in\mathcal{P}(\omega)$ のときに

$$\exists\beta,\gamma<\omega_1\,(A\in L(\beta,S\cap\gamma))$$

となることを示しなさい．

[8] $\exists S\subset\omega_1\,(\mathbf{V}=\mathbf{L}(S))$ と仮定する．このとき $\diamondsuit^+$ を証明しなさい． [ヒント] 定理 5.2 の証明の記号を使うことにして，$q(\alpha)$ はこの場合 $L(\rho,S\cap\alpha)\prec L(\omega_1,S\cap\alpha)$ かつ $\rho>\alpha$ となるような最小の順序数 ρ のことだとします．レーヴェンハイムとスコーレムの論法は，今回は $L(\omega_2,S)$ について適用されます．$\delta<q(\alpha)$ を証明するために次の二つの場合を検討します．第一の場合：ある可算順序数 σ について $\omega_1=\omega_1^{\mathbf{L}(S\cap\sigma)}$ となる場合，定理 5.2 の論法が使える．第二の場合：すべての可算順序数 α について ω_1 が $\mathbf{L}(S\cap\alpha)$ において到達不能基数になる場合，$L(q(\alpha),S\cap\alpha)$ は α より大きな $\mathbf{L}(S\cap\alpha)$ の基数を含むが $L(\delta,S\cap\alpha)$ はそうではない．

[9] 次のことが互いに同値であることを証明しなさい．

(i) $\diamondsuit^+$.

(ii) $2^{<\omega_1}$ に含まれるクレパ木 T で，

$$\forall f\in 2^{\omega_1}\,\exists g\in 2^{\omega_1}\,(f\in\mathbf{L}(g)\wedge g \text{ は } T \text{ の道である})$$

をみたすものが存在する．

(iii) $2^{<\omega_1}$ に含まれる ω_1-木 T と 2^{ω_1} の要素 h で,

$$\forall f \in 2^{\omega_1}\, \exists g \in 2^{\omega_1}\, (f \in \mathbf{L}(g,h) \wedge g \text{ は } T \text{ の道である})$$

をみたすものが存在する.

ここで, $\mathbf{L}(g,h)$ とは $\mathbf{L}(\{g,h\})$ を意味する. [ヒント] (iii)→(i) は演習問題 8 と同様にします. $g \in T \cap 2^{\alpha}$ に対して $q(\alpha,g)$ を $\rho > \alpha$ かつ

$$L(\rho, \{g, h \restriction \alpha, T \cap 2^{<\alpha}) \prec L(\omega_1, \{g, h \restriction \alpha, T \cap 2^{<\alpha})$$

をみたすような最小の順序数 ρ とし, $q(\alpha) = \sup\{\, q(\alpha,g) : g \in T \cap 2^{\alpha} \,\}$ と定めます. レーヴェンハイムとスコーレムの定理の論法は, 今回は $L(\omega_2, h)$ について適用されます. ここで $T \in \mathbf{L}(h)$ と仮定できることに注意しましょう.

[10] $\{\, \rho < \omega_1 : L(\rho) \prec L(\omega_1) \,\}$ が ω_1 において c.u.b. であることを示しなさい. このことは補題 5.1 では完全には証明されていないことに注意しなさい.

[11] 定理 5.2 の $\Diamond^+$ の証明について, $C \notin \mathrm{cl}(\omega_1 \cup \{A\})$ であることを示しなさい. また, もしも α が C の極限点であれば $C \cap \alpha \notin L(\delta)$ であることを示しなさい. [ヒント] D が ω_1 の c.u.b. 部分集合で $D \in \mathrm{cl}(\omega_1 \cup \{A\})$ であれば, C に属するすべての β に対して, $D \cap \beta$ は β において非有界です.

[12] 任意の集合 P に対して, $P \cap \mathbf{M} \in \mathbf{M}$ をみたし ZF の推移的モデルとなる真のクラスのうち最小のものが存在することを示しなさい. このモデルは $\mathbf{L}^P$ と呼ばれる. $\mathbf{L}^P$ はかならず AC をみたすことを示しなさい. [ヒント] $L^P(0) = 0, L^P(\alpha + 1) = \mathcal{D}^P(L^P(\alpha))$ としなさい. ただし, $\mathcal{D}^P(A)$ とは構造 $(A; \in, P \cap A)$ において一階の言語で A の有限個の要素から定義可能な A の部分集合全体のなす集合です. [コメント] $P = \mathcal{P}(\omega)$ のとき $\mathbf{L}^P = \mathbf{L}$ となります. いっぽう, $\mathbf{L}(P)$ は $\mathbf{L}$ と一致するとは限りません.

[13] $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ を仮定して $\Diamond$ を直接的に証明しなさい. [ヒント] $\langle A_\alpha, C_\alpha \rangle$ を, 次の条件をみたす対のうち $<_L$-最小のものとしなさい : C_α は α において c.u.b. で, $\neg \exists \xi \in C_\alpha (A \cap \xi = A_\xi)$. そのような対がないときは $\langle A_\alpha, C_\alpha \rangle = \langle 0, 0 \rangle$ としなさい. このとき $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ は $\Diamond$-列となります.

[14] $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ を仮定して, 任意の不可算正則基数 κ とその定常部分集合 E について $\Diamond(\kappa, E)$ が成立することを示しなさい. ただし, $\Diamond(\kappa, E)$ とは次の主張 : E に属する各 α に対してその部分集合 A_α があって, κ の任意の部分集合 A について

$\{\alpha : A\cap\alpha = A_\alpha\}$ が定常集合となる．

[15] κ を不可算正則基数とし，E をその定常部分集合とする．$\diamondsuit^+(\kappa, E)$ とは次のことをいう：次のような $\mathcal{P}(\alpha)$ の部分集合 $\mathcal{A}_\alpha$ が E の各要素 α に対して存在する．$|\mathcal{A}_\alpha| \leq \alpha$ であり，かつ，κ の任意の部分集合 A に対して κ の c.u.b. 集合が存在して $\forall\alpha\in E\cap C\,(A\cap\alpha\in\mathcal{A}_\alpha \wedge C\cap\alpha\in\mathcal{A}_\alpha)$．$\mathbf{V}=\mathbf{L}$ を仮定し $E=\{\alpha<\kappa : \mathrm{cf}(\alpha)=\omega\}$ とおいて，$\diamondsuit^+(\kappa, E)$ を示しなさい．［コメント］ $\diamondsuit^+(\kappa) \to \diamondsuit^+(\kappa, E)$ となり，いっぽう $\diamondsuit(\kappa, E) \to \diamondsuit(\kappa)$ となります．ただし，$\diamondsuit^+(\kappa)$ は $\diamondsuit^+(\kappa,\kappa)$ のこと，$\diamondsuit(\kappa)$ は $\diamondsuit(\kappa,\kappa)$ のことです．

[16] $\diamondsuit^*(\kappa, E)$ は，$\diamondsuit^+(\kappa, E)$ から $C\cap\alpha\in\mathcal{A}_\alpha$ という条件を取り除いて弱くしたものとする．ZFC において $\diamondsuit^*(\kappa, E) \to \diamondsuit(\kappa, E)$ を示しなさい．［ヒント］ 第 II 章定理 7.14 と第 II 章演習問題 53 を見なさい．

[17] κ が**玄妙基数**であるとは，それが不可算な正則基数であって，しかも，κ 未満の各順序数 α の部分集合 A_α が任意に与えられたとき，κ の定常部分集合 S が存在して，

$$\forall\alpha,\beta\in S\,(\alpha<\beta \to A_\alpha = A_\beta\cap\alpha)$$

となることをいう．ZFC において，κ を玄妙基数であるとして，κ が強到達不能基数であることと，$\diamondsuit(\kappa)$ と $\neg\diamondsuit^*(\kappa)$ を示しなさい．［コメント］ このような基数について，より詳しくは [Baumgartner 1975] を見なさい．κ が可測基数であれば，κ は $\mathbf{V}$ においても $\mathbf{L}$ においても玄妙基数になります．

[18] Df^* と En^* を，第 V 章の補題 1.3, 補題 1.5, 補題 1.7 を成立させる関数だとする．これらを用いて $\mathcal{D}^*$ と $\mathbf{L}^*$ を定義し，$\mathbf{L}^*=\mathbf{L}$ を示しなさい．［ヒント］ $\mathbf{L}\subset\mathbf{L}^*$ と $\mathbf{L}^*\subset\mathbf{L}$ を示しなさい．

[19] 第 V 章の補題 1.3, 1.5, 1.7 を成立させるような関数 Df^* と En^* であって，さらに次の性質をもつものを ZF において定義できることを示しなさい：この章の補題 1.3 (c)，すなわち

$$\forall X\subset A\,(|X|<\omega \to X\in\mathcal{D}^*(A))$$

は (Con(ZFC) である限り) ZFC で証明できない．［ヒント］ CON(⌜ZF⌝) ならば $\alpha=\omega$ とし，$\neg$CON(⌜ZF⌝) ならば矛盾のゲーデル数のうち最小のものを α として，$\mathrm{Df}^*(A,n) = \bigcup_{k<\alpha} \mathrm{Df}'(k,A,n)$ と定義しなさい．［コメント］ したがって，演習問題 18

で $\mathbf{L}\subset\mathbf{L}^*$ を示すときには，$\mathbf{L}^*$ の基本的な性質を補題 1.3 (c) を使わないで確かめておく必要があります．

[20] 補題 1.3 (c) の次の《証明》のどこが間違いだろうか：$X=\{a_0,\ldots,a_{n-1}\}$ としなさい．式 ϕ として $x=a_0\vee\cdots\vee x=a_{n-1}$ を用いれば，$X=\{x\in A:\phi^A(a_0,\ldots,a_{n-1},x)\}$ となり，補題 1.2 により $X\in\mathcal{D}(A)$ となる．

[21] 第 IV 章第 10 節で述べたように ZF 内部で形式化された論理学を考え，

$$\exists M\,(M \text{ は推移的集合である}\wedge M\models\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner)$$

という文を SM であらわす．ZF + SM において

$$(L(\delta)\models\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner)\wedge\forall M((M \text{ は推移的集合である}\wedge M\models\ulcorner\mathrm{ZF}\urcorner)\to L(\delta)\subset M)$$

をみたす順序数 δ の存在が証明できることを示しなさい．さらに，この $L(\delta)$ が $\mathrm{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}+\neg\mathrm{SM}$ のモデルであることを示しなさい．これを用いて

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF})\to\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}+\neg\mathrm{SM})\qquad(*)$$

の証明を得なさい． [コメント] この $L(\delta)$ は最小モデルと呼ばれます．$(*)$ はゲーデルの不完全性定理 (第 I 章定理 14.3) からも導かれます．

***[22]** 二階論理は構造のすべての部分集合にわたる量化を認めている．集合 A 上の二階の定義可能性にもとづいて $\mathcal{D}^2(A)$ を定義し，この $\mathcal{D}^2$ を $\mathcal{D}$ のかわりに用いて $\mathbf{L}^2$ を定義しなさい．$\mathbf{L}^2=\mathbf{HOD}$ を示しなさい．同様にして n 階論理にもとづいて $\mathbf{L}^n$ を定義し，$n\geq 2$ ならば $\mathbf{L}^n=\mathbf{HOD}$ となることを示しなさい．

***[23]** 集合 A について

$$\mathcal{D}^-(A)=\{X\subset A:\exists R\in\mathrm{Df}(A,1)\,(X=\{x\in A:\langle x\rangle\in R\})\},$$

と定義する．ここでは A の要素をパラメータとして用いることが許されていない．$\mathbf{L}$ の定義で $\mathcal{D}$ のかわりに $\mathcal{D}^-$ を用いることによって $\mathbf{L}^-$ を定義し，$\mathbf{L}^-=\mathbf{L}$ を示しなさい． [ヒント] α に関する帰納法によって $\exists\beta(\langle L(\xi):\xi<\alpha\rangle\in L^-(\beta))$ を示しなさい．

第 VII 章

強制法

第 VI 章で論じた構成可能性の方法により **L** という一つのモデルが生まれました．そうして，たとえば GCH とか $\diamondsuit^+$ のような，このモデルで真であるような言明についてだけは無矛盾性を確立できました．これに対して，強制法は，さまざまな数学的性質を有する多種多様なモデルを生み出す一般的な方法です．

§1　一般的な注意事項

強制法を理解するにあたって，数学的な難しさとメタ数学的な難しさという二種類の障害があります．

数学上の難しさは，半順序や稠密集合やフィルターなどの扱いに堪能(たんのう)になる必要があるということです．マーティンの公理 (第 II 章第 2 節) に慣れ親しんでいる人は，この困難を克服するための長い道のりをすでに歩んできているといえます．ただし，これらの概念を集合論のいろいろなモデルに相対化することを，これから学ばなければなりません．

メタ数学的な難しさというのはこういうことです．ZFC$+$**V**$\neq$**L** (あるいはこれより強い ZFC$+\neg$CH のような理論) の無矛盾性を証明するには，今までやってきたように，ZF なり ZFC なりの集合論の内部で作業して成立させたい公理の推移的モデルを定義するという方法を使えないのです．

この難点をきちんと理解するために，仮に ZFC で作業して推移的な真のクラス **N** を定義し，ZFC$+$**V**$\neq$**L** のすべての公理が **N** で真であることを証明することができたと仮定しましょう．このとき，**L** の最小性から **L**$\subset$**N** となりますが，**V**$=$**L** が **L** で真，**N** で偽であることから，**L**$\neq$**N** となります．つまり，ZFC の枠内の議

論によって $\mathbf{L}$ を真に拡大するクラスの存在が証明できることになり，ZFC$\vdash\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$ となるわけですが，(Con(ZFC) を仮定する限り) これは不可能です．というのも，ZFC$+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ は矛盾を含まないからです．

こうした困難を回避するための素朴な方法は，ZFC$+\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$ の推移的**集合**モデル N を作ることです．集合モデル N に対して前の段落の最小性の論法を適用すると (第 VI 章定理 3.8) $L(\mathrm{o}(N))\subset N$ かつ $L(\mathrm{o}(N))\neq N$ となりますが，これは $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ と矛盾しません．$x\in N\setminus L(\mathrm{o}(N))$ であったとしても，x が $\mathbf{L}$ に属することはありえます．ただその場合は $\rho(x)>\mathrm{o}(N)$ となるわけです．

素朴な考察を続けます．大雑把にいって，私たちは次のような手順を踏むことになります．ZFC 集合論の任意の推移的可算モデル M から出発し，このモデルを**基礎モデル**と呼びます．これに対して $M\subset N$ かつ $\mathrm{o}(M)=\mathrm{o}(N)$ をみたす ZFC の推移的可算モデル N を見つける一般的な手順を述べます．私たちの方法で得られる N は M の**ジェネリック拡大**と呼ばれます．ここで $M\neq N$ とすることに成功しさえすれば，N は $\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$ をみたすことになります．なぜなら第 VI 章定理 3.8 によって

$$\mathbf{L}^N=L(\mathrm{o}(N))=L(\mathrm{o}(M))=\mathbf{L}^M\subset M$$

となるからです．構成の細部をいろいろ変化させれば，$\neg$CH や CH$+2^{\omega_1}=\omega_5$ といったさまざまな言明を N がみたすようにできます．

残念ながら，この素朴なアプローチには少し具合の悪い点があります．というのも，ゲーデルの不完全性定理に関連したいろいろの結果により，ZFC で議論している限り，ZFC のすべての公理をみたす集合モデルは作り出せないからです．くわしくは，第 IV 章第 7 節と同第 10 節，それからこの章の第 9 節を参照してください．ただし幸いなことに，ZFC あるいは ZF$+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ の任意の有限個の公理のリストの推移的可算モデルを，ZFC 内で作り出すことはできます (第 IV 章系 7.11 と第 VI 章定理 4.10)．

それから，ZFC$+\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$ (あるいは ZFC$+\neg$CH 等々) の公理の前もって決めておいた有限なリストのモデル N を，強制法で作ることができます．こうして N は ZFC の十分多くの公理のモデル M のジェネリック拡大として得られます．

そこで，私たちの方法による Con(ZFC)$\rightarrow$Con(ZFC$+\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$) の証明は，形式的には次のような仕組みをもちます．ZFC$+\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$ から矛盾を導くことができたと仮定します．すると，ZFC$+\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$ の有限個の公理のリスト $\phi_1,\ldots,\phi_n$ があっ

て，なんらかの (じつは任意の) 文 ψ について

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi \wedge \neg\psi$$

となります．ところが，強制法を用いると

$$\mathrm{ZFC} \vdash \exists N\,(\phi_1^N \wedge \cdots \phi_n^N)$$

を示すことができ，したがって

$$\mathrm{ZFC} \vdash \exists N\,(\psi^N \wedge \neg\psi^N)$$

となり，ZFC が矛盾を含むことになります．このように，$\mathrm{ZFC}+\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$ の矛盾が与えられたとしてそこから ZFC の矛盾を作り出す手順を明示的に定義しているので，この方法で完全に有限主義的な相対的無矛盾性証明が得られることになります．

上の段落で述べたようなメタ数学的に繊細な部分は，強制法を学ぶにあたっては一時的に忘れていられます．あたかも ZFC あるいは $\mathrm{ZFC}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ の公理すべての推移的可算モデル M が存在すると素朴に仮定していられる，というのが，このアプローチの強味です．おかげで，M をジェネリック拡大して $\mathrm{ZFC}+\neg\mathrm{CH}$ なりなんなりをみたすような N を構成するために必要となる数学的な問題に集中してとりかかることができるわけです．この構成法を理解してから，前の段落で述べたことを適用して $\mathrm{Con(ZFC)} \to \mathrm{Con(ZFC}+\neg\mathrm{CH})$ の有限主義的証明が得られるかどうかチェックすればよいのです．

強制法のメタ数学については第 9 節でふたたびとりあげます．そこではまた，同じ結果を得るための別のアプローチについても論じます．さしあたっては，《M を ZFC の推移的可算モデルとする》と言ったとき，それは《M はここでの議論を実行に移すのに十分なだけ多くの ZFC の公理の推移的可算モデルである》を手短かに言ったものと考えておけばよいでしょう．

§2 ジェネリック拡大

M を ZFC の推移的な可算モデルとしましょう．第 II 章第 2 節で MA について論じたときと同じ意味で $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ が半順序であり，しかも $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle \in M$ とすると，M のジェネリック拡大 N を得るためにこの $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ を用いることができます．そしてこの N もまた ZFC のモデルになります．半順序 $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ をいろいろ変えることによって，さまざまな相対的無矛盾性の結果が得られます．

技術的な理由から，最大要素をもつ半順序に話を限ると好都合です．この制限がなくても強制法は使えます (演習問題 B1) が，話が少々面倒になり，それによって無矛盾性の結果がより多く得られるわけでもありません (演習問題 B2)．また，第 II 章第 2 節の MA の応用例にあったような《自然に得られる》半順序はたいてい最大要素をもちます．無駄なことに言葉を費すことを避けるためにも，次のように定義しておきます．

定義 2.1. 半順序とは $\langle \mathbb{P}, \leq, \mathbb{1} \rangle$ という三つ組で，$\leq$ が $\mathbb{P}$ を半順序づけしており，$\mathbb{1}$ が $\mathbb{P}$ の一つの最大要素である (すなわち $\forall p \in \mathbb{P} (p \leq \mathbb{1})$ となる) ようなものである．また，c.t.m. は《推移的可算モデル》の略記である．□

よくある記号の濫用として，今後 $\langle \mathbb{P}, \leq, \mathbb{1} \rangle$ のつもりで $\mathbb{P}$ と書くことがあります．たとえば $\mathbb{P} \in M$ と書いたら，それは $\mathbb{P} \in M$, $\leq \in M$, $\mathbb{1} \in M$ という意味です (ただし M が推移的なので $\mathbb{1} \in M$ は $\mathbb{P} \in M$ から導かれますが)．二つの半順序について議論しているときは $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle$ と $\langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}}, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \rangle$ といった書き方で区別します．形式上のことを言えばもちろん，$\mathbb{P}$ という集合だけでは順序 $\leq_{\mathbb{P}}$ は決まらないし，$\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}} \rangle$ だけで $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ は決まりません．なにしろ，半順序の定義において $\leq_{\mathbb{P}}$ が狭義の半順序づけになることを要求していないので，最大要素も複数ある可能性があるからです．これについては，第 II 章定義 2.1 とそれにつづく議論を見てください．

定義 2.2. $\mathbb{P}$ を半順序とするとき G が M 上 **$\mathbb{P}$-ジェネリック**であるとは，まず G が $\mathbb{P}$ 上のフィルターであり，さらに $\mathbb{P}$ のすべての稠密部分集合 D について $D \in M \to G \cap D \neq 0$ となることである．□

補題 2.3. *M が可算集合であり $p \in \mathbb{P}$ であれば，M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックな G で $p \in G$ をみたすものが存在する．*

【証明】 MA(ω) の証明 (第 II 章補題 2.6 (c)) とまったく同様である．M に属する $\mathbb{P}$ の稠密部分集合すべてを D_n $(n \in \omega)$ によって数え上げよう．帰納的に列 q_n $(n \in \omega)$ を

$$p = q_0 \geq q_1 \geq \cdots$$

かつ $q_{n+1} \in D_n$ をみたすように選ぼう．そして G を $\{q_n : n \in \omega\}$ によって生成されるフィルターとすればよい．□

なにが M に対して絶対的で，なにがそうでないのか，きちんと把握しておく

ことが大切です．さしあたり念頭においている応用例では，M が ZFC 集合論の c.t.m. であり $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle$ は M に属します．この場合，《半順序》や《稠密》といった概念が M に対して絶対的であることは，第 IV 章第 3 節の方法を用いて容易にわかります．いっぽう，稠密集合を数え上げる列 D_n は M の外に存在することになります．稠密性が絶対的であることから

$$\{D \in M : D \text{ は } \mathbb{P} \text{ において稠密}\} = \{D : D \text{ は } \mathbb{P} \text{ において稠密}\}^M$$

となりますが，ふつうはこの集合は M において可算にならないのです (可算性は絶対的では**ありません**).

定義 2.2 でも補題 2.3 でも，M がなにかのモデルである必要はありませんでした．しかし，M が ZFC の少なくとも一部分をみたしていることが，いろいろな稠密集合を構成したさいにそれが M に属することを保証するためにも，この先では重要になってきます．たとえば，たいていの場合 $G \notin M$ となると主張する次の補題の証明にも，このことは現れています．

補題 2.4. M が ZF $-$ P の推移的モデルで，$\mathbb{P}$ は M に属する半順序であって

$$\forall p \in \mathbb{P} \, \exists q, r \in \mathbb{P} (q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r) \tag{1}$$

をみたすものとし，さらに G が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックであれば，$G \notin M$ である．

【証明】 $G \in M$ だったとして $D = \mathbb{P} \setminus G$ とすると，差集合の演算は絶対的なので $D \in M$ となる．また D は稠密である．なぜなら，$p \in \mathbb{P}$ とするとき (1) のような q と r をとれば，この両方が G に属することは G がフィルターである以上ありえないわけで，p は D に属する拡大をもつ．

ところが $G \cap D = 0$ だから，これは G がジェネリックであることの定義と矛盾する．□

補題 2.4 の証明では，M が ZF $-$ P のとても小さな一部分をみたしていることだけが必要だったのですが，証明のそれぞれのステップで M が ZFC のどの公理をみたしている必要があるか厳密に調べてみても，あまり意味はありません．

注意すべきこととして，(1) が成り立たないような半順序 $\mathbb{P}$ については，$\mathbb{P}$ の**すべての**稠密集合と交わるフィルター G が存在するし，$\mathbb{P} \in M$ だったら $G \in M$ となります (演習問題 A1)．そのような $\mathbb{P}$ に対して MA や強制法を応用してもしかたないので，第 II 章，第 VII 章，第 VIII 章で扱うほとんどすべての半順序は (1) をみたします．ただ，MA や強制法を抽象的に扱っている限り，(1) という条件はまっ

たく必要ありません．

これで，また少しジェネリック拡大の正体がわかってきました．M を ZFC の c.t.m., $\mathbb{P}$ を M に属する半順序として，G が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックだったとしましょう．このあとで $M[G]$ と呼ばれる ZFC のもう一つの c.t.m. の構成法を述べることにします．このモデルは $M \subset M[G]$ と $\mathrm{o}(M) = \mathrm{o}(M[G])$ と $G \in M[G]$ をみたします．$M[G]$ は G を含むように M を拡大した c.t.m. のうち最小のものになります．$G \in M[G]$ という事実から，補題 2.4 により，たいていの場合に $M \neq M[G]$ となることが導かれます．

ZFC の範囲を越える公理のうちどれを $M[G]$ がみたすかは，M **において** $\mathbb{P}$ がもつ組み合わせ論的な性質に，たいへん鋭敏に依存します．そして，そうした性質の大部分は**絶対的ではありません**．たとえば c.c.c. (第 II 章定義 2.3) について考えてみましょう．M が c.t.m. で $\mathbb{P}$ が M に属する半順序であれば，$\mathbf{V}$ においては $\mathbb{P}$ は可算集合なのでもちろん c.c.c. をみたします．しかしその $\mathbb{P}$ が M において c.c.c. をみたさないことも，もちろんありうるわけです．

M 内で作業することによって，第 II 章で扱った c.c.c. をみたす半順序を構成することができるほか，(M においては) c.c.c. をみたさないような，もっとたくさんの半順序を構成することもできるのです．それらはいずれもジェネリック拡大に用いることができます．

基本理論の記述に戻りましょう．これは M に属するすべての半順序について同じように適用できます．$M[G]$ を構成する手順の全体は，一見するとかなり込みいっているように見えるかもしれません．しかしいったんこのハードルを越えてしまえば，あとは，望みどおりの無矛盾性の結果が得られる $\mathbb{P}$ を誂(あつら)えるという手法は，半順序の組み合わせ論的な問題 (これ自体がしばしば非常に難しいのですが) に帰着することになります．

最初の一歩は $M[G]$ を定義することです．大雑把な言い方をすれば，これは M において定義可能な集合論的プロセスを経て G から構成できる集合の全体になります．$M[G]$ の各々の要素は M に**名前**をもっていて，その名前が，G からこの要素がいかにして構成されたかを知らせてくれます．今後，名前をあらわす文字として τ, σ, π を使うことにします．

定義 2.5. τ が $\mathbb{P}$**-名前**であるとは，まずそれが二項関係であり，そして

$$\forall \langle \sigma, p \rangle \in \tau \, [\, \sigma \text{ は } \mathbb{P}\text{-名前である} \wedge p \in \mathbb{P} \,]$$

となることとする. □

この定義では, $\mathbb{P}$ 上の順序やなにかのモデルには, いっさい言及していません. $\mathbb{P}\neq 0$ である限り, $\mathbb{P}$-名前の集まりは真のクラスとなります.

定義 2.5 は超限再帰による定義とみなす必要があります. 正式には, $\mathbb{P}$-名前を特徴づける関数 $\mathbf{H}(\mathbb{P},\tau)$ を, τ が二項関係で $\forall\langle\sigma,p\rangle\in\tau\,[\mathbf{H}(\mathbb{P},\sigma)=1\wedge p\in\mathbb{P}]$ のとき $\mathbf{H}(\mathbb{P},\tau)=1$, それ以外の場合は $\mathbf{H}(\mathbb{P},\tau)=0$, と定義することになります. そして $\mathbf{H}(\mathbb{P},\tau)=1$ となる τ を $\mathbb{P}$-名前と呼ぶ, と定義するわけです. $\mathbb{P}$ を固定しておくと, $\mathbf{H}(\mathbb{P},\tau)$ は $\mathbf{H}\restriction\mathrm{trcl}(\tau)$ から ZF − P のすべての推移的モデルに対して絶対的な概念を用いて定義されるので, 関数 $\mathbf{H}$ も ZF − P の推移的モデルに対して絶対的です (ここでは $x\mathbf{R}y\leftrightarrow x\in\mathrm{trcl}(y)$ という関係について第 IV 章定理 5.6 を使います). そこで, $\mathbb{P}$-名前という概念もやはり ZF − P のすべてのモデルに対して絶対的です. こうした再帰の実例としては, この他に第 III 章の演習問題 13 と 14 がありました.

定義 2.6. $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ とは $\mathbb{P}$-名前全体のクラスである. M を ZFC の推移的モデルとし $\mathbb{P}\in M$ とするとき, $M^{\mathbb{P}}=\mathbf{V}^{\mathbb{P}}\cap M$ とする. 絶対性により

$$M^{\mathbb{P}}=\{\,\tau\in M:(\tau \text{ は } \mathbb{P}\text{-名前である})^M\,\}$$

ともなる. □

M 上で強制法を実行する際には, $M^{\mathbb{P}}$ に属する $\mathbb{P}$-名前だけが使われます. それらは M 内で定義されていると考えられます.

定義 2.7. $\mathrm{val}(\tau,G)=\{\,\mathrm{val}(\sigma,G):\exists p\in G\,(\langle\sigma,p\rangle\in\tau)\,\}$ と定義する. この $\mathrm{val}(\tau,G)$ のことを τ_G とも書く. □

$\mathrm{val}(\tau,G)$ も $\mathbb{P}$-名前のクラスと同じく超限再帰によって定義されています.

定義 2.8. M が ZFC の推移的モデルで, $\mathbb{P}\in M$, $G\subset\mathbb{P}$ であるとき

$$M[G]=\{\,\tau_G:\tau\in M^{\mathbb{P}}\,\}$$

と定義する. □

$\mathrm{dom}(\tau)=\{\,\sigma:\exists p\,(\langle\sigma,p\rangle\in\tau)\,\}$ は定義域のふつうの定義です (もっとも, τ はふつうは関数ではありませんが). 絶対性のおかげで, M に住む人々 $\mathrm{dom}(\tau)$ を知っていて, これを τ_G に属する可能性のある要素の名前の集合と考えることもできます.

$\mathrm{val}(\tau,G)$ は絶対的な概念を用いて超限再帰によって定義されているので, ⟪τ は $\mathbb{P}$-名前である⟫ のときと同じ理由によって, ZF − P の推移的モデルに対して絶対

的となります．ただしもちろん，$G \in M$ という通常は成立しない場合を別にすると，$\mathrm{val}(\tau, G)$ が M に対して絶対的かどうかが問題になるわけではありません．val の絶対性によって次の結果が得られます．

補題 2.9. 定義 2.8 の記法のもと，N が ZFC の推移的モデルであり $M \subset N, G \in N$ をみたすとすると，$M[G] \subset N$ となる．

【証明】 $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ のとき，$\tau \in N$ かつ $G \in N$ なので $\mathrm{val}(\tau, G) = (\mathrm{val}(\tau, G))^N \in N$．□

したがって，$M[G]$ が本当に M を拡大し G を含む ZFC の推移的モデルであることが確認できれば，$M[G]$ がそのような拡大のうちで最小のものとなります．

ここで立ち止まって，いくつかの例を考えてみます．ここでは M が ZFC の c.t.m. で，$\mathbb{P}$ は M に属する半順序である場合を念頭においています．0 は定義 2.5 の条件をみたすので $\mathbb{P}$-名前であり，どんな G についても定義 2.7 により $0_G = 0$ となります．$p \in \mathbb{P}$ であれば $\{\langle 0, p\rangle\} \in M^{\mathbb{P}}$ であって

$$\mathrm{val}(\{\langle 0, p\rangle\}, G) = \begin{cases} \{0\}, & p \in G \text{ のとき}, \\ 0, & p \notin G \text{ のとき} \end{cases}$$

となります．補題 2.3 によって，$p \in G$ をみたすジェネリックな G は必ずあり，また，$\exists q \in \mathbb{P}\,(q \perp p)$ を仮定すれば $p \notin G$ をみたすジェネリックな G もあります．このように τ_G は G に依存することがありますが，τ_G が G に依存しない特別な場合もあります．さきほど見たとおり $0_G = 0$ でした．また，空でないフィルターは必ず最大要素 $\mathbb{1}$ を含むので，すべてのジェネリックな G に対して $\mathrm{val}(\{\langle 0, \mathbb{1}\rangle\}, G) = \{0\}$ となります．より一般に，

$$\mathrm{val}(\{\langle \sigma_i, \mathbb{1}\rangle : i \in I\}, G) = \{\, \mathrm{val}(\sigma_i, G) : i \in I\,\}$$

となります．このことを使うと，M の各々の要素 x がそれにふさわしい名前によって表現できることがわかります．この名前は $\check{x}$ と呼ばれます．

定義 2.10. $\mathbb{P}$ を半順序とするとき，$\mathbb{P}$-名前 $\check{x}$ を再帰的に

$$\check{x} = \{\, \langle \check{y}, \mathbb{1}\rangle : y \in x\,\}$$

によって定義する．□

正式には，$\check{x}$ は x だけでなく $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ の選び方にも依存します．しかしどんな $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}}\rangle$ について考えているのかは，いつも文脈から明らかになるはずです．定

義 2.10 もまた超限再帰による定義であり，これは ZFC の推移的モデルに対して絶対的であることが容易にわかります．そこで $x \in M$ であれば $\check{x} \in M$ となります．例をあげておくと，$\check{0}=0$, $\check{1}=\{0\}\check{}=\{\langle 0,\mathbb{1}\rangle\}$, $\check{2}=\{\langle\check{0},\mathbb{1}\rangle,\langle\check{1},\mathbb{1}\rangle\}$ 等々となります．$\mathrm{val}(\check{0},G)=0$ と $\mathrm{val}(\check{1},G)=1$ はすでに見たとおりです．

補題 2.11. M が ZFC の推移的モデル，$\mathbb{P}$ が M に属する半順序で，G が $\mathbb{P}$ の空でないフィルターのとき

(a) $\forall x \in M\,[\,\check{x} \in M \wedge \mathrm{val}(\check{x},G)=x\,]$.

(b) $M \subset M[G]$.

【証明】 (a) について：絶対性によって $\check{x} \in M^{\mathbb{P}}$ が導かれる．$\mathrm{val}(\check{x},G)=x$ は帰納法によって

$$\mathrm{val}(\check{x},G)=\{\,\mathrm{val}(\check{y},G):y \in x\,\}$$

を用いて証明される．(b) は (a) からすぐにわかる．□

$G \in M[G]$ となることは，G をあらわすために名前を誂(あつら)えることで証明できます．

定義 2.12. $\mathbb{P}$ が半順序であるとき，$\Gamma=\{\,\langle\check{p},p\rangle:p \in \mathbb{P}\,\}$ と定義する．□

この Γ はもちろん $\mathbb{P}$ に依存しますが，どの $\mathbb{P}$ について考えているのかはいつも文脈から明らかになっているはずです．$\check{x}$ の形の名前とは違って，Γ という名前をもつ対象がなんになるかは G に依存します．絶対性により，$\mathbb{P}$ が M に属せば Γ も M に属します．

補題 2.13. 補題 2.11 と同じ仮定のもとで，$\Gamma_G=G$ となる．したがってこのとき $G \in M[G]$.

【証明】 $\Gamma_G=\{(\check{p})_G:p \in G\}=\{p:p \in G\}=G$. □

やさしい補題をあと二つ続けます．

補題 2.14. 補題 2.11 と同じ仮定のもとで，$M[G]$ は推移的集合である．

【証明】 定義 2.7 と 2.8 からすぐにわかる．□

補題 2.15. 補題 2.11 と同じ仮定のもとで，

(a) $\forall\tau\in M^{\mathbb{P}}(\mathrm{rank}(\tau_G)\leq\mathrm{rank}(\tau))$.
(b) $\mathrm{o}(M[G])=\mathrm{o}(M)$.

【証明】 (a) は τ に関する帰納法による．(b) については，(a) と，$\tau\in M$ のとき $\mathrm{rank}(\tau)\in M$ となることから $M[G]\cap\mathbf{ON}\subset M\cap\mathbf{ON}$ がいえる．いっぽう $M\subset M[G]$ であるから，結局 $M[G]\cap\mathbf{ON}=M\cap\mathbf{ON}$ となる．□

名前の組み立て方の例をもう少し続けるために，$M[G]$ が ZFC の公理のうち簡単なものをいくつかみたすことをチェックしてみましょう．たとえば，対の公理が成立することは，$M^{\mathbb{P}}$ の要素 σ と τ が与えられたとき，いつでも $\{\sigma_G,\tau_G\}$ の名前となるような $M^{\mathbb{P}}$ の要素 $\mathrm{up}(\sigma,\tau)$ を定義できることからわかります．

定義 2.16.

(a) $\mathrm{up}(\sigma,\tau)=\{\langle\sigma,\mathbb{1}\rangle,\langle\tau,\mathbb{1}\rangle\}$.
(b) $\mathrm{op}(\sigma,\tau)=\mathrm{up}(\mathrm{up}(\sigma,\sigma),\mathrm{up}(\sigma,\tau))$. □

補題 2.17. 補題 2.11 と同じ仮定のもとで，σ と τ を $M^{\mathbb{P}}$ の要素とするとき，

(a) $\mathrm{up}(\sigma,\tau)\in M^{\mathbb{P}}$ かつ $\mathrm{val}(\mathrm{up}(\sigma,\tau),G)=\{\sigma_G,\tau_G\}$.
(b) $\mathrm{op}(\sigma,\tau)\in M^{\mathbb{P}}$ かつ $\mathrm{val}(\mathrm{op}(\sigma,\tau),G)=\langle\sigma_G,\tau_G\rangle$. □

補題 2.18. 補題 2.11 と同じ仮定のもとで，外延性公理，基礎の公理，対の公理，和集合の公理は $M[G]$ において真である．

【証明】 外延性公理は $M[G]$ が推移的集合だから成立する．基礎の公理はいかなるクラスに相対化しても真である．対の公理は補題 2.17 (a) からすぐにわかる．和集合の公理については，$a\in M[G]$ のとき $\bigcup a\subset b$ をみたす $M[G]$ の要素 b を見つけられればよい．$a=\tau_G$ となる $M^{\mathbb{P}}$ の要素 τ を固定して，$\pi=\bigcup\mathrm{dom}(\tau)$ としよう．すると $\pi\in M^{\mathbb{P}}$ となり，$b=\pi_G$ とおくと $b\in M[G]$ である．c を a の任意の要素とすると，ある σ について $\sigma\in\mathrm{dom}(\tau)$ かつ $c=\sigma_G$ となるはずである．$\sigma\subset\pi$ なので (定義 2.7 を σ と π に適用すれば) $c=\sigma_G\subset\pi_G=b$ となる．したがって $\bigcup a\subset b$ である．□

補題 2.18 の証明では $\bigcup a\in M[G]$ を証明しませんでしたが，のちほど $M[G]$ が内包性公理をみたすことが示されれば，ただちにこれも導かれます．演習問題 A6 を見ればわかるとおり直接証明もできます．ここまでのところ，ジェネリックな集合という概念をまだ本当には利用していません．補題 2.11 以下の六つの補題は，

$\mathbb{1} \in G$ をみたす $\mathbb{P}$ の任意の部分集合 G について成立するのです．G が M に属する稠密集合と交わるという事実は，第 3 節で強制という概念を述べるさい重要になってきます．そしてこの強制を用いて，第 4 節では $M[G]$ が ZFC をみたすことが証明されます．

かならずしも稠密とはいえないなんらかの集合ともジェネリックなフィルターが交わっていることを示すことに使える，技法上有益な事実をあげてこの節を終えることにしましょう．

定義 2.19. E を $\mathbb{P}$ の部分集合，p を $\mathbb{P}$ の要素とするとき，E が p **以下で稠密**であるとは，

$$\forall q \leq p \exists r \leq q (r \in E)$$

となることである．□

補題 2.20. M が ZFC の推移的モデルで，$\mathbb{P} \in M$, $E \subset \mathbb{P}$, $E \in M$ とする．G は M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックだとする．このとき，

(a) $G \cap E \neq 0$ であるかまたは $\exists q \in G \forall r \in E (r \perp q)$ となる．

(b) $p \in G$ かつ E が p 以下で稠密であるとき，$G \cap E \neq 0$ である．

【証明】 (a) を示すために

$$D = \{p : \exists r \in E (p \leq r)\} \cup \{q : \forall r \in E (r \perp q)\}$$

とおく．D は稠密である．というのも $\mathbb{P}$ の要素 q について $q \notin D$ とすると，q と両立するような E の要素 r があることになって，$p \leq q$ かつ $p \leq r$ とすると，p が D に属する q の拡大となるから．したがって $G \cap D \neq 0$ であって，これから (a) が導かれる．

(b) について，$G \cap E = 0$ だとしたら，(a) によって $\forall r \in E (r \perp q)$ をみたす G の要素 q がある．$q' \leq p$ かつ $q' \leq q$ となる G の要素 q' をとると，E が p 以下で稠密であることから $r \leq q'$ となる E の要素 r があるが，このとき $r \leq q$ であって，$r \perp q$ と矛盾する．□

§3　強制

一つの例を考察することから始めます．ZFC の c.t.m. M を固定しておきます．$\mathbb{P}$ として ω から 2 への有限部分関数の集合に包含関係の逆の順序をつけたものを考えます (第 II 章第 2 節の第 5 の例と同じです)．$\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ は空な関数です．この定義は ZFC あるいは ZF − P の推移的モデルに対して絶対的なので，$\langle\mathbb{P},\leq,\mathbb{1}\rangle\in M$ となります．

G がこの $\mathbb{P}$ のフィルターであるとき，$f_G=\bigcup G$ は $\mathrm{dom}(f_G)\subset\omega$ をみたす関数になります．第 II 章第 2 節でやったように，ω の各要素 n に対して $D_n=\{p\in\mathbb{P}:n\in\mathrm{dom}(p)\}$ とおきましょう．すると D_n は稠密集合となり，ふたたび定義の絶対性によって $D_n\in M$ となります．そこで，G が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックであれば，すべての n について $G\cap D_n\neq 0$ となるから $\mathrm{dom}(f_G)=\omega$ です．

次に $f_G\in M[G]$ を証明しましょう．$G\in M[G]$ で $f_G=\bigcup G$ ですから，$f_G\in M[G]$ は $M[G]$ が ZFC をみたすことがすでに知られていれば $\bigcup$ の絶対性からすぐにわかります ($\bigcup$ の絶対性を得るためなら ZF − P をみたせば十分です)．それでも，$f_G\in M[G]$ を直接証明することもできます．

$$\Phi=\{\langle(\langle n,m\rangle)\check{},p\rangle:p\in\mathbb{P}\wedge n\in\mathrm{dom}(p)\wedge p(n)=m\}$$

とおきましょう．補題 2.11 によって $\mathrm{val}((\langle n,m\rangle)\check{},G)=\langle n,m\rangle$ なので，

$$\Phi_G=\{\langle n,m\rangle:\exists p\in G\,(n\in\mathrm{dom}(p)\wedge p(n)=m)\}=f_G,$$

したがって $f_G\in M[G]$ です．

ここでもしも G が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックであれば補題 2.4 によって $G\notin M$ となります．このとき $f_G\notin M$ でもあります．というのは，$E=\{p:p\not\subset f_G\}$ とすると E が稠密で $G\cap E=0$ となりますが，このとき $f_G\in M$ なら $E\in M$ となってジェネリックな集合の定義と矛盾します．これは第 II 章補題 2.6 の $\neg\mathrm{MA}(2^{\omega})$ の証明と似ていることに注意しておいてください．

ここで**強制**というアイディアが持ち込まれます．第 II 章第 2 節では，直観的なアイディアとして，$\mathbb{P}$ の要素 p は G について，あるいは (先ほどの f_G のように) G から構成するつもりでいるなんらかの対象について，なにかを述べるものと考えました．それと同じ線にそって考えてみましょう．ただし，こんどは MA ではなくモデルの文脈で考えます．

M の住人には M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックな集合 G を構成することはできませんが，

自分たちにとっての宇宙 M が可算集合に見えるような立場に立つなんらかの存在があると誠意をもって信じることはできます．そのような存在であれば，ジェネリック集合 G と f_G すなわち $\bigcup G$ を手に入れていることでしょう．M の住人には，この G と f_G がなんであるかは知りようがありませんが，Γ と Φ という，それらに対応する名前だけは彼らも手に入れています．M の住人はまた，この節のこれまでの数段落を読んで，f_G が ω から 2 への関数になるはずだというように，G や f_G の性質について多少の見当をつけることもできます．$f_G(0)$ の本当の値は G によって変わるので M の住人にはわかりません．しかし，その彼らにも，もしも $\{\langle 0,0\rangle\}\in G$ なら $f_G(0)$ は 0 だし，$\{\langle 0,1\rangle\}\in G$ なら $f_G(0)$ は 1 だ，ということはわかります．より一般に，M の住人は，$M[G]$ で起きることについて何事かを主張する文 ψ を $M^{\mathbb{P}}$ の要素を使って記述できます．すなわち，**強制言語**を構成できます．そうした強制言語の文 ψ の一例が $\Phi(\check{0})=\check{1}$ です．M に住む人には与えられた文 ψ が $M[G]$ において正しいかどうかわからない可能性があります．$M[G]$ における ψ の真偽は G によって変わるかもしれないからです．そこで，すべての M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックな G について，もしも $p\in G$ であれば $M[G]$ において ψ が真であることを意味するのに，記号 $p\Vdash\psi$ (p が ψ を**強制する**) を使うことにします．たとえば，

$$\{\langle 0,0\rangle\}\Vdash\Phi(\check{0})=\check{0},\quad \text{かつ}\quad \{\langle 0,1\rangle\}\Vdash\Phi(\check{0})=\check{1}$$

また，

$$\mathbb{1}\Vdash\Phi \text{ は } \check{\omega} \text{ から } \check{2} \text{ への関数，かつ } \mathbb{1}\Vdash\Phi=\bigcup\Gamma$$

です．つまり，これら二つの文はすべてのジェネリック集合 G に対して真となるわけです．M の住人たちは，たとえジェネリック集合 G を見ることができなくても，これらの強制関係の見当をつけることはできます．このことから

事実 1． $p\Vdash\psi$ であるかどうかは，M 内で決めることができる

ということが見えてきます．

このことは，$M[G]$ が ZFC をみたすことを証明するためにも，またその後の強制法の応用のためにも，大変に重要です．なぜなら，望みどおりの (ZFC の範囲を越えた) 公理が $M[G]$ において真となることが強制されるような，さまざまな込み入った $\mathbb{P}$ を構成するためには，組み合わせ論の技法を M の住人が利用できる必要があるからです．

事実 1 は一見驚くべきことです．$p\Vdash\psi$ が，すべてのジェネリック集合 G につ

いて知っていることを要求するように見えるのですから．しかし，M 内にいる人はいつでも，先ほどの例にあったある種の分析の過程を経て，$p \Vdash \psi$ かどうかを決定できるのです．

$\Vdash$ の定義からすぐわかることですが，G が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックで G のある要素 p について $p \Vdash \psi$ であれば，ψ は $M[G]$ において真となります．これとは逆になりますが，次のことを示します．

事実 2.　G が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックで ψ が $M[G]$ において真ならば，G のある要素 p について $p \Vdash \psi$.

たとえば，ψ が $\Phi(\check{0}) = \check{0}$ だとして，この ψ が真だった (すなわち $f_G(0) = 0$ だった) とします．すると，G のある要素 p について $p(0) = 0$ となり，他のジェネリック集合 H についても $p \in H$ となっていれば $f_H(0) = 0$ で ψ は $M[H]$ においても真となります．したがって $p \Vdash \psi$ です．

ここで個別の例の考察を終わりにして，任意の $\mathbb{P}$ を用いた強制についてもっと厳密に論じましょう．事実 1 と事実 2 を表明した定理 3.6 が，強制法の背骨をなすことになります．

定義 3.1. $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ は集合論の式で，その自由変数はここに示されているものだけだとする．M を ZFC の c.t.m. とし，$\mathbb{P}$ は M に属する半順序，$\tau_1, \ldots, \tau_n$ は $M^{\mathbb{P}}$ の要素，p は $\mathbb{P}$ の要素だとする．このとき $p \Vdash_{\mathbb{P},M} \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ とは

$$\begin{aligned} \forall G\,[\,(G \text{ は } M \text{ 上 } \mathbb{P}\text{-ジェネリック} \wedge p \in G) \\ \to \phi^{M[G]}(\mathrm{val}(\tau_1, G), \ldots, \mathrm{val}(\tau_n, G))\,] \end{aligned} \tag{1}$$

ということである．□

ここで $\Vdash_{\mathbb{P},M}$ の添字の $\mathbb{P}$ は，本当なら $\langle \mathbb{P}, \leq, \mathbb{1} \rangle$ と書くべきところです．考えている半順序とモデル M がそれぞれ一つに定まる場合には，単に $\Vdash$ と書くことにします．

直観的に言えば，定義 3.1 に出てきた $\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ が**強制言語**の文になっています．強制言語というアイディアを厳密化するには，集合論の内部で言語を形式化して，二項関係記号として $\in$ だけをもち，定数記号として $M^{\mathbb{P}}$ の要素が入っているような一階論理の言語のことを強制言語と定義すればよいのです．私たちのアプローチでは，強制言語を実際に定義はせず，定義 3.1 は正式にはじつはメタ理論における定義図式だと考えます．自由変数として $x_1, \ldots, x_n$ だけをもつ式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$

の各々に対して，$\mathrm{Force}_\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n,\mathbb{P},\le,\mathbb{1},M,p)$ という式を，$\langle\mathbb{P},\le,\mathbb{1}\rangle\in M, p\in\mathbb{P},\tau_1,\ldots,\tau_n\in M^{\mathbb{P}}$ などと合せて (1) を主張するものとして定義するわけです．

次の事実を検証すれば，定義 3.1 を理解するための演習問題になることと思います．

補題 3.2. 定義 3.1 の記法のもとで，

(a) $(p\Vdash\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)\wedge q\le p)\to q\Vdash\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$.

(b) $(p\Vdash\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n))\wedge(p\Vdash\psi(\tau_1,\ldots,\tau_n))\leftrightarrow p\Vdash(\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)\wedge\psi(\tau_1,\ldots,\tau_n))$. □

ここでの《$p\Vdash\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$》という概念は M ではなく $\mathbf{V}$ で定義されたもので，あらゆるジェネリック集合 G について知っていることを前提しています．しかし事実 1 によると，M の内部にいながら $p\Vdash\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ かどうかわからなければならないのですから，この関係を厳密に書き換えるために別の関係 $p\Vdash^*\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ を定義して，すべての ϕ について

$$p\Vdash\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)\leftrightarrow(p\Vdash\phi^*(\tau_1,\ldots,\tau_n))^M$$

となることを証明します．そうすれば，$p\Vdash\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ は M に相対化されたなんらかの文と同値になるわけです．

この節を終えたあとでは，事実 1 と事実 2 (つまり定理 3.6) とそこから導かれる系 3.7 は繰り返し用いられますが，$\Vdash^*$ の定義に立ち返ることはほとんどなくなります．ですから，もしもそんな定義を詳しく読むのはつまらないと思うなら，すぐに定理 3.6 へ飛んでください．集合論の教科書の数だけ $\Vdash^*$ の定義も (どれも同値ですが) あります．たとえば，演習問題 B3 と B4 ではもう少し手っ取り早いアプローチが示されています．

私たちの方法で $\Vdash^*$ を定義するとき，いちばん面倒なのが $\phi(\tau_1,\tau_2)$ が $\tau_1=\tau_2$ の場合です．どのような定義がよいのか簡単な例で示すために，$\tau_1=\{\langle\pi_1,s\rangle\}$, $\tau_2=\{\langle\pi_2,s\rangle\}$ として，どの p が $\tau_1=\tau_2$ を強制するのか M の住人に伝えたい，と考えてください．もし $p\perp s$ だったら $p\in G$ のとき必ず $s\notin G$ となり $\tau_{1G}=0=\tau_{2G}$ となるので，$p\Vdash\tau_1=\tau_2$ です．$p\le s$ だったら，$p\in G$ のとき必ず $\tau_{1G}=\{\pi_{1G}\}$, $\tau_{2G}=\{\pi_{2G}\}$ となるので，$p\Vdash\tau_1=\tau_2$ となるのは $p\Vdash\pi_1=\pi_2$ となるちょうどその場合になります．任意の p について $p\Vdash\tau_1=\tau_2$ が

$$\forall q(q\le p\wedge q\le s\to q\Vdash\pi_1=\pi_2)$$

と同値になることを確かめるのはよい練習でしょうが，この例で特に言いたかったのは，$\Vdash^*$ の定義においては，$p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ かどうかが，$\mathbb{P}$ の他の要素 q と $\mathrm{dom}(\tau_1)$ の要素 π_1 と $\mathrm{dom}(\tau_2)$ の要素 π_2 について $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ となるかどうかという点に依存せざるを得ない，ということです．

ひとまず，モデルに言及することなく，$\mathbf{V}$ において $p \Vdash^* \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ を定義します．ただし，実際の応用のさいに考えるのは，基礎モデル M に相対化された $(p \Vdash^* \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n))^M$ という形だけです．

定義 3.3. 半順序 $\mathbb{P}$ を固定する．以下の各条項によって $p \Vdash^* \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ を定義する．ただし，式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ の自由変数はここに示されたものに限るものとし，p は $\mathbb{P}$ の要素，$\tau_1, \ldots, \tau_n$ は $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ の要素とする．

(a) $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ となるのは，

(α) τ_1 に属するすべての対 $\langle \pi_1, s_1 \rangle$ について，集合

$$\{ q \leq p : q \leq s_1 \rightarrow \exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 \, (q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2) \}$$

が p 以下で稠密となり，

(β) しかも，τ_2 に属するすべての対 $\langle \pi_2, s_2 \rangle$ について，集合

$$\{ q \leq p : q \leq s_2 \rightarrow \exists \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1 \, (q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2) \}$$

が p 以下で稠密となる場合である．

(b) $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ となるのは，集合

$$\{ q : \exists \langle \pi, s \rangle \in \tau_2 \, (q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \tau_1) \}$$

が p 以下で稠密となる場合である．

(c) $p \Vdash^* (\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n))$ となるのは，$p \Vdash^* \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ かつ $p \Vdash^* \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ となる場合である．

(d) $p \Vdash^* \neg\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ となるのは，$q \leq p$ なるいかなる q についても $q \Vdash^* \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ とはならない場合である．

(e) $p \Vdash^* \exists x \, \phi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ となるのは，集合

$$\{ r : \exists \sigma \in V^{\mathbb{P}} \, (r \Vdash^* \phi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n)) \}$$

が p 以下で稠密となる場合である．□

定義 3.3 をざっと見ただけでも，この定義は循環しているから，再帰を用いた定義になっているはずだとわかるでしょう．ここでの再帰が正確にはどんな本質

をもっているかについては，特にコメントしておく価値があります．まず，条項(a) によって $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ ということを定義します．ここで正式には，$\mathbf{F}(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle)$ が集合 $\{p \in \mathbb{P} : p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2\}$ になるように，関数 $\mathbf{F} : \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \times \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \to \mathcal{P}(\mathbb{P})$ を定義したいわけです．この関数 $\mathbf{F}$ は，$\pi_1 \in \mathrm{dom}(\tau_1)$ かつ $\pi_2 \in \mathrm{dom}(\tau_2)$ のときに $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \mathbf{R} \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ とする，という関係 $\mathbf{R}$ に関する超限再帰によって定義されます．この関係 $\mathbf{R}$ は明らかに集合状であり，また $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \mathbf{R} \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ から $\mathrm{rank}(\pi_1) < \mathrm{rank}(\tau_1)$ が導かれるので，整礎的関係でもあります．

こうして $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ が定義されれば，条項 (b) によって $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ が明示的に定義できます．これで原子式については $\Vdash^*$ が定義されたことになり，条項 (c) から (e) までは，すべての式に対する $\Vdash^*$ を，式の長さに関するストレートな帰納法によって定義しています．この帰納法は，正式にはメタ理論において実行されるものです．つまり，$\Vdash$ の場合と同様に，各々の式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ に対して別の式 $\mathrm{Force}^*_\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n, \mathbb{P}, \leq, p)$ を定義していることになります．

原子式に対する $\Vdash^*$ を再帰的に定義したさいに使われた概念は絶対的なものばかりですから，その結果も ZF − P の推移的モデルに対して絶対的となります．もうすこしきちんと言えば，上記の関係 $\mathbf{R}$ と集合 $\{\langle \pi_1, \pi_2 \rangle : \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \mathbf{R} \langle \tau_1, \tau_2 \rangle\}$ の絶対性によって，関数 $\mathbf{F}$ の絶対性が導かれることになります (第 IV 章定理 5.6)．しかし，すべての式 ϕ に対する $\Vdash^*$ が絶対的というわけではありません．条項 (e) に現れた $\exists \sigma \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ は他のモデル M に相対化すれば $\exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}$ となるからです．しかしいずれにせよ，事実 1 をチェックするにあたっては，$\Vdash^*$ をモデル M に相対化した場合だけを考えれば十分です．

関係 $\Vdash^*$ の定義の (a) から (e) までの個々の条項の動機づけとして，M の住人による，$\Vdash$ を決定しようという試みが $(p \Vdash^* \phi)^M$ だ，と考えることができるでしょう．私たちは最終的に事実 1 すなわち $\Vdash$ が M において定義可能であることを，$p \Vdash \phi$ と $(p \Vdash^* \phi)^M$ の同値性を示すことによって証明するわけです．そのため，$\Vdash^*$ の定義の帰納法の条項としては，$\Vdash$ そのものがみたす関係式を使っています．そうすることによって，事実 1 を式 ϕ に関する帰納法で証明できるのです．

関係 $\Vdash$ が実際に (a) から (e) までをみたしていることを確かめるのにも多少の議論が必要です．(c) の場合，$p \Vdash (\phi \wedge \psi)$ となるには $p \Vdash \phi$ かつ $p \Vdash \psi$ が必要十分であることが，$\Vdash$ の定義からすぐにわかります (補題 3.2)．次に (d) について，$\neg \exists q \leq p (q \Vdash \phi)$ と仮定しましょう．$p \Vdash \neg \phi$ であることを示すため仮にそうでないとすると，p を含むあるジェネリック集合 G について ϕ が，$M[G]$ において

真となります．すると事実 2 によって G のある要素 r について $r \Vdash \phi$ であり，ここで $q \in G$, $q \leq r$, $q \leq p$ をみたす q をとれば補題 3.2 より $q \Vdash \phi$ となって，$\neg \exists q \leq p, (q \Vdash \phi)$ と矛盾することになります．

条項 (e) を M に相対化すれば，$(p \Vdash^* \exists x\, \phi(x))^M$ となるためには，集合

$$\{ r \leq p : \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}} (r \Vdash^* \phi(\sigma))^M \}$$

が p 以下で稠密となることが必要十分という主張になります．$\Vdash$ についてこれを (一方向だけですが) チェックするために，集合 $D = \{ r \leq p : \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}} (r \Vdash \phi(\sigma)) \}$ が p 以下で稠密となっていると仮定しましょう．事実 1 によれば $D \in M$ となります．そこで，G が M 上ジェネリックで $p \in G$ ならば $G \cap D \neq 0$ となり，$M^{\mathbb{P}}$ のある要素 σ と G のある要素 r について $r \Vdash \phi(\sigma)$ となります．このとき $(\phi(\sigma_G))^{M[G]}$ であり，したがって $(\exists x\, \phi(x))^{M[G]}$ となります．こうして $p \Vdash \exists x\, \phi(x)$ となるわけです．

もちろん，以上二つの段落の議論は，定義の動機付けの説明のために使えるだけです．なにしろ，$\Vdash$ が条項 (d) と (e) をみたすことを示すのに，まだ証明されていない事実 1 と事実 2 に訴えていますから．定義 3.3 の (循環的な) 正当化を完成させる作業をしてみると，いい演習になることでしょう．

事実 1 と事実 2 の厳密な証明に向かって，これとはちょっと違った道筋をたどって行きましょう．まず準備として次の補題を示します．

補題 3.4. 定義 3.3 の p と $\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ について，次のことは同値である．

(1) $p \Vdash^* \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.
(2) $\forall r \leq p\, (r \Vdash^* \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n))$.
(3) 集合 $\{ r : r \Vdash^* \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \}$ は p 以下で稠密．

【証明】 まず，(2)→(1) と (2)→(3) が当たり前であることを指摘しておこう．次に $\phi(\tau_1, \tau_2)$ が $\tau_1 = \tau_2$ あるいは $\tau_1 \in \tau_2$ だったとしよう．このとき (1)→(2) は，D が p 以下で稠密で $r \leq p$ なら D は r 以下で稠密であるという事実から導かれる．(3)→(2) は，$\{ r : D$ は r 以下で稠密 $\}$ が p 以下で稠密であれば D は p 以下で稠密であるという事実から導かれる．ここでは $p \Vdash^* \phi(\tau_1, \tau_2)$ の定義の詳細がどうだったかは問題ではなく，なんらかの集合が p 以下で稠密となることによって定義されているという点だけが必要だ．この点には特に注意しよう．

こうして原子式については (1) と (2) と (3) の同値性がチェックされたので，他の ϕ に対しては定義 3.3 の条項 (c) から (e) までを使って帰納法で容易にチェック

できる．帰納法の仮定を使う必要があるのは $\wedge$ を扱うステップだけだ．□

次に $\Vdash^*$ と $M[G]$ での命題の真偽との関連性を述べることにします．このことが $\Vdash^*$ と $\Vdash$ との関係を考えるうえでの鍵となります．

定理 3.5. $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ を，ここに示された以外の自由変数をもたないような式とする．M を ZFC の推移的モデルとし，$\mathbb{P}$ を M に属する半順序とし，$\tau_1,\ldots,\tau_n$ を $M^{\mathbb{P}}$ の要素とする．このとき G が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックであれば，

(1) $p \in G$ かつ $(p \Vdash^* \phi(\tau_1,\ldots,\tau_n))^M$ であれば $(\phi(\mathrm{val}(\tau_1,G),\ldots,\mathrm{val}(\tau_n,G)))^{M[G]}$ である．

(2) $(\phi(\mathrm{val}(\tau_1,G),\ldots,\mathrm{val}(\tau_n,G)))^{M[G]}$ であれば $\exists p \in G\,((p \Vdash^* \phi(\tau_1,\ldots,\tau_n))^M)$ である．

【証明】 $\phi(\tau_1,\tau_2)$ が $\tau_1 = \tau_2$ である場合の証明は，定義 3.3 の条項 (a) を用いた超限帰納法によって進められる．これが本当にある整礎的関係に関する帰納法になっていることは，この形の ϕ に対する $\Vdash^*$ の定義を検討したときとまったく同様に確かめることができる．原子式に対する $\Vdash^*$ は M に対して絶対的だから，ここでは M への相対化の記号を省略できる．

(1) をチェックするために $p \in G$ かつ $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ と仮定しよう．示すべきことは $\tau_{1G} = \tau_{2G}$ ということである．ここでは定義 3.3 の (α) を使って $\tau_{1G} \subset \tau_{2G}$ を示すことにする．もういっぽうの $\tau_{2G} \subset \tau_{1G}$ を (β) を使って示すことも同じようにできる．τ_{1G} の要素はどれも π_{1G} という形で，ここで G の要素 s_1 について $\langle \pi_1, s_1\rangle \in \tau_1$ となっている．$\pi_{1G} \in \tau_{2G}$ を示さなくてはならない．$r \leq p$ かつ $r \leq s_1$ をみたす G の要素 r をとろう．すると補題 3.4 により $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$．そこで，補題 2.20 (b) によって，$q \leq r$ をみたす G の要素 q でしかも

$$q \leq s_1 \text{ ならば } \exists \langle \pi_2, s_2\rangle \in \tau_2\,(q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2) \tag{$*$}$$

となるものが存在する．ところが実際 $q \leq s_1$ だから，($*$) のような $\langle \pi_2, s_2\rangle$ がとれる．すると，$s_2 \in G$ であるから $\pi_{2G} \in \tau_{2G}$ である．いっぽう $\pi_1 = \pi_2$ という式についての (1) によれば，$q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ から $\pi_{1G} = \pi_{2G}$ が導かれる．したがって $\pi_{1G} \in \tau_{2G}$ である．

次に (2) をチェックするために，$\tau_{1G} = \tau_{2G}$ だとしよう．$r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ あるいは

$$\exists\langle\pi_1,s_1\rangle\in\tau_1\,(r\le s_1\wedge\forall\langle\pi_2,s_2\rangle\in\tau_2\,\forall q\in\mathbb{P}\\((q\le s_2\wedge q\Vdash^*\pi_1=\pi_2)\to q\perp r)) \tag{α'}$$

あるいは

$$\exists\langle\pi_2,s_2\rangle\in\tau_2\,(r\le s_2\wedge\forall\langle\pi_1,s_1\rangle\in\tau_1\,\forall q\in\mathbb{P}\\((q\le s_1\wedge q\Vdash^*\pi_1=\pi_2)\to q\perp r)) \tag{β'}$$

のいずれかが成立するような $\mathbb{P}$ の要素 r の集合を D としよう．まずわかることは，r が G の要素であれば，(α') も (β') も成立しないということである．これを確かめるために $r\in G$ であり，しかも (α') をみたすような τ_1 の要素 $\langle\pi_1,s_1\rangle$ があったとする．すると $s_1\in G$ であるから，$\pi_{1G}\in\tau_{1G}=\tau_{2G}$ となる．そこで $s_2\in G$ と $\pi_{2G}=\pi_{1G}$ をみたす τ_2 の要素 $\langle\pi_2,s_2\rangle$ がとれる．すると $\pi_1=\pi_2$ という式に対する (2) によって，G の要素 q_0 で $q_0\Vdash^*\pi_1=\pi_2$ となるものがある．ここで G の要素 q を $q\le q_0$ かつ $q\le s_2$ となるようにとると，(補題 3.4 より) $q\Vdash^*\pi_1=\pi_2$ だから ((α') により) $q\perp r$ となるが，q も r も G に属するのでこれは矛盾である．したがって，$\neg\exists r\in G(r\Vdash^*\tau_1=\tau_2)$ であれば $D\cap G=0$ となる．$D\in M$ であることは定義の絶対性からわかるので，あとは D が稠密であることを示せばよい．$\mathbb{P}$ の任意の要素 p をとる．ここで $p\Vdash^*\tau_1=\tau_2$ でなかったとしたら，定義 3.3 (a) の (α) か (β) のいずれかが成立しない．(α) が成立していない場合を考えると，《p 以下で稠密》の定義により，τ_1 の要素 $\langle\pi_1,s_1\rangle$ と $r\le p$ となる $\mathbb{P}$ の要素 r で

$$\forall q\le r\,(q\le s_1\wedge\forall\langle\pi_2,s_2\rangle\in\tau_2\,(\neg(q\Vdash^*\pi_1=\pi_2\wedge q\le s_2))) \tag{†}$$

をみたすものがとれる．このとき特に $r\le s_1$ であるから，もしも $\langle\pi_2,s_2\rangle\in\tau_2$, $q\le s_1$, $q\Vdash^*\pi_1=\pi_2$ であれば $q\perp r$ となる．というのは，q と r に共通の拡大があれば (†) と矛盾することになるからである．こうして $r\le p$ と (α') をみたす r が存在することがわかった．同様にして，もしも (β) が成立しなければ，$r\le p$ と (β') をみたす r がある．

さて，次は $\phi(\tau_1,\tau_2)$ が $\tau_1\in\tau_2$ という式である場合を考える．(1) を確かめるために $p\in G$ かつ $p\Vdash^*\tau_1\in\tau_2$ と仮定しよう．このとき集合

$$D=\{\,q:\exists\langle\pi,s\rangle\in\tau_2\,(q\le s\wedge q\Vdash^*\pi=\tau_1)\,\}$$

が p 以下で稠密である．そこで $G\cap D$ の要素 q がとれ，さらに τ_2 の要素 $\langle\pi,s\rangle$ を $q\le s$ かつ $q\Vdash^*\pi=\tau_1$ となるようにとれる．すると $s\in G$ かつ $\langle\pi,s\rangle\in\tau_2$ となるの

で $\pi_G \in \tau_{2G}$ である．また $q \in G$ かつ $q \Vdash^* \pi = \tau_1$ なので，$\pi = \tau_1$ に対する (1) から $\pi_G = \tau_{1G}$ となる．したがって $\tau_{1G} \in \tau_{2G}$ である．

次に $\tau_1 \in \tau_2$ についての (2) を確かめるために，$\tau_{1G} \in \tau_{2G}$ だったと仮定する．τ_{2G} の定義から τ_2 の要素 $\langle \pi, s \rangle$ で $s \in G$ かつ $\pi_G = \tau_{1G}$ となるものが存在する．ここで $\pi = \tau_1$ についての (2) により $r \in G$ かつ $r \Vdash^* \pi = \tau_1$ となるような r が存在する．G の要素 p を $p \leq s$ かつ $p \leq r$ となるようにとれば，$\forall q \leq p (q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \tau_1)$ となるから $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ である (ここでは，定義 3.3 (b) で必要とされるよりも強い言明が得られた)．

以上で原子式に対する (1) と (2) の証明が完了したので，次はすべての式 ϕ に対する (1) と (2) を並行して，ϕ に関する帰納法で証明する．この帰納法は正式にはメタ理論において実行されるものである．式に関する帰納法のステップは $\neg$ と $\wedge$ と $\exists$ について考える必要があり，それぞれに (1) と (2) を確かめるので，証明は全部で六つの部分にわかれる．ϕ が量化子を含む場合，$\Vdash^*$ は M に対して絶対的でないので，ここから先では $\Vdash^*$ を M に相対化しておく必要があることに注意．

表記を簡略にするために $\tau_1, \ldots, \tau_n$ を明示するのをやめるが，それらを書き加えることは容易だろう．

(1) $\neg$: 最初に ϕ についての (1) と (2) を仮定して $\neg\phi$ についての (1) を示す．G の要素 p について $(p \Vdash \neg\phi)^M$ とする．$\neg\phi^{M[G]}$ を示したい．もしも $\phi^{M[G]}$ だったら，ϕ についての (2) によって，$q \in G$ と $(q \Vdash^* \phi)$ をみたす q がある．$r \in G, r \leq p$, $r \leq q$ となるような r を考えると $(r \Vdash^* \phi)^M$ となって $p \Vdash^* \neg\phi$ の定義に矛盾する．

(2) $\neg$: 次に $(\neg\phi)^{M[G]}$ と仮定して，

$$D = \{p : (p \Vdash^* \phi)^M \vee (p \Vdash^* \neg\phi)^M\}$$

とおく．$D \in M$ であり，$\Vdash^*$ の定義を M で考えればわかるように，D は稠密である．そこで $p \in G \cap D$ としよう．このとき $(p \Vdash^* \neg\phi)$ ならば言うことなし．もしも $(p \Vdash^* \phi)^M$ だったら，ϕ についての (1) によって $\phi^{M[G]}$ となって矛盾する．

(1) $\wedge$: ここでは ϕ と ψ についての (1) と (2) を仮定して $\phi \wedge \psi$ についての (1) を導く．$p \in G$ かつ $(p \Vdash^* (\phi \wedge \psi))^M$ と仮定しよう．すると，$(p \Vdash^* \phi)^M$ かつ $(p \Vdash^* \psi)^M$．したがって $\phi^{M[G]}$ かつ $\psi^{M[G]}$ となり $(\phi \wedge \psi)^{M[G]}$．

(2) $\wedge$: 逆に $(\phi \wedge \psi)^{M[G]}$ と仮定しよう．ϕ と ψ についての (2) によって，$(p \Vdash^* \phi)^M$, $(q \Vdash^* \psi)^M$ となる G の要素 p と q がある．そこで $r \leq p, r \leq q$ となるような G の要素 r をとれば，$(r \Vdash^* \phi)^M$ かつ $(r \Vdash^* \psi)^M$, したがって $(r \Vdash^* \phi \wedge \psi)^M$.

(1) ∃: まず $p \in G$ かつ $(p \Vdash^* \exists x\, \phi(x))^M$ と仮定する．このとき集合

$$\{r : \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}(r \Vdash^* \phi(\sigma))^M\}$$

は p 以下で稠密となり，また M に属する．そこで G の要素 r と $M^{\mathbb{P}}$ の要素 σ を $(r \Vdash \phi(\sigma))^M$ をみたすようにとれる．すると ϕ に関する (1) によって $(\phi(\sigma_G))^{M[G]}$ となり，したがって $(\exists x\, \phi(x))^{M[G]}$.

(2) ∃: 逆に $(\exists x\, \phi(x))^{M[G]}$ だったとして，$(\phi(\sigma_G))^{M[G]}$ をみたす $M^{\mathbb{P}}$ の要素 σ をとる．ϕ についての (2) により，$(p \Vdash \phi(\sigma))^M$ をみたす G の要素 p がある．このとき $\forall r \le p((r \Vdash^* \phi(\sigma))^M)$ であるから $(p \Vdash^* \exists x\, \phi(x))^M$ (ここでも，定義 3.3 (e) で要求されているより強い言明が得られた). □

これでようやく，事実 1 と事実 2 を正式に言明して証明を与えることができるようになりました.

定理 3.6. M を ZFC の c.t.m. とし，$\mathbb{P}$ を M に属する半順序とする．$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ は集合論の式であって，その自由変数はここに示されたもの以外にはないとする．$\tau_1, \ldots, \tau_n$ を $M^{\mathbb{P}}$ の要素とする．このとき，

(1) $\mathbb{P}$ の任意の要素 p について

$$p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \leftrightarrow (p \Vdash^* \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n))^M.$$

(2) M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックな G について

$$\phi(\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG})^{M[G]} \leftrightarrow \exists p \in G\, (p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)).$$

【証明】 (1) の右辺から左辺が導かれることは定理 3.5 (1) と $\Vdash$ の定義からすぐにわかる．左辺から右辺が導かれることを確かめるために，$p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ と仮定する．$(p \Vdash^* \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n))^M$ を示したいが，それには (補題 3.4 により) 集合 $D = \{r : (r \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n))^M\}$ が p 以下で稠密であることを示せば十分である．そこで，そうなっていなかったとして $q \le p$ かつ $\neg \exists r \le q (r \in D)$ をみたす q をとる．すると $\Vdash^*$ の定義から $(q \Vdash^* \neg \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n))^M$ となり，(1) の右辺から左辺が導かれることによって $q \Vdash \neg \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. いま G を q を含み M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックな集合とすれば $(\neg \phi(\mathrm{val}(\tau_1, G), \ldots, \mathrm{val}(\tau_n, G)))^{M[G]}$ となるが，$q \le p$ より $p \in G$ でもあり，$(\phi(\mathrm{val}(\tau_1, G) \ldots, \mathrm{val}(\tau_n, G)))^{M[G]}$ となって矛盾する．

(2) の左辺から右辺が導かれることは，(1) と，$\Vdash^*$ について同様のことを主張する定理 3.5 (2) からわかる．右辺から左辺が導かれることは $\Vdash$ の定義からすぐ

にわかる. □

定理 3.6 (1) は，$\Vdash$ を用いて定義されたいろいろな集合が M に属することを証明するさいに利用されます．たとえば，$M^{\mathbb{P}}$ の要素 $\tau_1,\ldots,\tau_n$ を固定するとき，集合

$$\{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)\}$$

は

$$\{p \in \mathbb{P} : (p \Vdash^* \phi(\tau_1,\ldots,\tau_n))^M\}$$

と一致し，M における内包性公理によって，これは M に属することになります．同様にして，$M^{\mathbb{P}}$ の要素 σ, $\tau_2,\ldots,\tau_n$ を固定しておくと，

$$\{\langle p,\tau_1\rangle \in \mathbb{P} \times \mathrm{dom}(\sigma) : p \Vdash \phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)\} \in M$$

となることがわかります．また，定理 3.6 (2) は $M[G]$ での言明の真偽を $\Vdash$ 関係と結びつけるうえで重要です．このほか $\Vdash$ に関する次の事実も有用です．

系 3.7. M を ZFC の c.t.m. とし，$\mathbb{P}$ を M に属する半順序とする．$\sigma,\tau_1,\ldots,\tau_n$ を $M^{\mathbb{P}}$ の要素とする．このとき，

(a) 集合 $\{p \in \mathbb{P} : (p \Vdash \phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)) \vee (p \Vdash \neg\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n))\}$ は稠密である．

(b) $p \Vdash \neg\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ は $\neg\exists q \leq p\,(q \Vdash \phi(\tau_1,\ldots,\tau_n))$ と同値である．

(c) $p \Vdash \exists x\,\phi(x,\tau_1,\ldots,\tau_n)$ となるためには集合

$$\{r \leq p : \exists\sigma \in M^{\mathbb{P}}(r \Vdash \phi(\sigma,\tau_1,\ldots,\tau_n))\}$$

が p 以下で稠密となることが必要かつ十分である．

(d) $p \Vdash \exists x(x \in \sigma \wedge \phi(x,\tau_1,\ldots,\tau_n))$ のとき，

$$\exists q \leq p\,\exists\pi \in \mathrm{dom}(\sigma)(q \Vdash \phi(\pi,\tau_1,\ldots,\tau_n))$$

となる．

【証明】 (a) から (c) までは，$\Vdash^*$ については定義から正しいので定理 3.6 (1) により $\Vdash$ についても成立する．(d) について考える．p を含むジェネリック集合 G を考える．$\Vdash$ の定義から，σ_G の要素 a で $(\phi(a,\tau_{1G},\ldots,\tau_{nG}))^{M[G]}$ となるものがある．このとき $\mathrm{dom}(\sigma)$ に属するある π について $a = \pi_G$ であり，また定理 3.6 (2) によって G のある要素 r について $r \Vdash \phi(\pi,\tau_1,\ldots,\tau_n)$ となる．そこで q を p と r の共通の拡大とすると，$q \leq p$ かつ $q \Vdash \phi(\pi,\tau_1,\ldots,\tau_n)$ である．□

§4　$M[G]$ は ZFC をみたす

それでは，第 3 節の結果を応用して，ジェネリック拡大が ZFC のモデルになっていることを示しましょう．AC については，通常とすこし違った形式のものを確かめておくと役に立ちます．

補題 4.1. (ZF)

$$\forall x\,\exists\alpha\in\mathbf{ON}\,\exists f\,(f\text{ は関数である}\wedge\mathrm{dom}(f)=\alpha\wedge x\subset\mathrm{ran}(f))\qquad(*)$$

が成立するとき，そしてそのときに限り AC が成立する．

【証明】 x と α と f が $(*)$ のとおりのとき，x の整列順序づけを次のように定義できる．x の要素 z に対して $g(z)=\min(f^{-1}(z))$ と定義すると，g は x を α の中へ 1 対 1 に写すから，$y\,R\,z\leftrightarrow g(y)<g(z)$ とすれば R は x を整列順序づけする．□

定理 4.2. M を ZFC の c.t.m., $\langle\mathbb{P},\leq,\mathbb{1}\rangle$ は M に属する半順序，G は M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックな集合とする．このとき，$M[G]$ は ZFC をみたす．

【証明】 補題 2.18 において，外延性公理，基礎の公理，対の公理，和集合の公理についてはすでに検証されている．内包性公理をチェックしよう．これには，$M^{\mathbb{P}}$ の任意の要素 $\sigma,\tau_1,\ldots,\tau_n$ と任意の式 $\phi(x,v,y_1,\ldots,y_n)$ について

$$\{a\in\sigma_G:(\phi(a,\sigma_G,\tau_{1G},\ldots,\tau_{nG}))^{M[G]}\}\in M[G]$$

となることを確かめなければならない．そこで，

$$\rho=\{\langle\pi,p\rangle\in\mathrm{dom}(\sigma)\times\mathbb{P}:p\Vdash(\pi\in\sigma\wedge\phi(\pi,\sigma,\tau_1,\ldots,\tau_n))\}$$

とおこう．強制関係の定義可能性 (定理 3.6 (1)) によって $\rho\in M^{\mathbb{P}}$ である．そこで $\rho_G=\{a\in\sigma_G:\phi(a)^{M[G]}\}$ を示せばよい (ここからは，表記の簡略化のため $\tau_1,\ldots,\tau_n$ を略して書く)．ρ_G の要素はどれも，$\langle\pi,p\rangle\in\rho$ かつ $p\in G$ となる π についての π_G の形になっている．このとき ρ の定義から $p(\Vdash\pi\in\sigma\wedge\phi(\pi))$ なので，$\Vdash$ の定義から $\pi_G\in\sigma_G$ かつ $\phi(\pi_G)^{M[G]}$ となる．したがって $\rho_G\subset\{a\in\sigma_G:\phi(a)^{M[G]}\}$．今度は逆に $a\in\sigma_G$ かつ $\phi(a)^{M[G]}$ だったとしよう．このとき $\mathrm{dom}(\sigma)$ のある要素 π について $a=\pi_G$ であって，$(\pi_G\in\sigma_G\wedge\phi(\pi_G))^{M[G]}$ となる．$M[G]$ で成立するすべてのことは強制されるから (定理 3.6 (2))，$p\Vdash(\pi\in\sigma\wedge\phi(\pi))$ をみたす G の要素 p がある．このとき $\langle\pi,p\rangle\in\rho$ だから $\pi_G\in\rho_G$ となる．

次に置換公理を検証しよう．これには，式 $\phi(x,v,r,z_1,\ldots,z_n)$ と $M[G]$ の要素

σ_G, τ_{1G},..., τ_{nG} について，もしも

$$(\forall x\in\sigma_G\,\exists! y\phi(x,y,\sigma_G,\tau_{1G},\ldots,\tau_{nG}))^{M[G]}$$

ならば，$M^{\mathbb{P}}$ のある要素 ρ について

$$\forall x\in\sigma_G\,\exists y\in\rho_G\,(\phi(x,y,\sigma_G,\tau_{1G},\ldots,\tau_{nG}))^{M[G]}$$

となることをチェックしなければならない．ここでも $\tau_1,\ldots,\tau_n$ を略して書く．M の要素 S で，$S\subset M^{\mathbb{P}}$ と

$$\forall\pi\in\mathrm{dom}(\sigma)\,\forall p\in\mathbb{P}\,[\exists\mu\in M^{\mathbb{P}}(p\Vdash\phi(\pi,\mu))\rightarrow\exists\mu\in S(p\Vdash\phi(\pi,\mu))]$$

をみたすものがある．これには，$p\Vdash\phi(\pi,\mu)$ が定理 3.6 (1) によって M に相対化された式として定義できるので，M における反映原理 (第 IV 章定理 7.4) によって，なんらかの順序数 α について $S=R(\alpha)^M\cap M^{\mathbb{P}}$ とすればよい．次に $\rho=S\times\{\mathbb{1}\}$ としよう．すると $\rho_G=\{\mu_G:\mu\in S\}$. あとは，固定された任意の $x\in\sigma_G$ に対して，$\exists y\in\rho_G\,(\phi(x,y))^{M[G]}$ を示せばよい．$\mathrm{dom}(\sigma)$ のなんらかの要素 π について $x=\pi_G$ となる．また仮定より $(\exists y\,\phi(\pi_G,y))^{M[G]}$. そこで，$M^{\mathbb{P}}$ のある要素 ν について $(\phi(\pi_G,\nu_G))^{M[G]}$ となり，定理 3.6 (2) から，G のなんらかの要素 p について $p\Vdash\phi(\pi,\nu)$. このとき S のある要素 μ について $p\Vdash\phi(\pi,\mu)$ となり，$\mu_G\in\rho_G$ かつ $(\phi(\pi_G,\mu_G))^{M[G]}$ が成立する．

ここで，通常の置換公理の $\exists!$ を $\exists$ にゆるめた強い形の公理が証明されているように見えるが，じつはこの《強い置換公理》は反映原理の一種として ZF から導いてくることができる (第 III 章演習問題 15).

ここまでで，ZF − P の公理のうち，無限公理を除くすべてが $M[G]$ で成り立つことがチェックできた．その無限公理も，ω $(=(\check{\omega})_G)$ が $M[G]$ に属するので成立する．したがって $M[G]$ は ZF − P をみたす．

冪集合の公理を確かめるために，$M[G]$ の任意の要素 σ_G をとろう．これに対して，$\forall x\in M[G]\,(x\subset\sigma_G\rightarrow x\in\rho_G)$ をみたすような $M^{\mathbb{P}}$ の要素 ρ を作ることにする．これには

$$S=\{\,\tau\in M^{\mathbb{P}}:\mathrm{dom}(\tau)\subset\mathrm{dom}(\sigma)\,\}=(\mathcal{P}(\mathrm{dom}(\sigma)\times\mathbb{P}))^M$$

とおいて $\rho=S\times\{\mathbb{1}\}$ とすればよい．μ を $\mu_G\subset\sigma_G$ をみたす $M^{\mathbb{P}}$ の任意の要素として，$\mu_G\in\rho_G$ を示す．

$$\tau=\{\,\langle\pi,p\rangle:\pi\in\mathrm{dom}(\sigma)\wedge p\Vdash\pi\in\mu\,\}$$

とおいてみよう．すると $\tau\in S$ なので $\tau_G\in\rho_G$. だから $\tau_G=\mu_G$ を言えばよい．ま

ず，$\mu_G \subset \sigma_G$ より μ_G のどの要素も $\mathrm{dom}(\sigma)$ のある要素 π に対する π_G となっていて，G のある要素 p について $p \Vdash \pi \in \mu$ となる．このとき $\langle \pi, p \rangle \in \tau$ なので $\pi_G \in \tau_G$．したがって $\mu_G \in \tau_G$ である．逆に τ_G の要素はどれも $\langle \pi, p \rangle \in \tau$ かつ $p \in G$ となるような π についての π_G になっているが，このとき $p \Vdash \pi \in \mu$ だから $\pi_G \in \mu_G$．したがって $\tau_G \subset \mu_G$ である．

$M[G]$ での冪集合の公理を証明するうえで決め手となったのは次のことだ．σ_G のすべての部分集合のすべての名前の集合は (あるいは値が空集合になる名前全体の集合ですら)，通常は M に属する集合には含まれないが，σ_G のすべての部分集合の名前を少なくとも一つ含むような集合ならば，M の中に存在する．

これで ZF が $M[G]$ で成立していることがわかった．AC が $M[G]$ で成立していることをチェックするために，補題 4.1 で述べた AC と同値な命題を検証する．$M[G]$ の任意の要素 x を考え $x = \sigma_G$ だったとしよう．AC^M を用い，$\mathrm{dom}(\sigma) = \{\pi_\gamma : \gamma < \alpha\}$ のように，M に属する関数を使って順序数で番号をつけておく．次に

$$\tau = \{\mathrm{op}(\check{\gamma}, \pi_\gamma) : \gamma < \alpha\} \times \{\mathbb{1}\}$$

とおこう (定義 2.16 を参照)．このとき $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ で，$\tau_G = \{\langle \gamma, \pi_{\gamma G} \rangle : \gamma < \alpha\}$ となる．そこで，τ_G は関数であり，$\mathrm{dom}(\tau_G) = \alpha$ と $\sigma_G \subset \mathrm{ran}(\tau_G)$ が成立する．

こうして，ZFC のすべての公理が $M[G]$ において成立する．□

次にすべきことは，ZFC の範囲を越えるいろいろな公理を $M[G]$ が望みどおりにみたすように，半順序 $\mathbb{P}$ をうまく作り上げることですが，その前に，ここまでの結果からただちに導かれる一つの事実を指摘しておきましょう．

系 4.3. M を ZFC の c.t.m. とするとき，M を含み，$\mathrm{ZFC} + \mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ をみたす別の c.t.m. が存在する．

【証明】 定理 4.2 の記号を使って言うと，単に $\mathbb{P}$ を $G \notin M$ となるようなものとして考えればよい．これには $\mathbb{P}$ が補題 2.4 の条件をみたせばよく，たとえば ω から 2 への有限部分関数の集合を考えればよい．このとき $N = M[G]$ とおくと，補題 2.15 により $\mathrm{o}(N) = \mathrm{o}(M)$ なので，$\mathbf{L}^N = \mathbf{L}^M \subset M$．したがって N は $\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ をみたす．□

第 1 節で指摘されたとおり，系 4.3 から次の結果が得られます．

系 4.4. $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathbf{V} \neq \mathbf{L})$．□

これから先，強制法についての議論が展開していくと，数学的にかなり込み入っ

た言明 ϕ についての強制関係 $p \Vdash \phi$ を考えることになります．この場合たいていは，ϕ は正式な集合論の言語で表現されておらず，通常の数学記号を用いて書かれています．それらの数学記号は集合論の正式な言語の表現の省略形であると，私たちは考えることにしているのですが，ZFC のもとで同値な式はちょうど同じ条件によって強制されるため，省略された表現がどの正式な表現の代用になっているのかには，神経を使う必要はありません．このことはここで指摘しておく価値のあることでしょう．より精密には次のようにいうことができます．

補題 4.5. (a) 式 $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ と $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ について

$$\mathrm{ZFC} \vdash \forall x_1,\ldots,x_n\,(\phi(x_1,\ldots,x_n) \to \psi(x_1,\ldots,x_n))$$

となっていると仮定するとき，ZFC の任意の c.t.m. M と M に属する半順序 $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}$ の要素 p と $M^{\mathbb{P}}$ の要素 $\tau_1,\ldots,\tau_n$ について

$$(p \Vdash \phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)) \to (p \Vdash \psi(\tau_1,\ldots,\tau_n))$$

となる．

(b) このときさらに

$$\mathrm{ZFC} \vdash \forall x_1,\ldots,x_n\,(\phi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \psi(x_1,\ldots,x_n))$$

となっていれば，得られる結論も

$$(p \Vdash \phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)) \leftrightarrow (p \Vdash \psi(\tau_1,\ldots,\tau_n))$$

となる．

【証明】 (a) について．M 上の任意の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合 G について，$M[G]$ は ZFC をみたすので

$$\phi(\tau_{1G},\ldots,\tau_{nG})^{M[G]} \to \psi(\tau_{1G},\ldots,\tau_{nG})^{M[G]}$$

となる．そこで (a) は $\Vdash$ の定義から導かれる．(b) は (a) からわかる．□

§5 有限な部分関数を用いた強制

強制法を用いた相対的無矛盾性証明でもっともよく知られているのが ZFC＋¬CH の無矛盾性の証明です．2^ω の値は ω_2 でも ω_5 でも ω_{ω_1} でも，見るからに不合理な場合を除いてどんな値をとるモデルも，この節で述べる方法で作ることができます．

この節を通じて，M はなんらかの ZFC の c.t.m. であるとします．ここでは集合 I から他の集合 J への**有限部分関数**による M 上の強制法について考えます．

定義 5.1.

$$\mathrm{Fn}(I,J)=\{p:|p|<\omega\wedge p\text{ は関数である}\wedge\mathrm{dom}(p)\subset I\wedge\mathrm{ran}(p)\subset J\}$$

と定め，これを $p\leq q\leftrightarrow p\supset q$ によって順序づけする．□

$\mathrm{Fn}(I,J)$ は空な関数 0 を最大要素 $\mathbb{1}$ とする半順序となります．《有限である》ということは絶対的なので，$\mathrm{Fn}(I,J)$ も絶対的です．そこで，$I,J\in M$ のときは $\mathrm{Fn}(I,J)=\mathrm{Fn}(I,J)^M\in M$ となります．第 3 節のはじめに $\mathrm{Fn}(\omega,2)$ について手短かに考察しましたが，一般の $\mathrm{Fn}(I,J)$ についての初歩的な議論はこれとよく似たものです．

G を $\mathrm{Fn}(I,J)$ のフィルターとすると，$\bigcup G$ は関数で，$\mathrm{dom}(\bigcup G)\subset I$, $\mathrm{ran}(\bigcup G)\subset J$ となります．$J\neq 0$ である限り，I の任意の要素 i について $D_i=\{p\in\mathrm{Fn}(I,J):i\in\mathrm{dom}(p)\}$ とおけばこれは稠密になり，特に $I,J\in M$ なら絶対性から $D_i\in M$ となります．そこで，もしも G が M 上のジェネリック集合であれば，すべての i について $G\cap D_i\neq 0$ であり，$\mathrm{dom}(\bigcup G)=I$ となります．これと同様に，もし I が無限集合であれば，J の任意の要素 j について集合 $\{p\in\mathrm{Fn}(I,J):j\in\mathrm{ran}(p)\}$ が稠密で M に属するので，$\mathrm{ran}(\bigcup G)=J$ となります．こうして次のことが証明できました．

補題 5.2. I と J は M に属し，I は無限集合で J は空でないとする．G が M 上の $\mathrm{Fn}(I,J)$-ジェネリック集合であれば，$\bigcup G$ は I から J の上への関数である．□

この種の半順序を応用すると，基数であるという性質が $M,M[G]$ に対して絶対的でないことがわかります．これを確かめるために，κ を M の不可算基数としましょう．つまり，$\kappa\in M$ で (κ は不可算基数である)^M となるものとしましょう．$\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(\omega,\kappa)$ とおき，G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とします．このとき $\bigcup$ の絶対性によって $\bigcup G$ は $M[G]$ に属し，ω から κ の上への関数になっています．したがって，$M[G]$ においては κ は可算順序数になっています．このとき $\mathbb{P}$ **は** κ **を潰す**（つぶ）といいます．

I と J の組み合わせを変えると，$\mathrm{Fn}(I,J)$ を使って CH が偽になるモデルが得られます．もういちど κ を不可算基数として，今度は $\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(\kappa\times\omega,2)$ とおきましょう．すると，M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックな集合 G について，$\bigcup G:\kappa\times\omega\to 2$ となります．κ の要素 α と ω の要素 n に対して $f_\alpha(n)=(\bigcup G)(\alpha,n)$ とおけば，G は ω か

ら 2 への関数の κ-列 $\langle f_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ を符号化したものと考えられるわけです．絶対性によって，列 $\langle f_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ は (つまり，α に f_α を対応させる関数は) $M[G]$ に属することになります．さらに，f_α はすべて互いに異なります．これは，$\alpha \neq \beta$ のとき

$$D_{\alpha\beta} = \{ p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega \, (\langle \alpha, n \rangle \in \mathrm{dom}(p) \wedge \langle \beta, n \rangle \in \mathrm{dom}(p) \\ \wedge\, p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)) \}$$

が稠密で M に属するため，$G \cap D_{\alpha\beta} \neq 0$ となって $f_\alpha \neq f_\beta$ を導きます．こうして $M[G]$ には ω から 2 への互いに異なる関数の κ-列が含まれることになり，次の結果が得られます．

補題 5.3. $\kappa \in M$ で G が M 上 $\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$-ジェネリックなら $(2^\omega \geq |\kappa|)^{M[G]}$．□

ここで $\kappa = (\omega_2)^M$ とすれば，$M[G]$ で $2^\omega \geq \omega_2$ となって CH が不成立となりそうです．そのためにはまず κ が $(\omega_2)^{M[G]}$ とも一致することを確かめなければなりません．これは直ちに明らかではなく，別の半順序を使うと M の不可算基数が $M[G]$ の可算順序数になることもあると，先ほど学んだばかりです．$\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ の場合そうならないことを示すためには，この半順序が M において可算鎖条件 (c.c.c.) をもつという事実が用いられます (M が可算なので $\mathrm{Fn}(I, J)$ は $\mathbf{V}$ で c.c.c. をみたすのはあたりまえで，それはこの話と関係ありません)．

$(\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ は c.c.c. をみたす$)^M$ という事実は，もう少し広い次の結果を M に相対化することで得られます．

補題 5.4. I を任意の集合，J を可算集合とするとき，$\mathrm{Fn}(I, J)$ は c.c.c. をみたす．

【証明】 可算順序数 α に対して $\mathrm{Fn}(I, J)$ の要素 p_α が対応していたとして，$a_\alpha = \mathrm{dom}(p_\alpha)$ とおこう．Δ-システム補題 (第 II 章定理 1.5) によって，ω_1 のなんらかの不可算部分集合 X について $\{a_\alpha : \alpha \in X\}$ が Δ-システムをなす．この Δ-システムの根を r としよう．J が可算集合なので J^r も可算集合であり，したがって $p_\alpha \restriction r$ には可算とおりの可能性しかないことになる．そこで，X のある不可算な部分集合 Y に属するすべての α について，$p_\alpha \restriction r$ がすべて同じものになる．すると，Y に属する α に対する p_α どうしはすべて互いに両立する．このように，互いに両立しない条件の集まり $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ は存在しえない．□

c.c.c. をみたす半順序の例は他にもたくさんあります (第 II 章第 2 節の MA についての議論を参照してください)．c.c.c. がなぜ重要かというと，次の補題で述べ

られているように，$M[G]$ にあらわれる関数を M にいながらにして近似できる手段が与えられるからです．

補題 5.5. $\mathbb{P}$ を M に属する半順序で，($\mathbb{P}$ は c.c.c. をみたす)^M とする．A と B は M に属する集合とする．G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とし，f を $M[G]$ に属する関数で，$f\colon A\to B$ となっているとする．このとき，M に属する関数 F で，$F\colon A\to\mathcal{P}(B)$ と $\forall a\in A\,(f(a)\in F(a))$ と $\forall a\in A\,((|F(a)|\leq\omega)^M)$ をみたすものがある．

【**証明**】 $f=\tau_G$ となる $M^{\mathbb{P}}$ の要素 τ を決めておく．$M[G]$ で成立している言明はすべて強制されるので，G のある要素 p について

$$p\Vdash\tau \text{ は } \check{A} \text{ から } \check{B} \text{ への関数である}$$

となる．このことは正式には，《x は y から z への関数である》という内容をあらわす式 $\phi(x,y,z)$ に定理 3.6 (2) を適用することになるのだが，補題 4.5 によれば，どんな ϕ を用いるかは気にしないでよい．

$$F(a)=\{b\in B\colon\exists q\leq p\,(q\Vdash\tau(\check{a})=\check{b})\}$$

と定義しよう．すると，$\Vdash$ 関係の定義可能性により，$F\in M$ となる (定理 3.6 とその後の議論を参照)．

A の要素 a を固定して，$f(a)\in F(a)$ を示すために $b=f(a)$ とおこう．すると G のある要素 r について $r\Vdash\tau(\check{a})=\check{b}$ となるので，p と r の共通の拡大を q とすれば $q\Vdash\tau(\check{a})=\check{b}$ から $b\in F(a)$ となる．

次に $(|F(a)|\leq\omega)^M$ を示そう．M において AC を使えば，$Q\colon F(a)\to\mathbb{P}$ であって，$F(a)$ の各要素 b に対して $Q(b)\leq p$ かつ $Q(b)\Vdash\tau(\check{a})=\check{b}$ となる関数 Q を M の要素としてとれる．ここでもしも $b,b'\in F(a)$, $b\neq b'$ であれば，$Q(b)$ と $Q(b')$ は互いに矛盾しあう主張を強制することから，互いに両立しない．仮に $Q(b)$ と $Q(b')$ が両立するなら，この両方を含む M 上のジェネリック集合 H が存在することになり，$M[H]$ では $\tau_H\colon A\to B$ で $\tau_H(a)=b$ かつ $\tau_H(a)=b'$ となってしまう．そこで $\{Q(b)\colon b\in F(a)\}$ は $\mathbb{P}$ の反鎖をなす．$Q\in M$ であり ($\mathbb{P}$ は c.c.c. をみたす)^M ので，$(|F(a)|\leq\omega)^M$ がわかる．□

それでは，基数の概念の絶対性に c.c.c. がどう関連しているかを考えてみましょう．

定義 5.6. $\mathbb{P}$ を M に属する半順序とするとき，$\mathbb{P}$ が**基数を保存する**とは，任意の

M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックな G について

$$\forall\beta\in o(M)\,((\beta \text{ は基数である})^M \leftrightarrow (\beta \text{ は基数である})^{M[G]})$$

となることをいう. □

ω は絶対的なので，基数を保存するかどうかは ω より大きな β についてだけ問題になります．また，β が $M[G]$ において基数であればそれは自動的に M の基数になります．というのも，β をより小さい順序数を β の上に写像する関数が M 内にあれば，それはとりもなおさず $M[G]$ 内にあることになるからです．そこで，$\mathbb{P}$ が基数を保存することを

$$\forall\beta\in o(M)\,((\beta \text{ は基数である})^M \rightarrow (\beta \text{ は基数である})^{M[G]})$$

となることだと言っても，同じことになります．

さて，($\mathbb{P}$ が c.c.c. をみたす)^M とき $\mathbb{P}$ が基数を保存することは，補題 5.5 から容易にわかります ($B=\beta$ とし，A を β 未満の順序数としてみなさい)．じつはこのとき，もう少し強く，$\mathbb{P}$ は共終数を保存します．

定義 5.7. $\mathbb{P}$ を M に属する半順序とするとき，$\mathbb{P}$ が**共終数を保存する**とは，任意の M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックな G と M の任意の極限順序数 γ について

$$\mathrm{cf}(\gamma)^M = \mathrm{cf}(\gamma)^{M[G]}$$

となることをいう. □

補題 5.8. $\mathbb{P}$ が共終数を保存するなら，$\mathbb{P}$ は基数を保存する．

【証明】 $\mathbb{P}$ が共終数を保存すると仮定しよう．無限順序数 α が M の正則基数だったとすると，$\mathrm{cf}(\alpha)^{M[G]}=\mathrm{cf}(\alpha)^M=\alpha$ となるため α は $M[G]$ の正則基数でもある．β が ω より大きな M の極限基数だったとすると，M の正則基数の集合は β の下で非有界である (実際，後続型基数の集合が非有界である)．そしてそれらの正則基数は $M[G]$ においてもやはり正則基数だから，β は $M[G]$ においても極限基数である．基数は正則基数であるか極限基数であるかいずれかだから (両方でもありうる)，M の基数はすべて $M[G]$ の基数でもある. □

共終数を保存せず基数を保存するような $\mathbb{P}$ を考えることもできます (たとえば [Prikry 1970])．しかしこの本ではそうした例については考えません．

次の補題は，共終数を保存することのチェックを簡略化します．

補題 5.9. $\mathbb{P}$ を M に属する半順序とする．M 上の任意の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合 G と M の任意の不可算正則基数 κ について，いつでも (κ が正則である)$^{M[G]}$ ならば，$\mathbb{P}$ は共終数を保存する．

【証明】 γ を M に属する極限順序数として，$(\kappa=\mathrm{cf}(\gamma))^M$ だとしよう．すると，M に属する関数 f で，κ を γ の中へ共終に写し，しかも狭義単調増加であるようなものがある (第 I 章の補題 10.31 を M において適用しなさい)．いま (κ は正則基数)^M なので仮定より (κ は正則基数)$^{M[G]}$ である ($\kappa=\omega$ のときは ω の絶対性を使えばよい)．$f\in M[G]$ であるから (第 I 章補題 10.32 を $M[G]$ において適用すれば) $(\kappa=\mathrm{cf}(\gamma))^{M[G]}$ となる．□

定理 5.10. M に属する半順序 $\mathbb{P}$ が (c.c.c. をみたす)^M ならば，$\mathbb{P}$ は共終数を保存する (したがって基数も保存する)．

【証明】 そうでなかったとすると，補題 5.9 によって，M に属する κ で，(正則基数)^M でありながら (正則基数)$^{M[G]}$ でないものがある．このとき κ 未満の順序数 α と，α を κ の中に共終に写す関数 f が $M[G]$ の中に存在する．補題 5.5 によって，M に属する関数 F で $F:\alpha\to\mathcal{P}(\kappa)$ かつ $\forall\xi<\alpha(f(\xi)\in F(\xi))$ かつ $\forall\xi<\alpha(|F(\xi)|\leq\omega)^M$ をみたすものが存在する．$S=\bigcup_{\xi<\alpha}F(\xi)$ とおこう．すると S は M に属する κ の非有界部分集合である．M において $|\alpha|$ 個の可算集合の和集合の濃度は $|\alpha|$ 以下であるという事実を用いると $(|S|=|\alpha|<\kappa)^M$ となり，(κ が正則基数である)^M という仮定と矛盾する．□

これで¬CHのモデルを作るために必要な準備はすべて整いました．$\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(\omega_2^M\times\omega,2)$ としましょう．すると $\mathbb{P}$ は M において c.c.c. をみたし，したがって基数を保存します．そこで $\omega_2^M=\omega_2^{M[G]}$ です．このとき補題 5.3 によって $(2^\omega\geq\omega_2)^{M[G]}$ となります．

すると次に問題になるのは，はたして 2^ω がちょうど ω_2 になることがあるかどうか，ということでしょう．もし $(2^\omega\geq\omega_3)^M$ なら，基数を保存して拡大したあとでも同じことになっているのは容易にわかります．しかし，M が GCH のモデルであれば，$\mathrm{Fn}(\omega_2^M\times\omega,2)$ で強制すると $M[G]$ では 2^ω がちょうど ω_2 になります．このように，M における基数の指数演算の値によって，$M[G]$ での基数の指数演算の上からの評価を与えることができます．

こうした上からの評価は，$M[G]$ が冪集合の公理をみたすことをもう少していねいに証明しなおすことで得られます．冪集合の公理を証明するだけなら，$M^{\mathbb{P}}$ の要素 σ に対して，σ の部分集合になりうるもの一つ一つを代表する名前を集めた集合 S が M の中に見つかればよかったのですが，ここではそのような S の濃度をなるべく小さくすることを考えます．

定義 5.11. σ を $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ の要素とするとき，σ の部分集合の**都合のよい名前**とは，

$$\bigcup\{\{\pi\}\times A_\pi : \pi\in\mathrm{dom}(\sigma)\}$$

の形をした $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ の要素 τ で，しかも各 A_π が $\mathbb{P}$ の反鎖になっているもののことをいう．□

これを例によって M の中で利用するわけですが，都合のよい名前である，という性質は絶対的になっています．

補題 5.12. $\mathbb{P}$ を M に属する半順序とするとき $M^{\mathbb{P}}$ の要素 σ と μ に対して，$M^{\mathbb{P}}$ に属する σ の部分集合の都合のよい名前 τ で

$$\mathbb{1}\Vdash(\mu\subset\sigma\to\mu=\tau)$$

をみたすものが存在する．

【証明】 $\mathrm{dom}(\sigma)$ の各要素 π に対して A_π を $\mathbb{P}$ の次のような部分集合としよう：

(1) $\forall p\in A_\pi\,(p\Vdash\pi\in\mu)$.
(2) A_π は $\mathbb{P}$ の反鎖である．
(3) A_π は条件 (1) と (2) をみたすもののうちで極大である．

M においてツォルンの補題が成立することと，$\Vdash$ が M で定義可能であることにより，$\langle A_\pi:\pi\in\mathrm{dom}(\sigma)\rangle\in M$ と仮定できる．そこで

$$\tau=\bigcup\{\{\pi\}\times A_\pi:\pi\in\mathrm{dom}(\sigma)\}$$

と定義しよう．$\mathbb{1}\Vdash(\mu\subset\sigma\to\mu=\tau)$ を示すために，M 上の任意の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合 G について $\mu_G\subset\sigma_G\to\mu_G=\tau_G$ を示す．$\mu_G\subset\sigma_G$ と仮定しよう．

まず $\mu_G\subset\tau_G$ を示すために $a\in\mu_G$ とする．$\mu_G\subset\sigma_G$ だから $\mathrm{dom}(\sigma)$ のある要素 π について $a=\pi_G$ となっている．$A_\pi\cap G\neq 0$ ならこの集合の要素 p について $\langle\pi,p\rangle\in\tau$ かつ $p\in G$ なので $a=\pi_G\in\tau_G$．仮に $A_\pi\cap G=0$ だったとしたら，補題 2.20 (a) によって $\forall p\in A_\pi\,(p\perp q)$ となる G の要素 q がある．そこで，q' を $q'\Vdash\pi\in\mu$ をみたす G の要素として q と q' の共通の拡大 r をとれば，$A_\pi\cup\{r\}$ は条件 (1) と (2)

をみたすことになって，A_π が極大であるということと矛盾する．

次に $\tau_G \subset \mu_G$ を示すために $a \in \tau_G$ としよう．すると τ の要素 $\langle \pi, p \rangle$ で $p \in G$ かつ $a = \pi_G$ となるものがある．このとき τ の定義によって $p \Vdash \pi \in \mu$ なので $a = \pi_G \in \mu_G$ となる．□

τ が σ の部分集合の都合のよい名前でも $\tau_G \subset \sigma_G$ となるとは限らないのですが，これは問題になりません．σ のすべての部分集合がなんらかの都合のよい名前で表示できるという事実が大切なのです．

補題 5.13. $\mathbb{P}$ を M に属する半順序とし，M 内で，$\mathbb{P}$ は c.c.c. をみたし，$|\mathbb{P}| = \kappa \geq \omega$ であり，λ は無限基数で $\theta = \kappa^\lambda$ となっているとする (つまり，以上の主張を M に相対化したものが成立しているとする)．このとき G を M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックとすれば，$M[G]$ において $2^\lambda \leq \theta$ となる．

【証明】 M で考えて，$\mathbb{P}$ のすべての反鎖は可算であるから，反鎖の総数はたかだか κ^ω である．これと，$\mathrm{dom}(\check{\lambda}) = \{\check{\xi} : \xi < \lambda\}$ であって，この集合の濃度が λ であることから，$\check{\lambda}$ の部分集合の都合のよい名前の個数は高々 $(\kappa^\omega)^\lambda = \kappa^\lambda = \theta$ である．そこで，M における $\check{\lambda}$ の部分集合の都合のよい名前を (M 内で) すべて数え上げて τ_α $(\alpha < \theta)$ としよう．

$M[G]$ において，θ 上定義された関数 f で，各 α について $f(\alpha) = \mathrm{val}(\tau_\alpha, G)$ となるものがある．これはつまり $\pi = \{\langle \mathrm{op}(\check{\alpha}, \tau_\alpha), \mathbb{1} \rangle : \alpha < \theta\}$ とおいて $f = \tau_G$ とすればよい．このとき補題 5.12 により $\mathcal{P}(\lambda)^{M[G]} \subset \mathrm{ran}(f)$ となり，$(2^\lambda \leq \theta)^{M[G]}$ がわかる．□

この補題を応用すれば，2^ω がおよそなんであっても矛盾しないことを示せます．

補題 5.14. κ を M における無限基数で $(\kappa^\omega = \kappa)^M$ となるものだとして，$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ とおく．G が M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合なら $(2^\omega = \kappa)^{M[G]}$ となる．

【証明】 $\lambda = \omega$ として補題 5.13 を適用すると，$M[G]$ において $2^\omega \leq \kappa$ となる．いっぽう，M において $\mathbb{P}$ が c.c.c. をみたすことにより，κ は $M[G]$ においてもやはり基数であるから，補題 5.3 によって $M[G]$ において $2^\omega \geq \kappa$ となる．□

特に M が GCH をみたす場合，$\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ から $\kappa^\omega = \kappa$ が導かれます (第 I 章補題 10.42)．ですから，連続体の濃度は共終数が可算でさえなければどんな値になることも集合論と矛盾しないことがわかります (ケーニヒの補題 (第 I 章補題 10.41) に

よって $\mathrm{cf}(2^\omega)>\omega$ です). たとえば, 次のことが証明できます.

系 5.15. Con(ZFC) から,

(a) $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+2^\omega=\omega_2)$

(b) $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+2^\omega=\omega_{\omega_1})$

などが導かれる.

【証明】 ジェネリック拡大を用いる論法で相対的無矛盾性証明が得られるということについては, 第 1 節で議論されたとおり. まず M を ZFC+GCH をみたすモデルとして出発点におくことができる. なぜなら, (第 VI 章定理 4.10 により) $\mathrm{ZFC}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ の任意の有限個の公理をみたす c.t.m. の存在が ZFC から証明できるし, GCH は $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ から導かれるからである.

そこで, たとえば (b) を得るためには, M が GCH をみたすものとして, 補題 5.14 を $(\kappa=\omega_{\omega_1})^M$ となる κ について適用すればよい. そうすれば, $M[G]$ において $2^\omega=\kappa$ となり, また $\mathbb{P}$ が基数を保存することから, $M[G]$ においても $\kappa=\omega_{\omega_1}$ となる. □

連続体が弱到達不能基数となることもありえます.

系 5.16. 次に述べる四つの理論は無矛盾性の意味で等価である. つまり

$$\mathrm{Con}(T_1)\leftrightarrow\mathrm{Con}(T_2)\leftrightarrow\mathrm{Con}(T_3)\leftrightarrow\mathrm{Con}(T_4).$$

ただし, $T_1\sim T_4$ は次のものである :

T_1 は $\mathrm{ZFC}+\mathrm{GCH}+\exists\kappa$($\kappa$ は強到達不能基数),

T_2 は $\mathrm{ZFC}+\exists\kappa$($\kappa$ は弱到達不能基数),

T_3 は $\mathrm{ZFC}+2^\omega$ は弱到達不能基数,

T_4 は $\mathrm{ZFC}+\exists\kappa<2^\omega$($\kappa$ は弱到達不能基数).

【証明】 $\mathrm{Con}(T_3)$ と $\mathrm{Con}(T_4)$ はいずれも明らかに $\mathrm{Con}(T_2)$ を導く. $\mathrm{Con}(T_2)$ から $\mathrm{Con}(T_1)$ が導かれることを示すには, 次のことが ZFC の定理として証明できることを使えばよい. κ が弱到達不能基数であれば, $\mathbf{L}$ においても κ は弱到達不能基数であり, したがって ($\mathbf{L}$ においては GCH が成立しているので) κ は $\mathbf{L}$ において強到達不能基数である. そこで, T_2 では $\mathbf{L}$ が T_1 の内部モデルになることを証明できる.

Con(T_1) から Con(T_3) と Con(T_4) が導かれることを示すために，M を T_1 の c.t.m. としよう．ここで半順序 $\mathbb{P}$ が M において c.c.c. をみたし，κ が M の弱到達不能基数であれば，$\mathbb{P}$ が共終数を保存することによって，κ は $M[G]$ においても正則な極限基数である．したがって，κ は $M[G]$ においてもやはり弱到達不能基数である．そこで $\lambda > \kappa$ かつ (λ は基数である)^M として $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\lambda \times \omega, 2)$ による強制を用いれば，$M[G]$ が T_4 のモデルになる．また κ が M において強到達不能基数であれば，$(\kappa^\omega = \kappa)^M$ であるから，$\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ によって強制すれば $(2^\omega = \kappa)^{M[G]}$ となり，$M[G]$ が T_3 をみたすことになる．

上の議論から Con(T_1) → Con(T_3) や Con(T_1) → Con(T_4) の有限主義的な相対的無矛盾性証明が得られることを正式に確認するには，第 1 節の議論を ZFC のかわりに T_1 を基礎理論として適用すればよい．T_1 の任意の有限個の公理の c.t.m. (これを M としよう) の存在が (第 IV 章系 7.11 により) T_1 から証明されるので，強制法を用いることで $M[G]$ の形で T_3 の任意の有限個の公理の c.t.m. を作ることができる．□

ゲーデルの不完全性定理によると，Con(ZFC) → Con(T_1) という形の相対的無矛盾性を証明することはあきらめなければなりません．これについては第 IV 章第 10 節で論じられています．

$\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ による拡大モデルの中での不可算基数の冪を計算することもできます．これについては演習問題 G1 を見てください．ここで $\kappa = 1$ とした場合，次のように特筆すべき相対性無矛盾性が得られます．

系 5.17. Con(ZFC) → Con(ZFC + GCH + $\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$).

【証明】 GCH をみたすモデル M から出発しよう．$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega, 2)$ とする．系 4.3 の証明において指摘されたように，$M[G]$ は $\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ をみたす．次に λ を M の無限基数とし，$\theta = (\lambda^+)^M = (\omega^\lambda)^M$ とおく．補題 5.13 より $(2^\lambda \leq \theta)^{M[G]}$ となる．したがって $\forall \lambda \geq \omega (2^\lambda \leq \lambda^+)^{M[G]}$ となり $M[G]$ において GCH が成立する．□

最後に，$\mathrm{Fn}(I, 2)$ の形の半順序を用いたのでは MA + ¬CH のモデルは得られないことを指摘しておきましょう (演習問題 G7)．そうしたモデルを作るためには，もっとずっと複雑な半順序を用いる必要があります (第 VIII 章第 6 節).

§6 より大きな部分関数を用いた強制

この節で考察する半順序を用いれば，CH を破ることなく，より大きな基数における GCH を成立させないようにできます．ここでも M はつねに ZFC のある c.t.m. をあらわすとします．

定義 6.1. 任意の無限基数 λ について

$$\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)=\{p:|p|<\lambda\wedge p\text{ は関数}\wedge\mathrm{dom}(p)\subset I\wedge\mathrm{ran}(p)\subset J\}.$$

この $\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)$ を $p\leq q\leftrightarrow q\subset p$ と順序づけする．□

したがって，$\mathrm{Fn}(I,J)=\mathrm{Fn}(I,J,\omega)$ です．この $\lambda=\omega$ の場合と同じく，$\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)$ は 0 を最大要素 $\mathbb{1}$ とする半順序となります．

$\lambda>\omega$ のとき $\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)$ は M に関して**絶対的ではない**ので，強制法を用いるにあたってはつねに，M の基数 λ に対する $\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)^M$ を使います．興味ある結果が得られるのは λ がさらに M の正則基数の場合だけですが，初歩的な部分の議論にこの制約が関係してくることはありません．

補題 5.2 と同様に，次のことがわかります．

補題 6.2. I, J, λ が M に属し，$(\lambda\text{ は基数})^M$, $J\neq 0$, $(|I|\leq\lambda)^M$ であり，G が M 上 $\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)^M$-ジェネリックであれば，$\bigcup G$ は I から J の上への関数である．□

第 5 章の議論を，ω を λ に換えてさらに続けましょう．$I=\kappa\times\lambda$, $J=2$ とすれば，$\bigcup G$ は λ から 2 への互いに異なる関数の κ-列をコードすると考えられます．そこで，補題 5.3 と同じく，次のことがわかります．

補題 6.3. $(\lambda\text{ は基数})^M$, $\kappa\in M$ とし，G を M 上 $\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\lambda)^M$-ジェネリックとするとき，$(2^{|\lambda|}\geq|\kappa|)^{M[G]}$ が成立する．□

第 5 章でもそうでしたが，難しいのは基数が保存されていることをチェックするところです．λ が ω より真に大きい場合，$\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)$ は，$|I|<\omega$ や $|J|\leq 1$ といったつまらない場合を除くと c.c.c. をみたしません．

ここでの論法は二段階にわかれます．まず，c.c.c. の論法を手直しして λ より大きな基数が保存されていることをチェックします．次に，これは $\lambda=\omega$ のときには確かめるまでもなかったことですが，λ 以下の M の基数が $M[G]$ でも依然として基数であることをチェックするために，新しいアイディアを導入します．じつは，この論法がうまくいくためには，M において，λ が $2^{<\lambda}=\lambda$ をみたす正則基数と

なっている必要があります．

基数が保存されることを検証するために，第 5 章でやったように，共終数が保存されることを検証します．次に述べるいくつかの定義と補題は，定義 5.6 から補題 5.9 までのアナロジーになっています．

定義 6.4. $\mathbb{P}\in M$ とし，θ を M の基数とする．

(1) $\mathbb{P}$ が θ **以上の (または θ 以下の) 基数を保存する**とは，M 上の任意の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合 G と，θ 以上 (または θ 以下) のすべての M の順序数 β について

$$(\beta \text{ は基数である})^M \leftrightarrow (\beta \text{ は基数である})^{M[G]}$$

となることをいう．

(2) $\mathbb{P}$ が θ **以上の (または θ 以下の) 共終数を保存する**とは，M 上の任意の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合を G とするとき，すべての M の極限順序数 γ について，$\mathrm{cf}(\gamma)^M \geq \theta$ (または $\mathrm{cf}(\gamma)^M \leq \theta$) である限りいつでも $\mathrm{cf}(\gamma)^M = \mathrm{cf}(\gamma)^{M[G]}$ となることをいう．□

補題 6.5. 定義 6.4 と同じ仮定のもとで，もしも $\mathbb{P}$ が θ 以下の共終数を保存するなら，$\mathbb{P}$ は θ 以下の基数を保存する．また，もしも $\mathbb{P}$ が θ 以上の共終数を保存し θ が M の正則基数なら，$\mathbb{P}$ は θ 以上の基数を保存する．□

補題 6.6. 定義 6.4 と同じ仮定のもと，さらに，κ が θ 以上の M の正則基数で G が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックであるときには必ず $M[G]$ においても κ が正則基数となると仮定する．このとき，$\mathbb{P}$ は θ 以上の共終数を保存する．《以上》を《以下》に置き換えた同様の結果もまた成立する．□

c.c.c. の定義の《可算》という部分を《θ 未満》に弱めると，θ 以上の共終数が保存されます．

定義 6.7. $\mathbb{P}$ が **θ-鎖条件**(θ-c.c.) をもつとは，$\mathbb{P}$ の反鎖がすべて濃度 θ 未満となることである．

したがって，c.c.c. とは ω_1-c.c. のことです．補題 5.5 や定理 5.10 とまったく同様に次の結果が得られます．

補題 6.8. $\mathbb{P}, A, B$ は M に属し，θ は M の基数であって，さらに M において $\mathbb{P}$ は θ-c.c. をもつと仮定する．G を M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックとし，$f\in M[G]$ かつ $f: A\to B$ であったとする．このとき，M に属する関数 $F: A\to\mathcal{P}(B)$ で，$\forall a\in A(f(a)\in F(a))$ かつ $\forall a\in A(|F(a)|<\theta)^M$ をみたすものが存在する．□

補題 6.9. $\mathbb{P}$ が M に属し，θ は M の基数であり，さらに M において $\mathbb{P}$ は θ-c.c. をもつとすると，$\mathbb{P}$ は θ 以上の共終数を保存する．それゆえ，θ が M の正則基数である場合，$\mathbb{P}$ は θ 以上の基数を保存する．□

実際にはどんな鎖条件が現れるのかここで少しみておきましょう．$\mathbb{P}$ が θ-c.c. をもつような最小の基数 θ のことを c.c.$(\mathbb{P})$ と書きます．タルスキの定理 (演習問題 F4) によって，c.c.$(\mathbb{P})$ は有限でないとすると正則基数です．したがって，“θ が M の正則基数である場合”，という補題 6.9 の条件は外せます．また，(演習問題 F1 によれば) c.c.$(\mathbb{P})$ がちょうど ω になることもありえません．c.c.$(\mathbb{P})$ が有限になると，強制法の観点からは面白くありません (演習問題 F2) が，ゼロ以外の自然数 n については c.c.$(\mathbb{P})=n$ をみたす $\mathbb{P}$ が存在します．$\mathrm{Fn}(1,n-1)$ がそうです．θ が弱到達不能基数である場合，c.c.$(\mathbb{P})=\theta$ となる重要な例としてレヴィの半順序があります (第 8 節)．

残る $\theta=\lambda^+$ の場合を考えましょう．$\mathrm{Fn}(1,\lambda)$ は c.c.$(\mathbb{P})=\theta$ をみたす $\mathbb{P}$ のつまらない一例です．もっと大事な例をあげれば，$\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(I,2,\lambda)$ とすると，GCH のもとでは $|I|\geq\lambda$ のとき c.c.$(\mathbb{P})=\lambda^+$ となります．GCH がない場合はこれが c.c.$(\mathbb{P})=(2^{<\lambda})^+$ となります．この等式のうち c.c.$(\mathbb{P})\geq(2^{<\lambda})^+$ という事実は演習問題 F5 にしておきますが，c.c.$(\mathbb{P})\leq(2^{<\lambda})^+$ のほうは基数の保存にとって大切ですからここで証明します．

補題 6.10. $F(I,J,\lambda)$ は $(|J|^{<\lambda})^+$-c.c. をもつ．

【証明】 $\theta=(|J|^{<\lambda})^+$ として，$\{p_\xi:\xi<\theta\}$ が反鎖をなすと仮定しよう．まず λ が正則基数である場合を考える．この場合 $(|J|^{<\lambda})^{<\lambda}=|J|^{<\lambda}$ なので $\forall\alpha<\theta(|\alpha^{<\lambda}|<\theta)$ となり，Δ-システム補題 (第 II 章定理 1.6) によって，θ の部分集合 X で $|X|=\theta$ かつ $\{\mathrm{dom}(p_\xi):\xi\in X\}$ が Δ-システムをなすものが存在する．その Δ-システムの根を r とすると，$p_\xi{\restriction}r$ には θ とおり未満の可能性しかなく，$\lambda=\omega$ の場合 (補題 5.4) の証明のときと同様の矛盾が生じる．

次に λ が特異基数だった場合を考える．θ は λ より大きい正則基数なので，集合 $Y=\{\xi:|p_\xi|<\lambda'\}$ が濃度 θ をもつような λ より小さな正則基数 λ' を見出せる．このとき $\{p_\xi:\xi\in T\}$ が $(|J|^{<\lambda'})^+$-c.c. に反するが，正則基数 λ' については $(|J|^{<\lambda'})^+$-c.c. はつい先ほど証明したばかりである．□

系 6.11. I と J が M に属し，M においては，λ は正則基数で $|J|\leq 2^{<\lambda}$ かつ $\theta=$

$(2^{<\lambda})^+$ とする．このとき $\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)^M$ は θ 以上の共終数と基数を保存する．

【証明】 $(|J|^{<\lambda}=2^{<\lambda})^M$ であるから，M 内で補題 6.10 を用いれば，$\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)^M$ が M において θ-c.c. をもつことがわかる．あとは補題 6.9 を用いればよい．□

次に，λ が M の正則基数であるときに $(\mathrm{Fn}(I,J,\lambda))^M$ が λ 以下の共終数と基数を保存することを，これまでとはまったく異なった論法で示します．GCH のもとでは $2^{<\lambda}=\lambda$ なので，補題 6.11 によって，すべての共終数と基数が保存されます．しかし，M において $\lambda^+\leq\kappa\leq 2^{<\lambda}$ をみたす基数 κ がある場合は，そのような κ はつまらない例外を別にすればどれも $M[G]$ において濃度 λ をもち，基数でなくなってしまいます (演習問題 G3).

定義 6.12. 半順序 $\mathbb{P}$ が **λ-閉**であるとは，$\gamma<\lambda$ で $\{p_\xi:\xi<\gamma\}$ が $\mathbb{P}$ の要素の降下列であるとき (つまり $\xi<\eta\rightarrow p_\xi\geq p_\eta$ となるとき) にはいつでも

$$\exists q\in\mathbb{P}\forall\xi<\gamma(q\leq p_\xi)$$

が成立する，ということである．□

補題 6.13. λ が正則基数のとき，$\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)$ は λ-閉である．

【証明】 $\bigcup\{p_\xi:\xi<\gamma\}$ を q とすればよい．$|q|<\lambda$ となることは，各 p_ξ の濃度が λ 未満で λ が正則基数であることによる．□

λ が特異基数であるとき $\mathrm{Fn}(\lambda,2,\lambda)$ は λ-閉ではありません．また，M において λ が特異基数であれば，$(\mathrm{Fn}(\lambda,2,\lambda))^M$ は λ を潰します (演習問題 G5).

λ が正則基数であるときに $\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)$ が λ-閉であるという事実を，λ 以下の基数が保存されることの証明に使います．

次に述べる結果を補題 6.8 と比べてください．補題 6.8 では A から B への $M[G]$ に属する関数を M のなかで近似するために鎖条件を用いました．定理 6.4 では，A から B への関数は，A が十分小さいときは実際に M の中に存在する，ということを示します．

定理 6.14. $\mathbb{P}$ と A と B が M に属し，λ は M の基数で，M において $\mathbb{P}$ が λ-閉かつ $|A|<\lambda$ であると仮定する．G が M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリックで，$f\in M[G]$ かつ f: $A\rightarrow B$ だとすると，$f\in M$ である．

【証明】 最初に，A が λ 未満の順序数 α である場合に証明すれば十分であることに

注意しよう．その場合ができれば，一般の A については，α を M におけるその濃度として M 内に α から A の上への一対一関数 j をとり，$f\circ j$ にこの特別な場合を適用すれば，$f\circ j$ は M に属するとわかる．したがって f も M に属する．

さて $K=({}^{\alpha}B)^M={}^{\alpha}B\cap M$ とおき，$f\in{}^{\alpha}B\cap M[G]$ だとする．$f\in K$ となることを示したい．そうでなかったと仮定しよう．$M^{\mathbb{P}}$ の要素 τ で $f=\tau_G$ となるものをとる．G に属する p で

$$p\Vdash(\tau \text{ は } \check{\alpha} \text{ から } \check{B} \text{ への関数} \wedge \tau\notin\check{K}) \tag{$*$}$$

となるものがある．ここから先では $(*)$ から直接矛盾を導くので，f と G のことは忘れてよい．

M 内で超限再帰と AC を使って，$\mathbb{P}$ の要素の列 $\{p_\eta : \eta\leq\alpha\}$ と B の要素の列 $\{z_\eta : \eta<\alpha\}$ を次のように選ぶ．

(1) $p_0=p$,

(2) $\xi\leq\eta$ のとき $p_\eta\leq p_\xi$,

(3) $p_{\eta+1}\Vdash\tau(\check{\eta})=\check{z}_\eta$.

この超限再帰の後続型順序数の段では，p_η が与えられたものとして $p_{\eta+1}$ と z_η を次のようにして見つける．$p_\eta\leq p$ であることから

$$p_\eta\Vdash\tau \text{ は } \check{\alpha} \text{ から } \check{B} \text{ への関数}$$

となっており，強制された文からの帰結もまた強制されるという事実 (補題 4.5 (a)) によって

$$p_\eta\Vdash\exists x\in\check{B}(\tau(\check{\eta})=x)$$

となっている．そこで，系 3.7 (d) により，B のある要素 z_η と $p_{\eta+1}\leq p_\eta$ をみたす $\mathbb{P}$ のある要素 $p_{\eta+1}$ について $p_{\eta+1}\Vdash\tau(\check{\eta})=\check{z}_\eta$ となる．また，極限順序数の段では，λ-閉ということの定義によって，極限順序数 η に対応する p_η を条件 (2) がみたされるようにとることができる．

これも M の中で，$g=\langle z_\eta : \eta<\alpha\rangle$ とおく．つまり，g は α を定義域としすべての η について $g(\eta)=z_\eta$ をみたす関数である．このとき $g\in K$.

H を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合で $p_\alpha\in H$ をみたすものとすると，$\eta<\alpha$ のとき $p_\eta\in H$ なので $\tau_H=g\in K$ となる．ところが，$p_0=p$ で $p\Vdash\tau\notin\check{K}$ なので $\tau_H\notin K$ となる．これは矛盾である．□

系 6.15. $\mathbb{P}$ は M に属し，M において λ は基数で $\mathbb{P}$ は λ-閉とする．このとき，$\mathbb{P}$ は λ 以下の共終数を保存し，したがって λ 以下の基数を保存する．

【証明】 そうでなかったとすると，λ 以下のある順序数 κ について，(κ は正則である)^M かつ (κ は正則ではない)$^{M[G]}$ となるはずである．そこで，κ より小さな α を κ の中へ共終に写す関数 f が $M[G]$ 内にあることになる．定理 6.14 によれば f は M に属するはずで，(κ が正則である)^M ことに矛盾する．□

定理 6.16. λ と I と J が M に属し，M においては λ は正則基数で $2^{<\lambda}=\lambda$ かつ $|J|\leq\lambda$ となっていると仮定する．このとき，$\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)^M$ は共終数 (と基数) を保存する．

【証明】 λ の正則性により $\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)^M$ は M において λ-閉であるから，λ 以下の共終数を保存する (補題 6.13 から系 6.15 までの議論による)．$2^{<\lambda}=\lambda$ であることから $\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)^M$ は M において λ^+-c.c. をもつから，$(\lambda^+)^M$ 以上の共終数を保存する (補題 6.8 から系 6.11 までの議論による)．□

そこで，$\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\lambda)^M$ という形の半順序を用いる強制法を使えば，基数 λ のところで GCH を自由に破れます．第 5 節でやったように，都合のよい名前を用いて $M[G]$ での 2^λ の値を正確に計算できます．系 5.15 の一般化として次の結果が得られます．

定理 6.17. M において次のことが成立していると仮定しよう：λ は $2^{<\lambda}=\lambda$ をみたす正則基数で，$\lambda<\kappa$ かつ $\kappa^\lambda=\kappa$ である．$\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\lambda)^M$ としよう．このとき $\mathbb{P}$ は基数を保存する．また，G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とすれば $(2^\lambda=\kappa)^{M[G]}$ である．

【証明】 基数が保存されることについてはここまでで証明したとおり．$M[G]$ において $2^\lambda\geq\kappa$ となることは (補題 6.3 から) 簡単にわかる．あとは $(2^\lambda\leq\kappa)^{M[G]}$ を示さなければならない．

M 内で考えよう．$\mathbb{P}$ は濃度 $\kappa^{<\lambda}=\kappa$ をもち，また $\mathbb{P}$ は λ^+-c.c. をもつからその反鎖の個数は高々 $\kappa^\lambda=\kappa$ 個である．それゆえ λ の部分集合の都合のよい名前も高々$\kappa^\lambda=\kappa$ 個しかない．それらを $\langle\tau_\alpha:\alpha<\kappa\rangle$ と数え上げたとして，

$$\pi=\{\langle\mathrm{op}(\check{\alpha},\tau_\alpha),\mathbb{1}\rangle:\alpha<\kappa\}$$

とおこう．すると，補題5.13の証明と同様に，$M[G]$ において π_G は関数で $\mathrm{dom}(\pi_G) = \kappa$ かつ $\mathcal{P}(\lambda) \subset \mathrm{ran}(\pi_G)$ となり，したがって $2^\lambda \leq \kappa$ である．□

λ に限らず，すべての基数の羃が $M[G]$ でどうなっているか M での基数の算術によって計算できるように，定理 6.17 を改良することもできます．しかし，そうした非常に一般的な結果を丸暗記するよりは，必要ならいつでも定理 6.17 の方法に戻るほうがよいでしょう．

定理 6.17 の方法は，好きな正則基数のところ，一つといわず任意の有限個の正則基数のところで GCH を思いどおりに破るために使えます．例として次の結果を証明しましょう．

定理 6.18. ZFC が矛盾しない限り，次のものも矛盾しない．

(a) $\mathrm{ZFC} + \mathrm{CH} + 2^{\omega_1} = \omega_2 + 2^{\omega_2} = \omega_{\omega_8}$.

(b) $\mathrm{ZFC} + \mathrm{CH} + 2^{\omega_1} = \omega_5 + 2^{\omega_2} = \omega_7$.

(c) $\mathrm{ZFC} + 2^{\omega} = \omega_3 + 2^{\omega_1} = \omega_4 + 2^{\omega_2} = \omega_6$.

【証明】 いずれの場合も ZFC＋GCH をみたす M から出発する．

(a) については $\mathbb{P} = (\mathrm{Fn}(\omega_{\omega_8} \times \omega_2, 2, \omega_2))^M$ とおく．定理 6.17 により $\mathbb{P}$ は基数を保存し，G が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックであれば，$M[G]$ において $2^{\omega_2} = \omega_{\omega_8}$ が成立する．$M[G]$ において $2^{\omega_1} = \omega_2$ となるという事実は，定理 6.14 より $({}^{\omega_1}2)^M = ({}^{\omega_1}2)^{M[G]}$ となることから導かれる．これによって，$F \in M$ かつ (F が ω_2 から ${}^{\omega_1}2$ の上への写像である)^M ときには，(F は ω_2 から ${}^{\omega_1}2$ の上への写像である)$^{M[G]}$. $(2^\omega = \omega_1)^{M[G]}$ についても同様.

(b) の場合は二回強制する．まず $\mathbb{P} = (\mathrm{Fn}(\omega_7 \times \omega_2, 2, \omega_2))^M$ とおき，G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリックとして $N = M[G]$ としよう．すると，(a) の場合と同様に

$$(2^\omega = \omega_1 \wedge 2^{\omega_1} = \omega_2 \wedge 2^{\omega_2} = \omega_7)^N$$

となる．また，($\kappa \geq \omega_2$ で κ が正則基数である)^N ときは必ず $(\kappa^{\omega_1} = \kappa)^N$ となる．これは，$(\mathrm{GCH})^M$ よりこの事実が M において成立していることと，$({}^{\omega_1}\kappa)^M = ({}^{\omega_1}\kappa)^N$ であることによる．そこで今度は，M の代りに N を基礎モデルとする強制にこれまでの結果を適用する．

$$\mathbb{Q} = (\mathrm{Fn}(\omega_5 \times \omega_1, 2, \omega_1))^N$$

とおこう．$(2^{<\omega_1} = \omega_1)^N$ なので $\mathbb{Q}$ は基数を保存する．H を N 上の $\mathbb{Q}$-ジェネリッ

ク集合としよう．(a) でやったように $(\mathrm{CH})^{N[H]}$ が証明される．$(2^{\omega_2} \geq \omega_7)^N$ から $(2^{\omega_2} \geq \omega_7)^{N[H]}$ が導かれる．本当に $(2^{\omega_2} = \omega_7)^{N[H]}$ となることを示すには定理 6.17 の方法を用いる．N においては $\mathbb{Q}$ は ω_2-c.c. をもち $|\mathbb{Q}| = \omega_5^{\omega_1} = \omega_5$ であるから，ω_2 の部分集合の都合のよい名前は $((\omega_5)^{\omega_1})^{\omega_2} = \omega_7$ 個しかない．$(2^{\omega_1} = \omega_5)$ であることを示すには，定理 6.17 を直接に適用し，さらに $(\omega_5^{\omega_1} = \omega_5)^N$ を用いる．

(c) については三回強制して，$M \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3$ のようにモデルを構成する．N_1 が $2^\omega = \omega_1 \wedge 2^{\omega_1} = \omega_2 \wedge 2^{\omega_2} = \omega_6$ をみたし，N_2 が $2^\omega = \omega_1 \wedge 2^{\omega_1} = \omega_4 \wedge 2^{\omega_2} = \omega_6$ をみたし，N_3 が (c) をみたすようにする．□

(b) と (c) の証明では，逆向きに進むということ，つまり大きな基数から先に処理していくことがとても重要です．たとえば (b) でまず $\mathbb{P} = (\mathrm{Fn}(\omega_5 \times \omega_1, 2, \omega_1))^M$ とおいて M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックな G について $N = M[G]$ とすると，N は $2^{\omega_1} = \omega_5$ をみたします．それゆえ $(2^{<\omega_2} \neq \omega_2)^N$ となり，$\mathbb{Q} = (\mathrm{Fn}(\omega_7 \times \omega_2, 2, \omega_2))^N$ とおいたとき $\mathbb{Q}$ が基数を保存しません．実際，H が N 上 $\mathbb{Q}$-ジェネリックだとすると，$(\omega_5)^N$ は $N[H]$ において基数 ω_2 をもち (演習問題 G3)，$N[H]$ は $2^{\omega_1} = \omega_2$ をみたすはずです．

定理 6.18 を任意の有限個の正則基数の冪を扱えるように拡張することも容易です (演習問題 G6)．すると自然に次の二つの疑問が起ってきます．

疑問 1.　正則基数の冪はどれくらい自由にいじれるでしょうか?

これは，イーストンによって次のように答えられました．単調性 $(\lambda < \lambda' \to 2^\lambda \leq 2^{\lambda'})$ とケーニヒの補題 ($\mathrm{cf}(2^\lambda) > \lambda$ となること．第 I 章系 10.41) にしたがう限り，まったく望むとおりにできます．これは第 VIII 章第 4 節でさらに詳しく議論します．ここでは次のことを指摘しておくに留めましょう．たとえば GCH をみたす M から出発して，$M[G]$ が $\forall n \in \omega (2^{\omega_n} = \omega_{n+3})$ をみたすようにしたいとしたら，定理 6.18 の方法では，《最大の ω_n からはじめて》強制を ω 回反復することになりそうです．しかしこれはもちろん意味をなしません．たとえそこを回避できても，強制法を ω 回繰り返したとき ZFC のモデルが得られると安易に期待するわけにはいきません (演習問題 B6)．つまり，なにか新しいアイディアが必要です．

疑問 2.　特異基数についてはどうなっているのでしょうか?

M において λ が特異基数である場合，$\mathrm{Fn}(I, \kappa, \lambda)^M$ の形の半順序は必ず λ を潰します (演習問題 G5)．したがって，この節で述べた方法では特異基数の冪の問題

は解けません．じつは，特異基数の冪については，単調性とケーニヒの補題の他にもいくらか制約があるのです．第 VIII 章第 4 節のおわりで，これについて詳細に述べています．

§7　埋め込み，同型，ブール代数値モデル

これまで同様，M はなにか決まった ZFC の c.t.m. をあらわすとします．

$\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ は M に属する半順序で，$i \in M$, $i : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ は $\mathbb{P}$ を $\mathbb{Q}$ に部分順序集合として埋め込む写像としましょう．i がしかるべき条件をみたすとき，$\mathbb{P}$ による強制法の仕組みの全体を $\mathbb{Q}$ による強制法の仕組みに，i によって埋め込めます．ここではその方法を説明します．この一つのアイディアに，互いに関連がないように見えるたくさんの応用があるのです．第一に，$\mathbb{P}=\mathbb{Q}$ の場合が，ZF$+\neg$AC のモデル構成 (演習問題 E1 から E5) の鍵になっています．第二に，$\mathbb{P} \neq \mathbb{Q}$ だが i が同型写像である場合，同型な半順序からは (同型写像が M に属しているとすれば) 同一のジェネリック拡大が得られることが示されます．第三に，$\mathbb{P} \subset \mathbb{Q}$ で i が包含写像である場合，より大きい半順序からはより大きいジェネリック拡大が得られると考えられます．第 VIII 章で反復強制法を考えるときこのことがとりわけ重要になってきます．最後に，こうしたアイディアを用いて，強制法はブール代数値モデルと関連づけられます．

ブール代数値モデルを扱うさいは，($\mathcal{B}$ は完備ブール代数)^M であるとして $\mathbb{Q}=\{b \in \mathcal{B} : b > 0\}$ という場合を考えます．ここでは，第 II 章第 3 節で述べた半順序とブール代数の関係について読者がよく知っているという前提で議論しています．ブール代数値モデルに興味のない読者がこの節でブール代数について述べている部分をまるきり読み飛ばしてしまっても，話のつながりが悪くなることはありません．

上にあげた第三の応用例を検討することからはじめましょう．$\mathbb{P}$ が $\mathbb{Q}$ の部分順序であるとします．これはつまり $\mathbb{P} \subset \mathbb{Q}$ かつ $\leq_{\mathbb{P}} = \leq_{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ を意味します．このとき，$\mathbb{Q}$ によるジェネリック拡大は $\mathbb{P}$ による拡大より大きくなる《はず》です．というのも，H が M 上 $\mathbb{Q}$-ジェネリックなら，$H \cap \mathbb{P}$ が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックである《はず》で，このとき $M[H \cap \mathbb{P}] \subset M[H]$ となる《はず》だからです．ところが，$\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ になんらかの制限をつけないことには，これは成立しないのです．

必要な制限の一つを正しく理解するために，$\mathbb{P}$ の要素 p_1 と p_2 は $\mathbb{P}$ において両立

しないけれども $\mathbb{Q}$ において両立し，$\mathbb{Q}$ のある要素 q について $q \le p_1$ かつ $q \le p_2$ となると仮定しましょう．ここで H を $q \in H$ をみたす M 上の $\mathbb{Q}$-ジェネリック集合とすると，$p_1, p_2 \in H \cap \mathbb{P}$ なので，$H \cap \mathbb{P}$ は $\mathbb{P}$ のフィルターにすらなりません．そこで，p_1 と p_2 が $\mathbb{P}$ において両立しない場合は $\mathbb{Q}$ においてもこれらが両立しないことを要請しなければならないわけです．

もう一つの制限を得るために，q を $\mathbb{Q}$ の要素として，$D = \{p \in \mathbb{P} : p \perp q\}$ としましょう．H が M 上の $\mathbb{Q}$-ジェネリック集合で $q \in H$ となれば $H \cap D = 0$ なので，$H \cap \mathbb{P}$ を $\mathbb{P}$-ジェネリックにしたいのなら，D は $\mathbb{P}$ において稠密にならないと要請しておくべきです．そこで，$\mathbb{P}$ のある要素 p について

$$\forall p' \in \mathbb{P}(p' \le p \to \mathbb{Q} \text{ において } p' \text{ と } q \text{ は両立する})$$

とならなければなりません．

この二つの制限が成立する場合 $\mathbb{P}$ が $\mathbb{Q}$ に**完備包含される**といい，また $\mathbb{P} \subset_c \mathbb{Q}$ と書くことにします．この二つの制限があれば十分です．そのことを定理 7.5 で示します．それではこれから，ある半順序を他の半順序に埋め込むというもう少し一般的な枠組みで，正式に理論を展開しましょう．

定義 7.1. $\langle \mathbb{P}, \le_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle$ と $\langle \mathbb{Q}, \le_{\mathbb{Q}}, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \rangle$ を半順序とするとき，写像 $i : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ が**完備埋め込み写像**であるとは，条件

(1) $\forall p, p' \in \mathbb{P}(p' \le p \to i(p') \le i(p))$,
(2) $\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P}(p_1 \perp p_2 \leftrightarrow i(p_1) \perp i(p_2))$,
(3) $\forall q \in \mathbb{Q} \exists p \in \mathbb{P} \forall p' \in \mathbb{P}(p' \le p \to \mathbb{Q}$ において $i(p')$ と q は両立する$)$,

がみたされることをいう．条件 (3) の p を q **の $\mathbb{P}$ への縮約**と呼ぶ．□

定義 7.1 において $\le_{\mathbb{P}}$ と $\le_{\mathbb{Q}}$ の添字はさっさと省略してしまいましたが，どちらの順序を意味するのかは文脈から明らかでしょう．これと同じく，正式には $\perp$ にも添字をつけなければなりません．条件 (3) において，q の $\mathbb{P}$ への縮約 p は一意には定まらないことに注意しましょう．$p_1 \le p$ であれば p_1 もやはり縮約となります．

定義 7.2. $\langle \mathbb{P}, \le_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle \subset_c \langle \mathbb{Q}, \le_{\mathbb{Q}}, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \rangle$ あるいは $\mathbb{P} \subset_c \mathbb{Q}$ とは，$\le_{\mathbb{P}} = \le_{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ であると同時に $\mathbb{P}$ から $\mathbb{Q}$ への包含写像 (恒等写像) が完備埋め込み写像になっていることをいう．□

定義 7.2 の i が埋め込み写像である場合に定義 7.1 の条件 (1) は言うまでもなく成立しますし，条件 (2) と (3) は先ほど定義 7.1 の前に述べた二つの制限事項その

ものになります．より一般的な定義 7.1 の枠組においても，条件 (1) を

$$\forall p, p' \in \mathbb{P}(p' \leq p \leftrightarrow i(p') \leq i(p))$$

と言明し，さらに i が $i(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ をみたす 1 対 1 写像であるという要請まで付け加えるのではないかと，読者は思われたかも知れません．実際に興味のある (全部ではないけれども) 多くの場合に，これらの追加条件がいずれも成立します (演習問題 C2)．しかし，追加条件のない定義 7.1 の形のままでも理論展開が面倒になることはありませんし，後ほどわかるとおり，ブール代数値モデルの理論において実際にこの形の一般論が必要になります (演習問題 C9)．

定義 7.1 の条件 (2) において右側から左側への含意は条件 (1) から導かれるので，新しく別の条件を述べているのは左から右への含意だということを指摘しておきます．

定義 7.1 のつまらない例として，$\mathbb{P}$ の要素がすべて互いに両立する場合，すべての要素 p について $i(p) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ とすれば i は完備埋め込み写像です．次に述べるのはもう少し有意義な例です．

補題 7.3.

(a) i が $\mathbb{P}$ から $\mathbb{Q}$ の上への同型写像であれば，i は完備埋め込み写像である．

(b) $I \subset I'$ であれば，$\mathrm{Fn}(I, J, \kappa) \subset_c \mathrm{Fn}(I', J, \kappa)$ である．

【証明】 (b) について，定義 7.1 の条件 (1) と (2) は明らか．(3) については，q を $\mathrm{Fn}(I', J, \kappa)$ の要素とすれば，$q \restriction I$ は q の $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ への縮約である．□

《自然に現れる》包含関係は必ず完備包含になるはずだと思い込んではいけません．たとえば，$\mathrm{Fn}(\kappa, 2) \subset \mathrm{Fn}(\kappa, 2, \omega_1)$ ですが，$\kappa \geq \omega$ のときこの包含関係は完備包含ではありません．定義 7.1 の条件 (1) と (2) は成立しますが，$\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \omega_1)$ の要素で定義域が無限集合であるものには，$\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ への縮約がありません．さらに，M という c.t.m. に相対化して考えたとして，$\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \omega_1)^M$ が $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ と比較してより大きな拡大に対応すると考えるわけにもいきません．$\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ が ω の新しい部分集合をつけ加えるのにくらべて，$\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \omega_1)^M$ は一つも付け加えないからです．

ではこれから，$\mathbb{P} \subset_c \mathbb{Q}$ のとき $\mathbb{Q}$ が本当に $\mathbb{P}$ より大きい拡大を引き起こすことを示していきましょう．これまで同様，順序集合の理論にまつわるあらゆることを M に相対化しますが，容易にわかるように，完備埋め込み写像と $\subset_c$ の定義は M

に対して絶対的なので，これらの概念の相対化は不要です．

準備段階として次の補題を証明します．

補題 7.4. $\mathbb{P}$ が M に属しているとすると，$\mathbb{P}$ の部分集合 G が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックであるためには次のことが必要かつ十分である．

(1) $\forall p,q \in G\, \exists r \in \mathbb{P}\, (r \leq p \wedge r \leq q)$,

(2) $\forall p \in G\, \forall q \in \mathbb{P}(q \geq p \rightarrow q \in G)$,

(3) $\forall D \subset \mathbb{P}((D \in M \wedge D$ は $\mathbb{P}$ において稠密$) \rightarrow G \cap D \neq 0)$.

【証明】 条件 (1)–(3) とジェネリックの定義のただ一つの違いは，G がフィルターであることを要請するかどうか，つまり，条件 (1) の r が G に属することを要請するかどうかという点だけである (第 II 章定義 2.4 を見なさい)．だから，補題 7.4 を証明するには，G が条件 (1)–(3) をみたすと仮定し，G の要素 p と q が定められたとして $\exists r \in G(r \leq p \wedge r \leq q)$ を示せばよい．そのために

$$D = \{r \in \mathbb{P} : r \perp p \vee r \perp q \vee (r \leq p \wedge r \leq q)\}$$

とおく．この D は稠密で M に属するので，条件 (3) により $G \cap D$ の要素 r が得られる．条件 (1) によれば G の要素は互いに両立するので，$r \leq p \wedge r \leq q$ である．□

定理 7.5. i と $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ は M に属し，$i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ であって，しかも i は完備埋め込み写像であるとしよう．このとき H が M 上 $\mathbb{Q}$-ジェネリックであれば，$i^{-1}(H)$ は M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックであって，$M[i^{-1}(H)] \subset M[H]$ となる．

【証明】 まず $i^{-1}(H)$ がジェネリックであることをチェックしよう．補題 7.4 の条件 (1) と (2) は，それぞれ定義 7.1 の条件 (2) と (1) を用いて簡単に確かめられる．条件 (3) を示すために，M に属し $\mathbb{P}$ において稠密な集合 D があったとする．仮に $i^{-1}(H) \cap D = 0$ ならば $H \cap i''D = 0$ であるから，(補題 2.20 (a) により) H のある要素 q について $\forall q' \in i''D(q' \perp q)$, すなわち $\forall p' \in D(i(p') \perp q)$. この q の $\mathbb{P}$ への縮約を p とすると，$p' \leq p$ となるすべての p' について，$\neg(i(p') \perp q)$, したがって $p' \notin D$ となるはずだが，D が稠密である以上これはありえない．

$i \in M \subset M[H]$ と $H \in M[H]$ から $i^{-1}(H) \in M[H]$. そこで，$M[i^{-1}(H)]$ の最小性 (補題 2.9) により $M[i^{-1}(H)] \subset M[H]$. □

逆に，M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合 G が与えられれば，$G = i^{-1}(H)$ をみたす M

上 $\mathbb{Q}$-ジェネリックな H を必ず見つけることができ，さらに $M[G]$ に属するなんらかの半順序 $\mathbb{R}$ と $M[G]$ 上のある $\mathbb{R}$-ジェネリック集合 K について $M[H]=M[G][K]$ が成立します (演習問題 D3–D6)．完備埋め込み写像と強制拡大の繰り返しのこうした関係は，第 VIII 章でふたたびとりあげます．

写像 $i:\mathbb{P}\to\mathbb{Q}$ が同型写像である場合，定理 7.5 を i とその逆写像の両方に適用すれば，M に属する同型写像によって写りあう同型な半順序からは同じ拡大が得られることがわかります．

系 7.6. 定理 7.5 の条件に加えて，i が同型写像であるとしよう．G を $\mathbb{P}$ の部分集合とするとき，これが M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックであるためには $i''G$ が M 上 $\mathbb{Q}$-ジェネリックであることが必要かつ十分で，しかもその場合 $M[G]=M[i''G]$ が成立する．□

たとえば $\kappa\geq\omega$ かつ $\kappa\in M$ のとき，$(|\kappa|=|\kappa\times\omega|)^M$ より半順序 $\mathrm{Fn}(\kappa,2)$ と $\mathrm{Fn}(\kappa\times\omega,2)$ は M 内で同型となり，したがって両者から同じ拡大が得られます．$\mathrm{Fn}(\kappa\times\omega,2)$ を使うとつけ加えられる ${}^{\omega}2$ の要素の κ-列を簡単に記述できるので，本書ではそちらを用いました．しかし，$\mathrm{Fn}(\kappa,2)$ のほうが書き下すには簡単なので，こちらのほうがいろいろな文献でふつうに用いられている順序です．また，$(\kappa\geq\omega_1)^M$ のとき，$\mathrm{Fn}(\kappa,2)$ と $\mathrm{Fn}(\omega,2)$ は $\mathbf{V}$ においては依然として同型ですが，M 内では同型ではないので，同じ拡大が得られるとは限りません．CH がいっぽうのモデル真，他方で偽となりうるからです．

半順序 $\mathrm{Fn}(\omega,2), \mathrm{Fn}(\omega,3), \mathrm{Fn}(\omega,\omega)$ は，M においても $\mathbf{V}$ においても同型ではありません．それでも，これらの半順序からは同じ拡大が得られます．このことは，次にとりあげる**稠密埋め込み写像**という概念を使って証明できます (演習問題 C3)．

定義 7.7. $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ を半順序とし，$i:\mathbb{P}\to\mathbb{Q}$ とするとき，i が**稠密埋め込み写像**であるとは，次のことが成り立つことをいう．

(1) $\forall p,p'\in\mathbb{P}(p'\leq p\to i(p')\leq i(p))$.

(2) $\forall p_1,p_2\in\mathbb{P}(p_1\perp p_2\to i(p_1)\perp i(p_2))$.

(3) $i''\mathbb{P}$ は $\mathbb{Q}$ において稠密である．□

補題 7.8. 稠密埋め込み写像は完備埋め込み写像である．

【証明】 $q\in\mathbb{Q}$ のとき，$i(p)\leq q$ をみたす $\mathbb{P}$ の要素 p はどれでも q の $\mathbb{P}$ への縮約と

なる. □

これの特別な場合として，次の事実は重要です.

系 7.9. 半順序 $\mathbb{P}$ が $\mathbb{Q}$ の部分順序集合で，しかも $\mathbb{Q}$ において稠密のとき，$\mathbb{P}$ 上の恒等写像は $\mathbb{Q}$ への稠密埋め込み写像となる. □

写像 $i:\mathbb{P}\to\mathbb{Q}$ が稠密埋め込み写像であれば，$\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ からは同じジェネリック拡大が得られます. このことを，予備的な補題に続けて示します.

補題 7.10. $\mathbb{P}$ が M に属し G_1 と G_2 が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックであるとき，$G_1\subset G_2$ ならば $G_1=G_2$ である.

【証明】 仮に $p\in G_2$ なのに $p\notin G_1$ だとしたら，$G_1\cap\{p\}=0$ だから (補題 2.20 (a) を G_1 と $\{p\}$ に対して用いれば) $q\perp p$ をみたす G_1 の要素 q が存在する. しかし G_2 がフィルターである以上それは不可能である. □

定理 7.11. i と $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ が M に属し，i は $\mathbb{P}$ の $\mathbb{Q}$ への稠密埋め込み写像だとする. $\mathbb{P}$ の部分集合 G に対して，$\tilde{i}(G)=\{q\in\mathbb{Q}:\exists p\in G(i(p)\leq q)\}$ とおく.

(a) $\mathbb{Q}$ の部分集合 H が M 上 $\mathbb{Q}$-ジェネリックであれば $i^{-1}(H)$ は M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックで $H=\tilde{i}(i^{-1}(H))$ である.

(b) $\mathbb{P}$ の部分集合 G が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックであれば，$\tilde{i}(G)$ は M 上 $\mathbb{Q}$-ジェネリックで，$G=i^{-1}(\tilde{i}(G))$ である.

(c) 上記 (a) および (b) において $G=i^{-1}(H)$ とおけば (あるいは $H=\tilde{i}(G)$ と言っても同じことだが)，$M[G]=M[H]$.

【証明】 まず (a) の $i^{-1}(H)$ と (b) の $\tilde{i}(G)$ がジェネリックであることを確かめる. 稠密埋め込み写像は完備埋め込み写像でもあるので，(a) の $i^{-1}(H)$ がジェネリックであることは定理 7.5 から導かれる. (b) の $\tilde{i}(G)$ が $\mathbb{Q}$ のフィルターであることは簡単にわかる. これがジェネリックであることを示すために，M に属する $\mathbb{Q}$ の稠密部分集合 D を考える.

$$D^*=\{p\in\mathbb{P}:\exists q\in D(i(p)\leq q)\}$$

とおこう. ここで $D^*\cap G\neq 0$ なら $D\cap\tilde{i}(G)\neq 0$ となる. そして $D^*\cap G\neq 0$ であることは D^* が $\mathbb{P}$ において稠密であることから導けばよい. そのために，$\mathbb{P}$ の要素 p があったとしよう. $q\leq i(p)$ をみたす D の要素 q をとり，これに対し $i(p')\leq q$ を

みたす $\mathbb{P}$ の要素 p' をとろう．すると $i(p')\leq i(p)$ なので $i(p')$ と $i(p)$ は両立し，したがって p と p' も両立する．そこで $\mathbb{P}$ の要素 p'' を $p''\leq p$ かつ $p''\leq p'$ となるようにとれば，$(i(p'')\leq q\in D$ なので) $p''\in D^*$ かつ $p''\leq p$ となる．

次に (b) において $G=i^{-1}(\tilde{i}(G))$ となることを示そう．先ほどわかったとおり $\tilde{i}(G)$ は M 上 $\mathbb{Q}$-ジェネリックで，したがって $i^{-1}((\tilde{G}))$ は $\mathbb{P}$-ジェネリックである．定義から直ちに $G\subset i^{-1}(\tilde{i}(G))$ がわかるので，補題 7.10 からそれらが一致することが導かれる．(a) においても同様に，定義からすぐに $\tilde{i}(i^{-1}(H))\subset H$ が導かれ，補題 7.10 によって等号が成立する．

(c) については，(定理 7.5 において) $M[G]\subset M[H]$ がすでに示されている．同じ証明によって $M[H]\subset M[G]$ も示される．すなわち $H\in M[G]$ かつ $M\subset M[G]$ なので，$M[H]$ の最小性 (補題 2.9) によって $M[H]\subset M[G]$．□

このような写像 $i:\mathbb{P}\to\mathbb{Q}$ を使って，あらゆる $\mathbb{P}$-名前に同じ対象の $\mathbb{Q}$-名前を対応させることができます．

定義 7.12. i を $\mathbb{P}$ から $\mathbb{Q}$ への写像とするとき，$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ の要素 τ に関して再帰的に

$$i_*(\tau)=\{\langle i_*(\sigma),i(p)\rangle:\langle\sigma,p\rangle\in\tau\}$$

と定義する．□

このとき $i_*(\tau)\in\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ となることと i_* の定義が M に対して絶対的であることが簡単にわかります．そこで，i と $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ が M に属する場合は i_* は $M^{\mathbb{P}}$ から $M^{\mathbb{Q}}$ への写像になります．

補題 7.13. i と $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ が M に属し，i は $\mathbb{P}$ の $\mathbb{Q}$ への完備埋め込み写像だとする．このとき

(a) H が M 上 $\mathbb{Q}$-ジェネリックであれば，すべての $M^{\mathbb{P}}$ の要素 τ について $\mathrm{val}(\tau, i^{-1}(H))=\mathrm{val}(i_*(\tau),H)$ が成立する．

(b) $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ が ZFC のモデルに対して絶対的な式であれば，$p\Vdash_{\mathbb{P}}\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ のとき，かつそのときに限り $i(p)\Vdash_{\mathbb{Q}}\phi(i_*(\tau_1),\ldots,i_*(\tau_n))$．

(c) i が稠密埋め込み写像のときは，$\phi(x_1,\ldots,x_n)$ がどんな式でも，$p\Vdash_{\mathbb{P}}\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ のとき，かつそのときに限り $i(p)\Vdash_{\mathbb{Q}}\phi(i_*(\tau_1),\ldots,i_*(\tau_n))$．

【証明】 (a) は τ に関するストレートな帰納法であって，実際には H がジェネリックであることや i が完備埋め込み写像であることも必要ない．

(b) と (c) の左から右が導かれることを示すために，$p \Vdash_{\mathbb{P}} \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ と仮定する．M 上 $\mathbb{Q}$-ジェネリックな H で $i(p) \in H$ をみたすものが与えられたとしよう．このとき $p \in i^{-1}(H)$ なので，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ の定義によって

$$\phi(\mathrm{val}(\tau_1, i^{-1}(H)), \ldots, \mathrm{val}(\tau_n, i^{-1}(H)))^{M[i^{-1}(H)]}$$

が成立する．ここで $\mathrm{val}(\tau_i, i^{-1}(H)) = \mathrm{val}(i_*(\tau_i), H)$ かつ $M[i^{-1}(H)] \subset M[H]$ から，((b) の場合は ϕ の絶対性により，また (c) の場合は $M[i^{-1}(H)] = M[H]$ であることによって)

$$\phi(\mathrm{val}(i_*(\tau_1), H), \ldots, \mathrm{val}(i_*(\tau_n), H))^{M[H]}$$

が得られる．そこで $\Vdash_{\mathbb{Q}}$ の定義によって $i(p) \Vdash_{\mathbb{Q}} \phi(i_*(\tau_1), \ldots, i_*(\tau_n))$ となる．

今度は (b) と (c) の右から左が導かれることを示すために，$\neg(p \Vdash_{\mathbb{P}} \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n))$ と仮定する．このとき $p' \leq p$ をみたすある p' について $p' \Vdash_{\mathbb{P}} \neg\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ が成立するから，上の段落で示したように，$i(p') \Vdash_{\mathbb{Q}} \neg\phi(i_*(\tau_1), \ldots, i_*(\tau_n))$ となる．$i(p') \leq i(p)$ だから $\neg(i(p) \Vdash_{\mathbb{Q}} \phi(i_*(\tau_1), \ldots, i_*(\tau_n)))$ である．□

ここで少し話題を替えて，ブール代数値モデルについてみてみましょう．これからの議論は，第 II 章第 3 節で MA とブール代数を関連づけたときの議論と並行しています．

ブール代数 $\mathcal{B}$ に関しては，第 II 章第 3 節のように記号を濫用し，強制法の記号法で $\mathcal{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ と書くべきところで $\mathcal{B}$ と書きます．だから，$M^{\mathcal{B}}$ は本当は $\mathbb{P} = \mathcal{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ とおいた $M^{\mathbb{P}}$ のことですし，$p \Vdash \phi$ は $p \neq \mathbb{0}$ の場合に限って定義されています．ただし，$\mathbb{0} \Vdash \phi$ はつねに (無内容に) 真と定めれば，これまでの記号法との整合性は保たれます．というのも，$\mathbb{0}$ を含むフィルターが存在しないからです．

第 II 章の補題 3.3 では，いかなる半順序 $\mathbb{P}$ からも，ある完備ブール代数 $\mathcal{B}$ への稠密埋め込み写像 i が存在するということを示しました．この $\mathcal{B}$ は $\mathbb{P}$ の**完備化**と呼ばれるもので，同型の意味で一意的に定まります (第 II 章演習問題 18)．写像 i は一般に 1 対 1 写像になるとは限りません (第 II 章第 3 節と，この章の演習問題 C8 と D3 を見てください)．第 II 章補題 3.3 を M に相対化し定理 7.11 とともに用いると，M のどんなジェネリック拡大も，(完備ブール代数である)^M ような M の要素 $\mathcal{B}$ による M 上の強制法によって得られることがわかります．この事実が，強制法を定式化するもう一つ別のアプローチを示唆します．この章の第 2 節から第 4 節の一般論の展開にあたって，M 内の完備ブール代数という非常に特別な場

合だけを考えてもよいわけです．この場合，基本となるいろいろな定義がより単純になり，なにが行なわれているのか把握することも容易になります．そのうえで，第 5 節と第 6 節でやったように，一般にブール代数とは限らない個々の半順序 $\mathbb{P}$ を用いたいときは，$\mathbb{P}$ による強制法の代わりに ($\mathbb{P}$ の完備化)^M であるような M の要素 $\mathcal{B}$ によって強制すればよいのです．

本書でこのやり方を採用しなかった理由は，ブール代数を扱い慣れていることを強制法を理解する上での前提にしたくなかったからです．それに，強制法の一般理論は，ZF − P や，あるいはもっと弱い理論のモデルのジェネリック拡大を作るために簡単に手直しできるので (演習問題 B10)，モデル理論や再帰関数の理論に応用がききます ([Keisler 1973] や [Sacks 1971] を見てください)．完備化の構成には冪集合の公理が必要なので，これら弱い理論のモデルの上で用いるためには，強制法の一般理論を M における完備ブール代数の場合へ帰着させるわけにはいかないのです．

それでは，M の完備ブール代数による強制法ではどのように物事が単純になるか，実際にその概略を見ていきましょう．

定義 7.14. M の要素 $\mathcal{B}$ は (完備ブール代数である)^M とし，$\tau_1,\ldots,\tau_n$ が M に属するとする．このとき

$$[\![\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)]\!] = \bigvee\{p \in \mathcal{B} : p \Vdash \phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)\}$$

と定義する．この $[\![\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)]\!]$ を $\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ の**真理値**と呼ぶ．□

もちろん，ブール代数の完備性は絶対的ではないので，$\mathcal{B}$ が $\mathbf{V}$ では完備でないということも考えられます．じつのところ可算な完備ブール代数は有限なものしかありません (演習問題 F6)．それでも，強制関係 $\Vdash$ の定義可能性のおかげで集合 $\{p : p \Vdash \phi\}$ が M に属するため，上限も存在して，したがって $[\![\phi]\!]$ の定義は意味をもちます．

直観に訴えるために，ここで M 内に住んでいる人が**集合論のブール代数値モデル**を定義しているところを想像してもいいでしょう．そのモデルでは真理値 $[\![\phi]\!]$ (あるいは $[\![\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)]\!]$) は $\mathbb{1}$ (真) と $\mathbb{0}$ (偽) だけでなく，$\mathbb{1}$ でも $\mathbb{0}$ でもない中間の $\mathcal{B}$ における値をとることがありえます．もしも ϕ がすべての $\mathcal{B}$-ジェネリック拡大において真であれば，$\mathbb{1} \Vdash \phi$ なので $[\![\phi]\!] = \mathbb{1}$ となり，すべての $\mathcal{B}$-ジェネリック拡大で ϕ が偽なら $\mathbb{0} \Vdash \phi$ だけが成立するので $[\![\phi]\!] = \mathbb{0}$ となります．ところが，ϕ はある拡大では真だが別の拡大では偽になるという場合，$\mathbb{0} < [\![\phi]\!] < \mathbb{1}$ となります．

強制関係 $\Vdash$ の定義可能性のおかげで，本物の (2 値の) ジェネリックなフィルターを構成することなど決してできない M の住人たちも，ϕ のブール真理値を定義することはできるわけです．

次に述べる補題の (a) は，$[\![\phi]\!]$ は ϕ を強制する条件のうちで最大のものにほかならない，というものです．

補題 7.15. 定義 7.14 と同じ前提のもとで，

(a) $\forall p \in \mathcal{B}\,(p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \leftrightarrow p \leq [\![\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]\!])$.

(b) $[\![\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]\!] = [\![\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]\!] \wedge [\![\psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]\!]$.

(c) $[\![\neg\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]\!] = [\![\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]\!]'$.

(d) $[\![\exists x\, \phi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)]\!] = \bigvee\{[\![\phi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n)]\!] : \sigma \in M^{\mathcal{B}}\}$.

【証明】 以下では $\tau_1, \ldots, \tau_n$ をあらわに表記しない．

(a) について．$[\![\phi]\!]$ の定義により $p \Vdash \phi$ は $p \leq [\![\phi]\!]$ を導く．逆をいうために $p \leq [\![\phi]\!]$ だとしよう．$p \Vdash \phi$ でないとしたら $q \leq p$ をみたすある $\mathbb{0}$ でない q について $q \Vdash \neg\phi$ となる．ところがそのような q については $\forall r(r \Vdash \phi \to q \wedge r = \mathbb{0})$ となるため $q \wedge [\![\phi]\!] = \mathbb{0}$. これは $\mathbb{0} < q \leq p \leq [\![\phi]\!]$ という仮定と矛盾する．

(b) から (d) までは，(a) と ϕ の基本的な特性を使って解ける簡単な演習問題である．例として (b) を示す．(a) より $[\![\phi]\!] \Vdash \phi$ であり，また $[\![\phi]\!] \wedge [\![\psi]\!] \leq [\![\phi]\!]$ なので

$$[\![\phi]\!] \wedge [\![\psi]\!] \Vdash \phi.$$

同様にして $[\![\phi]\!] \wedge [\![\psi]\!] \Vdash \psi$ でもあるから $[\![\phi]\!] \wedge [\![\psi]\!] \Vdash \phi \wedge \psi$ となり，したがって

$$[\![\phi]\!] \wedge [\![\psi]\!] \leq [\![\phi \wedge \psi]\!]$$

が成立する．次に，$[\![\phi \wedge \psi]\!] \Vdash \phi \wedge \psi$ であって $\mathrm{ZFC} \vdash \phi \wedge \psi \to \phi$ であることから (補題 4.5 により) $[\![\phi \wedge \psi]\!] \Vdash \phi$ が成立する．したがって $[\![\phi \wedge \psi]\!] \leq [\![\phi]\!]$. 同様にして $[\![\phi \wedge \psi]\!] \leq [\![\psi]\!]$ でもあるから，

$$[\![\phi \wedge \psi]\!] \leq [\![\phi]\!] \wedge [\![\psi]\!]. \ \square$$

補題 7.15 の (b) から (d) までは，ブール真理値の計算にあたっては，各々の論理演算がそれに対応するブール代数の演算に鏡に写したようにそっくり対応することを意味しています．また補題 7.15 (a) によれば，$[\![\ldots]\!]$ を使って $\Vdash$ を定義することもできるわけです．

補題 7.15 によって示唆されることですが，第 3 節の $\Vdash^*$ の扱いを実質的に単純化できます．完備ブール代数 $\mathcal{B}$ が与えられたとして，$\Vdash^*$ を

$$p \Vdash^* \phi(\tau_1,\ldots,\tau_n) \leftrightarrow p \leq [\![\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)]\!]^*$$

という定義によって導入される補助概念と考えます．つまり $[\![\ldots]\!]^*$ のほうを基本的な概念とします．その定義は 3.3 での $\Vdash^*$ の定義と似たものですが，こちらのほうがずっと簡単です．帰納法の $\wedge$ と $\neg$ と $\exists$ に対応するステップでは，補題 7.15 の (b) から (d) までを定義として用います．たとえば $[\![\neg\phi]\!]^*$ は $([\![\phi]\!]^*)'$ のことです．原子式に対する二つの帰納的な条項も簡単になります (演習問題 D7)．$[\![\ldots]\!]^*$ の定義全体にわたって論理演算がブール演算に自然な形で反映されていて，「... 以下で稠密」といった補助概念を使わずに済ますことができます．$\Vdash^*$ と同様 $[\![\ldots]\!]^*$ も $\mathbf{V}$ で定義されていますが，ジェネリック拡大を論じるにあたっては，(完備ブール代数である)^M ような M の要素 $\mathcal{B}$ を用い，定義を M に相対化します．

ブール代数値モデルを用いれば，《都合のよい名前》(定義 5.11) の扱いも簡単になります．便宜上，名前の要素の第二の成分として $\mathbb{0}$ も認めておきます．つまり $\tau \in \mathbf{V}^{\mathcal{B}} \leftrightarrow \tau \subset \mathbf{V}^{\mathcal{B}} \times \mathcal{B}$ ということですが，$\mathcal{B} \setminus \{\mathbb{0}\}$ による強制法という観点からいうと，右辺は $\tau \subset \mathbf{V}^{\mathcal{B}} \times (\mathcal{B} \setminus \{\mathbb{0}\})$ となるはずです．このように変更しても第 2 節から第 4 節までの話の展開に本質的な違いは出てきません．それに，$\mathcal{B}$ のどの要素も公平に扱うほうがより自然でしょう．さて，

$$\tau = \bigcup \{\, \{\pi\} \times A_\pi : \mathrm{dom}(\sigma) \,\}$$

を σ の部分集合の一つの都合のよい名前だとして $b_\pi = \bigvee A_\pi$ (特に $A_\pi = 0$ のときは $b_\pi = \mathbb{0}$) とおき，$\tilde{\tau} = \{\, \langle \pi, b_\pi \rangle : \pi \in \mathrm{dom}(\tau) \,\}$ としましょう．すると $\tilde{\tau}$ は $\mathrm{dom}(\sigma)$ から $\mathcal{B}$ への関数になります．そのような $\tilde{\tau}$ を**とても都合のよい名前**と呼びましょう．このとき $[\![\tau = \tilde{\tau}]\!] = \mathbb{1}$ は簡単にわかるので，補題 5.12 に対応する事実として，$M[G]$ にあらわれる σ の部分集合はすべて，なんらかのとても都合のよい名前によって表示できます．そのような名前を使えば，いささか場当たり的に反鎖を持ち出す必要もなくなり，そのうえ，$M[G]$ の要素とはいったい《なんなのか》が，よりいっそう明瞭になります．たとえば，$\check{\omega}$ の部分集合のとても都合のよい名前は $\{\check{n} : n \in \omega\}$ から $\mathcal{B}$ への関数なので $f : \omega \to \mathcal{B}$ の形の関数と思ってよいわけですが，この関数 f は ω のブール代数値部分集合の特徴関数と考えることができます．

その他に，完備埋め込み写像の概念 (定義 7.11) も簡単になります．完備埋め込み写像の概念を完備ブール代数に制限した場合，一見すると場当たり的に見える

あの定義ではなく，完備単射準同型写像というもっと自然な概念に落ち着きます (演習問題 C7).

このように，扱う半順序を M の完備ブール代数だけに制限するというアプローチでは，応用に際して一般の半順序を完備ブール代数に埋め込む手順が余分に必要になるものの，抽象理論としてはかなり簡単でもっと自然なものになります.

ブール代数値モデルについては引続き第 9 節で扱います.

§8　その他の結果

この節では，前節までに説明できなかった技術的な結果をいくつか集め，強制法の用例を三つ追加します．ここでもこれまで同様 M は集合論のあらかじめ決められたある c.t.m. です.

補題 8.1. M において次のことを仮定しよう：A は $\mathbb{P}$ の反鎖とし，A の各要素 q に対して $\mathbb{P}$-名前 σ_q が与えられているとする．このとき，$M^{\mathbb{P}}$ の要素 π で，A のすべての要素 q について $q \Vdash \pi = \sigma_q$ となるものが存在する.

【証明】 M において

$$\pi = \bigcup_{q \in A} \{ \langle \tau, r \rangle : (r \leq q) \wedge (r \Vdash \tau \in \sigma_q) \wedge (\tau \in \mathrm{dom}(\sigma_q)) \}$$

と定めよう．A の要素 q と，q を含むジェネリック集合 G があったとする．このとき $\pi_G = \mathrm{val}(\sigma_q, G)$ となることを示そう.

π_G の要素はどれも τ_G の形で，しかもこの τ は G のある要素 r について $\langle \tau, r \rangle \in \pi$ をみたす．このとき，A のある要素 q' について $r \leq q'$, $r \Vdash \tau \in \sigma_{q'}$. ところが A が反鎖であることと $q \in G$ であることから，$q' = q$ である．そこで $r \Vdash \tau \in \sigma_q$ であって，$\tau_G \in \mathrm{val}(\sigma_q, G)$ となる.

$\mathrm{val}(\sigma_q, G)$ の要素はどれも $\mathrm{dom}(\sigma_q)$ のなんらかの要素 τ に対する τ_G の形である．$p \Vdash \tau \in \sigma_q$ となる G の要素 p を考え，G に属する p と q の共通拡大 r をとる．すると $\langle \tau, r \rangle \in \pi$ だから $\tau_G \in \pi_G$ となる. □

このあとの結果の動機づけのため次のことに注意しましょう．$M[G]$ が ZFC をみたすことを証明する過程で，存在命題を検証するときにはいつでも，存在の証拠となる対象の名前を G と独立に作ってきました．たとえば，対の公理を検証するにあたっては，$M^{\mathbb{P}}$ の要素 σ と τ に対して $\mathbb{1} \Vdash \exists x (\sigma \in x \wedge \tau \in x)$ を確かめれば十

分だったわけで，これは言い替えると，任意のジェネリック集合 G に対して，ある π が $\sigma_G \in \pi_G \wedge \tau_G \in \pi_G$ をみたすことを言えばよかったのです．しかし実際は，$\mathbb{1} \Vdash (\sigma \in \pi \wedge \tau \in \pi)$ をみたす π すなわち $\mathrm{up}(\sigma, \tau)$ (定義 2.16) を G とは独立に見つけることができました．これが可能であるという事実は，**極大原理**と呼ばれるもっと一般的な次の事実の一部分です．

定理 8.2. $\mathbb{P} \in M$, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ かつ $p \Vdash \exists x \phi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ とするとき，$M^{\mathbb{P}}$ のある要素 π について $p \Vdash \phi(\pi, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ となる．

【証明】 以下 $\tau_1, \ldots, \tau_n$ は書かない．M 内でツォルンの補題を使うことにして，次の条件をみたす M の要素 A を考える．

(1) A は $\mathbb{P}$ の反鎖である．

(2) $\forall q \in A\, (q \leq p \wedge \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}\, (q \Vdash \phi(\sigma)))$.

(3) A は条件 (1) と (2) をみたす集合のうちで極大である．

M 内で AC を用い，A の各要素 q に対して $M^{\mathbb{P}}$ の要素 σ_q を $q \Vdash \phi(\sigma_q)$ をみたすように選ぶ．次に補題 8.1 によって，$M^{\mathbb{P}}$ の要素 π を，A のすべての要素 q について $q \Vdash \pi = \sigma_q$ をみたすようにとる．すると，A の各要素 q について $q \Vdash (\phi(\sigma_q) \wedge \pi = \sigma_q)$．したがって $q \Vdash \phi(\pi)$ となる．

そこで $p \Vdash \phi(\pi)$ を示そう．そうでないときは $r \leq p$ かつ $r \Vdash \neg\phi(\pi)$ をみたす要素 r がとれる．$p \Vdash \exists x\, \phi(x)$ が成立しているので，(系 3.7 により) 集合 $\{q : \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}(q \Vdash \phi(\sigma))\}$ は p 以下で稠密であり，$q_0 \leq r$ と $\exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}(q_0 \Vdash \phi(\sigma))$ をみたす q_0 がとれる．A の各要素 q について，$q \Vdash \phi(\pi)$ と $q_0 \Vdash \neg\phi(\pi)$ から $q \perp q_0$ である．そこで，$A \cup \{q_0\}$ は上記の条件 (1) と (2) をみたすが，これは A が極大であることと矛盾する．□

定理 8.2 の意味はブール代数値モデルの枠組み (第 7 節参照) で考えるのがわかりよいでしょう．補題 7.5 によれば，

$$[\![\exists x\, \phi(x)]\!] = \bigvee \{ [\![\phi(\sigma)]\!] : \sigma \in M^{\mathbb{P}} \}$$

ですが，定理 8.2 が言っているのは，ここで $M^{\mathbb{P}}$ のある要素 σ について $[\![\phi(\sigma)]\!]$ が最大値 $[\![\exists x\, \phi(x)]\!]$ を実際にとるということです．

ここで話題を変えて，強制法の応用例をいくつか提示します．

構成可能的集合の世界 $\mathbf{L}$ で成立する組み合わせ論的原理の多くは，強制法によってその無矛盾性を示せることが知られています．それらのうちでもっとも簡単

なのが ◊ (第 II 章定義 7.1) です．この議論では可算な部分関数を利用するのですが，第 6 節の方法とはまた一味違います．

定理 8.3. $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_1, 2, \omega_1)^M$ とおく．G が M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合のとき，$\mathcal{P}(\omega) \cap M = \mathcal{P}(\omega) \cap M[G]$ かつ $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$ であり，$M[G]$ において ◊ が成立する．

【証明】 M において $\mathbb{P}$ が ω_1-閉なので，最初の二つの式は (定理 6.14 と系 6.15 によって) 明らかである．◊ についての議論では，$\mathbb{P}$ の代わりにそれと M において同型な別の半順序を用いるほうが，見通しがよくなる．$I = \{\langle\alpha,\xi\rangle : \xi < \alpha < \omega_1^M\}$ として $\mathbb{Q} = \mathrm{Fn}(I, 2, \omega_1)^M$ とおこう．M において $|I| = \omega_1$ なので，$\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ は M において同型となる．したがって，(系 7.6 によれば) M 上の $\mathbb{Q}$-ジェネリック集合 G に対して，◊ が $M[G]$ において成立することを確かめればよい．

A を I から 2 への任意の関数とするとき，α から 2 への関数 A_α を $A_\alpha(\xi) = A(\alpha, \xi)$ によって (ω_1^M 未満の各 α に対して) 定義する．そして，G が M 上の $\mathbb{Q}$-ジェネリック集合なら $\bigcup G$ は I から 2 への関数になる．そこで，集合をその特徴関数と同一視して言えば $\langle(\bigcup G)_\alpha : \alpha < \omega_1^M\rangle$ が $M[G]$ において ◊-列になっていることを示して，$(\Diamond)^{M[G]}$ を証明しよう．言い替えると，B が $M[G]$ に属する ω_1^M から 2 への関数であるとして，集合 $\{\alpha : B \restriction \alpha = (\bigcup G)_\alpha\}$ が $M[G]$ において定常集合になることを示す．これが成立していないと仮定しよう．すると，(B の) 名前 τ と (ある c.u.b. 集合の) 名前 σ が $M^{\mathbb{Q}}$ に存在し，G のある要素 p について

$$p \Vdash [(\tau \subset \omega_1) \wedge (\sigma \subset \omega_1) \wedge (\sigma \text{ は c.u.b.}) \wedge \forall\alpha \in \sigma\, (\tau \restriction \alpha \neq (\textstyle\bigcup \Gamma)_\alpha)] \qquad (*)$$

となる．ここで $\Gamma = \{\langle\check{q}, q\rangle : q \in \mathbb{Q}\}$ で，これは $\mathbb{Q}$-ジェネリックなフィルターに対する $\mathbb{Q}$-名前である (定義 2.12)．以後は B と G のことは忘れて，(*) から直接に矛盾を導くことにしよう．

このパラグラフでは M 内で考えているとする．$\mathbb{Q}$ の要素 q に対して，$\mathrm{dom}(q) \subset \{\langle\alpha,\xi\rangle : \xi < \alpha < \beta\}$ をみたす β のうち最小のものを $\mathrm{supt}(q)$ と書こう．自然数 n に対する p_n, β_n, δ_n, b_n を，次の条件をみたすように帰納法によって定めよう．

(1) $p_0 = p$.

(2) $\beta_n = \mathrm{supt}(p_n)$.

(3) $\delta_n > \beta_n$.

(4) $p_{n+1} \leq p_n$

(5) $p_{n+1} \Vdash \check{\delta}_n \in \sigma$.

(6) $\mathrm{supt}(p_{n+1})>\delta_n$.

(7) $b_n:\beta_n\to 2$ かつ $p_{n+1}\Vdash(\tau\restriction\check{\beta}_n=\check{b}_n)$.

この帰納法が実行できることを確かめておこう．p_n が与えられれば β_n は決まる．$p_n\le p$ であるから $p_n\Vdash(\sigma$ は c.u.b.), $p_n\Vdash\exists x\in\check{\omega}_1(x>\check{\beta}_n\wedge x\in\sigma)$ である．そこで，系 3.7 (d) によって，ある q と δ_n について $q\le p_n$ と $\delta_n<\omega_1$ と $q\Vdash(\check{\delta}_n>\check{\beta}_n\wedge\check{\delta}\in\sigma)$ が成立し，このとき $\delta_n>\beta_n$ かつ $q\Vdash\check{\delta}_n\in\sigma$．$r$ を，q の拡大で $\mathrm{supt}(r)>\delta_n$ となるものとしよう．最後に (7) を扱うために $F={}^{(\beta_n)}2$ とおく．すると，(定理 6.14 によれば) ω_1-閉な半順序が β_n から 2 への関数を新たに付け加えることはないので，$r\Vdash\tau\restriction\beta_n\in\check{F}$ である．そこで，r のある拡大 p_{n+1} と F のある要素 b_n について $p_{n+1}\Vdash\tau\restriction\check{\beta}_n=\check{b}_n$ となる (系 3.7 (d))．

引続き M 内で考える．$\beta_0<\delta_0<\beta_1<\delta_1<\ldots$ という列が得られたので

$$\gamma=\sup\{\beta_n:n\in\omega\}=\sup\{\delta_n:n\in\omega\}$$

とおく．$p_\omega=\bigcup_n p_n$ とおくと $\mathrm{supt}(p_\omega)=\gamma$ である．すべての自然数 n について $p_\omega\le p_n$ なので $p_\omega\Vdash(\tau\restriction\check{\beta}_n=\check{b}_n)$ である．したがってすべての b_n が定義域の共通部分で互いに一致し，$b_\omega=\bigcup_n b_n$ とおけばこれは γ から 2 への関数となる．しかもこのとき $p_\omega\Vdash(\tau\restriction\gamma=\check{\beta}_n)$ である．ここで，γ 未満のどの ξ に対しても $\langle\gamma,\xi\rangle$ という対は $\mathrm{dom}(p_\omega)$ に入っていないので，γ 未満のすべての ξ に対して $s(\gamma,\xi)=b_\omega(\xi)$ となる s へ p_ω を拡大できる．このとき $s\Vdash[(\bigcup\Gamma)_{\check{\gamma}}=\check{b}_\omega]$, したがって $s\Vdash[\tau\restriction\gamma=(\bigcup\Gamma)_{\check{\gamma}}]$ となる．しかしいっぽうで $s\Vdash(\sigma$ は閉) であり，すべての自然数 n について $s\Vdash(\check{\delta}_n\in\sigma)$ だから $s\Vdash(\check{\gamma}\in\sigma)$ となる．したがって

$$s\Vdash[\exists\alpha\in\sigma(\tau\restriction\alpha=(\bigcup\Gamma)_\alpha)]$$

となるが，$s\le p$ なのでこれは矛盾である．□

さて，◊ は CH を導くので，CH は M において成立しているかどうかにかかわらず $M[G]$ において成立します．ということは，もしも M において CH が成立していないなら，M の基数 $(2^\omega)^M$ は $M[G]$ では潰されているわけです．

定理 8.3 の証明の方法を $\Diamond^+$ の無矛盾性の証明に用いることはできません．というのも，$M[G]$ で $\Diamond^+$ が成り立たないこともあるからです (第 VIII 章演習問題 J5 から J7)．ただし，M を注意深く選べば $M[G]$ で $\Diamond^+$ が成立します．たとえば M が $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ をみたしていれば $M[G]$ は $\exists X\subset\omega_1(\mathbf{V}=\mathbf{L}(X))$ をみたし，この命題からは $\Diamond^+$ が導かれます (第 VI 章演習問題 8)．もちろん，M がすでに $\Diamond^+$ をみた

しているのですから，新しいものはなにも得られません．定理 8.3 の精神に則(のっと)って $\Diamond^+$ の無矛盾性を強制法で証明することもできますが，それにはずっと手の込んだ半順序を使わなければなりません (演習問題 H18 から H20).

また，$\Diamond$ から ω_1-ススリン木があることが導かれるので，定理 8.3 の $M[G]$ の中にも ω_1-ススリン木が存在することになります．歴史的な経緯としては，ジェネリック拡大にススリン木を付け加えられることをイェックが証明したのが先で，後に $\Diamond$ が取り沙汰されるようになってから，彼の論法が定理 8.3 を得るために焼き直されたのです．元々のイェックの論法はいま見ても興味深いものです．というのも，κ に対する $\Diamond$ の類似物から κ-ススリン木は出てこないのですが，それでも，彼の方法を一般化することで，M の任意の正則基数 κ に対する κ-ススリン木を付け加えられるからです (演習問題 H11 から H14).

ススリン木を壊すことも簡単です．実際，ススリン木を逆さまに立てれば，それ自身を壊す半順序になります．

定理 8.4. κ を M の不可算正則基数，T を M での κ-ススリン木としよう．このとき M に属する半順序 $\mathbb{P}$ が存在して，$\mathbb{P}$ は (κ-c.c. をみたし)^M, 共終数を保存し，しかも M 上の任意の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合 G に対して次のことが成立する.

(1) $M[G]$ では T は κ-ススリン木ではない.

(2) $\alpha<\kappa$, $B\in M$ のとき ${}^{\alpha}B\cap M[G]={}^{\alpha}B\cap M$.

【証明】 まず MA(ω_1) から ω_1-ススリン木の不存在を導いた (第 II 章補題 5.14 の) 証明をまねることから始める．M の中で考えて，T' を T のうまく刈り込まれた κ-部分木としよう (第 II 章定義 5.10 と補題 5.11)．T' の木としての順序づけを $\lhd$ とし，T' に $\lhd$ の逆の順序を与えたものを $\mathbb{P}$ とする．すなわち $p<_{\mathbb{P}}q$ とは $q\lhd p$ のことだとする．このとき $\mathbb{P}$ は一つの半順序であり，木 T' の最小要素が $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ となる．T' がうまく刈り込まれた木であることから，κ 未満の順序数 α に対して集合 $D_\alpha=\{p:\mathrm{ht}(p,T')>\alpha\}$ は $\mathbb{P}$ において稠密である．また，G が $\mathbb{P}$ のフィルターであれば，G は T' の鎖でもある．いま G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とすると，κ 未満のすべての順序数 α について $G\cap D_\alpha\neq 0$ となるので，κ 未満のどんな高さをもつ T' の要素も G は含んでいる．だから T' は $M[G]$ においてアロンシャイン木にすらなっていない.

M において T' は κ-ススリン木なので，($\mathbb{P}$ は κ-c.c. をみたし)^M, したがって $\mathbb{P}$

は κ 以上の共終数を保存する (補題 6.9)．あとは (2) をチェックできればよい．というのも，$\mathbb{P}$ が κ 以下の共終数を保存することが (2) から (ちょうど系 6.15 を定理 6.14 から導いた証明と同様にして) 導かれるから．

(2) を証明するために，f を κ 未満の順序数 α から M の要素 B への写像 $f:\alpha\to B$ とし，$f\in M[G]$ だったとする．$f=\tau_G$ と表示できたとしよう．α 未満の各順序数 ξ に対して G の要素 p_ξ を $p_\xi\Vdash\tau(\check{\xi})=(f(\xi))\check{}$ となるようにとれる．しかも列 $\langle p_\xi:\xi<\alpha\rangle$ が $M[G]$ に属するようにできる．なぜなら，$M[G]$ は AC をみたし，集合 $\{\langle p,\xi,y\rangle : p\in\mathbb{P}\wedge y\in B\wedge\xi\in\alpha\wedge p\Vdash\tau(\check{\xi})=\check{y}\}$ は M に属し，したがって $M[G]$ にも属するから．さて G は集合 $\{p_\xi:\xi<\alpha\}$ を含む鎖で $M[G]$ において κ は正則基数なので，T' の順序ですべての p_ξ の上に位置する要素 q を G は含む．つまり $\forall\xi<\alpha(q\le p_\xi)$ となる．このとき α 未満のすべての順序数 ξ について $q\Vdash\tau(\check{\xi})=(f(\xi))\check{}$ となるので

$$f=\{\langle\xi,y\rangle\in\alpha\times B : q\Vdash\tau(\check{\xi})=\check{y}\},$$

したがって $f\in M$ である．□

この定理 8.4 が，部分関数を用いない半順序による強制法のはじめての応用例です．もっとも，第 II 章で MA を用いるにあたって，これとは別のそのような半順序をすでに使っています．また，これも定理 8.4 によって例示されていることですが，この定理の条項 (2) は半順序 $\mathbb{P}$ が κ-閉でなくても成立することがあります．うまく刈り込まれた κ-ススリン木は決して κ-閉になりません．仮に κ-閉になったとしたら，帰納法を用いてその木を通る道が選び出せるはずだからです．任意の $\mathbb{P}$ について，$M[G]$ で定理 8.4 (2) が成り立つことと M において $\mathbb{P}$ が κ-ベールであることとが同値になります (演習問題 B4)．κ-ススリン木が κ-ベールであることは強制法に訴えず直接証明することもできます (演習問題 H16) が，定理 8.4 (2) のやり方のほうがいくぶん簡単です．

定理 8.4 が簡単に証明できたからといって，ススリンの仮説 SH も簡単に証明できるだろうと早合点しないようにしましょう．この場合，M 内のすべての ω_1-ススリン木を壊すために強制法を超限回反復する必要があります．第 VIII 章では MA＋¬CH の無矛盾性，つまり SH の無矛盾性を証明するために，反復強制法を用います．

定理 8.4 から，${}^{\omega}2$ を拡大させることなく ω_1-ススリン木を一つ壊すことができるとわかったので，SH＋CH も無矛盾であろうと期待してよさそうです．実際そ

うですが，そのための反復強制法 (イェンセンによるもので，[Devlin–Johnsbråten 1974] に書かれています) は，この本で扱っているものよりずっと難しいのです．

κ が ω_1 より大きいとき，すべての κ-ススリン木を壊すことはいっそう難しくなるので，κ-ススリン仮説の無矛盾性をめぐってはまだ多くの未解決問題が残っています．そのなかでも特筆すべきなのは，GCH$+\omega_2$-SH が無矛盾かどうか，というものです．定理 8.4 と比較してかんがえればこれは無矛盾である《はず》です．しかし [Gregory 1976] によれば，GCH$+\omega_2$-SH から ω_2 が $\mathbf{L}$ においてマーロ基数になることが導かれます．この他の κ-SH をめぐる話については第 II 章第 5 節を見てください．

強制法の次の例の導入のために，ここで問うてみます：$\omega_1^{M[G]}$ はなんでしょうか? $\omega_1^{M[G]}$ は M の正則基数でなければなりません．これから，M の ω 以外の正則基数ならどれでも，$\mathbb{P}$ を具合よく定義することで $\omega_1^{M[G]}$ にできます．はじめに，後続型基数の場合はすでに片付いているという点に注意しておきましょう．

補題 8.5. M において λ が無限基数で $\kappa=\lambda^+$ だとする．$\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(\omega,\lambda)$ として G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とすれば，$\omega_1^{M[G]}=\kappa$ である．

【証明】 α が κ より小さな順序数であれば，λ から α の上への関数が M に存在する．そして $\bigcup G$ が ω から λ の上への関数だから (α は可算である)$^{M[G]}$．そこで $\omega_1^{M[G]}\geq\kappa$ となる．ところが $(|\mathbb{P}|=\lambda)^M$ なので ($\mathbb{P}$ は κ-c.c. をみたし)^M，したがって $\mathbb{P}$ は κ 以上の基数を保存する．そこで κ は $M[G]$ においても依然として基数であり，$\omega_1^{M[G]}=\kappa$ が成立する．□

さて κ が M において弱到達不能基数であるときには，これとはちょっと違うやり方で有限部分関数による強制を行なって，κ を保存しながら κ より下のすべての順序数を潰します．κ 未満のすべての順序数 α に対して関数 $f_\alpha:\omega\to\alpha$ をつけ加えたいわけですが，記述の便宜上 $\langle f_\alpha:\alpha<\kappa\rangle$ を $\kappa\times\omega$ を定義域とする一つの関数によってコード化します．

定義 8.6. 順序数 κ に対する**レヴィ式潰し半順序** $\mathrm{Lv}(\kappa)$ とは

$$\{p:|p|<\omega\wedge p \text{ は関数}\wedge\mathrm{dom}(p)\subset\kappa\times\omega\wedge\forall\langle\alpha,n\rangle\in\mathrm{dom}(p)\,(p(\alpha,n)<\alpha)\}$$

のことである．$\mathrm{Lv}(\kappa)$ を包含関係の逆で順序づけする．つまり $p\leq q$ とは $q\subset p$ のことである．□

これから，κ が M の不可算正則基数であれば $\mathrm{Lv}(\kappa)$ による強制の結果 $\kappa=\omega_1^{M[G]}$ となることを証明しましょう．ただし，後続型基数の場合はもっと簡単な補題 8.5 の論法で扱えるので，ふつうはこのやり方が興味を引くのは κ が弱到達不能基数の場合だけです．

補題 8.7. κ が不可算な正則基数ならば，$\mathrm{Lv}(\kappa)$ は κ-c.c. をみたす．

【証明】 κ 未満の各順序数 μ に対して p_μ が対応しているとしよう．Δ-システム補題 (第 II 章定理 1.6) により $|B|=\kappa$ をみたす κ のある部分集合 B が存在し，集合 $\{\mathrm{dom}(p_\mu):\mu\in B\}$ が Δ-システムをなす．この Δ-システムの根を r としよう．$p_\mu\restriction r$ の可能性は全部で κ 個未満で κ は正則基数なので，$|C|=\kappa$ をみたす B の部分集合 C が存在して，C に属するすべての μ について $p_\mu\restriction r$ が同じものになる．このとき C の要素 μ に対応する p_μ はすべて互いに両立する．したがって，最初に与えられた p_μ の全部が互いに両立不能ということはありえない．□

定理 8.8. M において κ が不可算な正則基数，G を M 上の $\mathrm{Lv}(\kappa)$-ジェネリック集合とする．このとき $\kappa=\omega_1^{M[G]}$.

【証明】 M において補題 8.7 を用いると，$(\mathrm{Lv}(\kappa)$ は κ-c.c. をみたす$)^M$ ことがわかる．したがって κ は $M[G]$ においてもやはり基数である．ところが，$0<\alpha<\kappa$ であるような α については，集合

$$(\bigcup G)_\alpha=\{\langle n,\xi\rangle:\langle\alpha,n,\xi\rangle\in\bigcup G\}$$

が ω から α の上への関数になることが，通常の稠密集合の論法で示される．したがって α は $M[G]$ においては可算順序数である．□

[Solovay 1970] では，$\mathbb{R}$ のすべての部分集合がルベーグ可測集合になる ZF のモデルを得るためにレヴィ式潰し半順序を使っています．もっと詳しくいうと，出発点として κ が M において強到達不能基数であるとします．$M[G]$ においては，$\mathbb{R}$ の部分集合 X が (第 V 章演習問題 9 で定義した) $\mathbf{HOD}(\mathcal{P}(\omega))$ に属すれば X がルベーグ可測である，という言明が成立しています．もちろん $M[G]$ は AC をみたすので不可測集合も存在しますが，$M[G]$ の中で定義された内部モデル $\mathbf{HOD}(\mathcal{P}(\omega))$ は ZF + ≪実数の集合はすべてルベーグ可測である≫ をみたします．いまのところ，ZF + ≪実数の集合はすべてルベーグ可測である≫ の無矛盾性を Con(ZFC) だけから証明できるかどうかわかっていません．

原注：(校正時の追記) 最近のシェラハの結果により，これは不可能です.

訳注：シェラハは 1984 年に公表された論文 [Shelah 1984] において，ZF＋《実数の集合はすべてルベーグ可測である》から，ω_1 が $\mathbf{L}$ において到達不能基数となることを導きました．レゾニエの論文 [Raisonnier 1984] にはこの事実のより簡明な証明が呈示されています.

レヴィ式潰し半順序はクレパの仮説 KH (第 II 章定義 5.16) にも関係しています.

系 8.9. M において κ が強到達不能基数になっているとし，G を M 上の $\mathrm{Lv}(\kappa)$-ジェネリック集合とする．このとき $(\mathrm{KH})^{M[G]}$ が成立する.

【証明】 M において T を高さ κ の完全 2 分木としよう．κ 以上の基数が潰されることはないし，M において T は κ^+ 本以上の道をもつので，(T は ω_1-クレパ木である)$^{M[G]}$. □

もっとも，KH のモデルを作るためなら到達不能基数を使う必要はありません．$\mathrm{Con(ZFC)} \to \mathrm{Con(ZFC+KH)}$ を証明するには，KH は $\diamondsuit^+$ から導かれるため $\mathbf{L}$ において成立しているという事実 (第 II 章系 7.11 と第 VI 章定理 5.2) を用いるか，あるいは，到達不能基数を必要としない別の種類の強制法の論法を用いることができます (演習問題 H19 を見てください).

皮肉なことに，¬KH のモデルを構成するのに $\mathrm{Lv}(\kappa)$ のちょっとした変形が使えます．今度も κ を M の強到達不能基数としますが，今度は (M において) 可算な部分関数を用いて強制して，ω_1^M から κ 未満のすべての順序数 α の上への関数をつけ加えます．定理 8.3 の論法を少し手直しすれば，$\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$ と $\kappa = \omega_2^{M[G]}$ が簡単に証明できます．しかし $(\neg\mathrm{KH})^{M[G]}$ を証明するには反復強制法の技法が必要なので，この半順序をめぐる議論の続きは第 VIII 章第 3 節まで延期します.

KH と違い，¬KH には到達不能基数が必要です．というのは，¬KH から ω_2 が $\mathbf{L}$ において到達不能基数になることが導かれるからです (演習問題 B9).

§9　補遺：他のアプローチと歴史についてのコメント

強制法の解説には複数のやり方があります．それらからはまったく同等の無矛盾性証明が得られますが，メタ数学的な発想の部分に違いがあります．そうしたさまざまなアプローチをここで概観しましょう.

第一のアプローチ：推移的可算モデルを使う． このアプローチではモデルとその拡大をどちらかといえばストレートに数学らしく扱えるので，数学基礎論の専門家以外の人たちに好まれる方法です．モデルのジェネリック拡大は代数学でいう体の拡大としばしば対比されます．体の拡大でも，拡大体の要素を表す名前 (基礎体上の多項式) が用いられるからです．述べられた手順で実際に事がうまく運ぶことを確かめるために第 3 節と第 4 節で議論したような退屈な詳細は，いつでもさっと飛ばすか無視することが可能です．ZFC の内部で ZFC の c.t.m. を作れないという論理学上の悩みの種も，同様に無視できます．こうした悩みの種には，これから述べる三つの方法のいずれかで対処できます．

(1a) 本書のアプローチ．ZFC＋¬CH なりなんなりの有限個の公理のリスト $\phi_1,\ldots,\phi_n$ が与えられたとして，$\phi_1,\ldots,\phi_n$ の c.t.m. があることを ZFC で証明する．この手順には，前述のリストとは別に ZFC の公理のリスト $\psi_1,\ldots,\psi_m$ を (メタ理論上で) みつけて，次に $\psi_1,\ldots,\psi_m$ の c.t.m. M が与えられれば $\phi_1,\ldots,\phi_n$ をみたす M のジェネリック拡大 $M[G]$ が存在することを ZFC で証明する，という段階が含まれます．この $\psi_1,\ldots,\psi_m$ を見つける方法が，素直で完全に実効的で有限主義的観点からも妥当でありながら，同時にうんざりするほど面倒でもあるというのが，この論法のエレガントでない点です．$\phi_1,\ldots,\phi_n$ が $M[G]$ において成立することを検証するために**見るからに**必要そうな公理 (たとえば，ϕ_1 が冪集合の公理だったら，$\psi_1,\ldots,\psi_m$ のうちにも冪集合の公理を入れておく必要があります) の他にも，有限性や半順序といったいろいろな概念が M に対して絶対的であることを検証するための公理，いろいろの数学的命題，たとえば Δ-システム補題なりなんなりが M において成立していることを示すために必要な公理も，$\psi_1,\ldots,\psi_m$ にリストアップしておかなければなりません．もちろん

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})\rightarrow\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\neg\mathrm{CH})$$

という相対的無矛盾性証明のためには，$\psi_1,\ldots,\psi_m$ を実際に書き下す必要はありません．証明を読む人が，$\psi_1,\ldots,\psi_m$ を見つけることは可能だとわかればそれで十分だからです．

(1b) これは，未指定のリスト $\psi_1,\ldots,\psi_m$ を扱うことを避ける方法の一つです．論理記号以外の基本記号として $\in$ と定数記号 c をもつ言語 $\mathcal{L}$ を考えます．$\mathcal{L}$ の理論 T を，($\in$ だけを使って書き下した) ZFC と，《c は可算かつ推移的である》という文と，ZFC の各公理 ϕ に対する文 ϕ^{c} の全部とからなるものとします．この T

は ZFC の保守拡大であることが (有限主義的に) 示せます．なぜなら，反映定理 (第 IV 章定理 7.11) によれば，T の任意の有限な部分理論が ZFC の内部で解釈できるからです．したがって $\mathrm{Con(ZFC)} \to \mathrm{Con}(T)$ となります．T 上では $\mathrm{c}[G]$ という拡大が作られ，$\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CH}$ のすべての公理 ϕ について $\phi^{\mathrm{c}[G]}$ を証明できます．こうして

$$\mathrm{Con}(T) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CH})$$

が示されます．

(1c) 論理を ZFC の枠組内で定式化して，M を自由変数とする述語 $M \models \ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner$ を書くことができます (第 IV 章第 10 節を見てください)．そうすれば，

$$\forall M\,(M \text{ は } \ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner \text{ の c.t.m.} \to \exists N \supset M\,(N \text{ は } \ulcorner\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CH}\urcorner \text{ の c.t.m.}))$$

は正式に ZFC の定理となります．この定理の証明に用いられる数学は第 2 節から第 5 節までに用いたものとまったく同じで，ただその論理的な解釈に違いがあるだけです．ZFC は $\exists M (M \models \ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner)$ を証明できないので，このアプローチでは $\mathrm{Con(ZFC)} \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CH})$ の有限主義的な証明は得られませんが，確信的な実在主義者になら $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CH})$ の《正しさ》を納得してもらうことはできるでしょう．というのも，(第 IV 章第 7 節の議論によれば) モデル M の存在もまた《正しい》からです．

第二のアプローチ：構文的モデルを使う．あるいは V 上の強制法による． ここでは集合モデルはまったく論じられません．

(2a) 第 3 節では補助的な記号として $\Vdash^*$ を定義しました．もともと，M に相対化して $(p \Vdash \phi) \leftrightarrow (p \Vdash^* \phi)^M$ となることを証明するつもりで考えたものですが，この $\Vdash^*$ はモデルにはまったく言及せず定義されていました．第 3 節よりあとでは事実上 $\Vdash^*$ のことは忘れてしまい，ただ $p \Vdash \phi$ という式が (具体的にどの式であるかという問題ではなく) ある式を M に相対化したものと同値であるという事実だけを何度も用いました．ところが，構文的モデルを用いるアプローチでは $\Vdash$ のことを忘れてしまい，$\Vdash^*$ をどこへも相対化せず $\mathbf{V}$ 上で使います．ここまでに $\Vdash$ をめぐって述べてきたいろいろの事実がすべて，$\mathbf{V}$ において $\Vdash^*$ に関して証明できることをチェックしなければなりません．これについては演習問題 B12–B15 を見てください．最終的には，ϕ が ZFC の公理であれば必ず $\mathbb{1} \Vdash^* \phi$ となること，そして，適切な $\mathbb{P}$ を用いれば $\mathbb{1} \Vdash^* \neg\mathrm{CH}$ となることをチェックします．そのため

には

補題 9.1. $\phi_1,\ldots,\phi_n \vdash \psi$ かつ $p \Vdash^* \phi_1,\ldots,\phi_n$ ならば $p \Vdash^* \psi$ である．□

も検証しておく必要があります．仮に，ZFC$+\neg$CH から矛盾を導きだすことに成功したとすると，ZFC$+\neg$CH のいくつかの公理 $\phi_1,\ldots,\phi_n$ について

$$\phi_1,\ldots,\phi_n \vdash \psi \wedge \neg\psi$$

のようになっているはずです．ここで補題 9.1 を使うと，ZFC から $\mathbb{1} \Vdash^* \psi \wedge \neg\psi$ が証明できます．これが $\Vdash^*$ の定義と相容れないことは簡単に示せます．こうして，ZFC$+\neg$CH の矛盾が与えられたとき ZFC の矛盾を見つけ出すための手続きが定められたので，Con(ZFC)$\rightarrow$Con(ZFC$+\neg$CH) となります．ZFC$+\neg$CH のふつうの意味でのモデルが作れないので，このアプローチが気に入らない人もいます．これはいってみれば，(**V** にいる) 私たち自身が c.t.m. を使うアプローチでいう M の住人の立場になってみるということです．私たちは **V** のジェネリック拡大の要素の名前を構成してそれらについて語り合っているのですが，そもそも **V** のジェネリック拡大なんて (私たちにとっては) どこにも存在しないというわけです．

(2b) **V** 上のブール代数値モデルの方法は，扱う半順序を完備ブール代数に制限した (2a) の特殊ケースです．第 7 節で示されたとおり，どんな半順序を使う独立性証明もこの特殊ケースで実現できます．こちらのほうが動機づけはより明瞭かもしれません．やりたいことは ZFC$+\neg$CH のモデル $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ を構成することで，ただそのモデルがある完備ブール代数の要素を真偽値とする多値論理モデルになっているだけだと考えられますから．この場合，補題 9.1 は次のように書き換えられます．これは，伝統的な証明の方法が，通常の二値論理同様ブール代数値論理にも妥当するという主張になっています．

補題 9.2. $\phi_1,\ldots,\phi_n \vdash \psi$ であれば $[\![\phi_1]\!]^* \wedge \cdots \wedge [\![\phi_n]\!]^* \leq [\![\psi]\!]^*$ である．□

正式には **V** から $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ への埋め込み写像 ˇ を定義して使いますが，直観的には **V** を $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ の部分クラスと思うことができます．このアプローチについてより詳しく知りたければ，[Rosser 1969] か [Bell 1977] を見ればよいでしょう．

(2c) 二値クラスモデル．本質的な違いはありませんが，(2b) で G を $\mathcal{B}$ の任意の超フィルターとすれば，$\mathbf{V}^{\mathcal{B}}/G$ という二値論理的構造を次のように構成できます．$\mathbf{V}^{\mathcal{B}}/G$ の基礎となるクラスは $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ ですが，$\in$ の解釈として (二値論理の) 二項関係 E を用い，モデルの理論でよくやるように $=$ を本物の等号と思う代わりに，$=$ の

解釈として別の二項関係 $\equiv$ を用います．$\tau E \sigma$ とは $[\![\tau \in \sigma]\!]^* \in G$ のこと，$\tau \equiv \sigma$ とは $[\![\tau = \sigma]\!]^* \in G$ のことだと定めます．それから，ϕ に関する (メタ理論上の) 帰納法によって

$$[\![\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]\!]^* \in G \leftrightarrow \mathbf{V}^{\mathcal{B}}/G \models \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$$

となることを証明します．簡単にできないのは ∃ の段階だけで，この場合は最大値原理 (定理 8.2) を本質的に使います．これで，$\mathcal{B}$ をうまく選べば ZFC＋¬CH の二値論理上のモデルが作られます．

この $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}/G$ はほぼまちがいなく整礎的でないので，集合論の推移的モデルとみなすことはできません．詳細は演習問題 B18 を見てください．

ここからは強制法の歴史について手短に概観します．強制法はコーエンによって開発され，ZFC＋¬CH と ZF＋¬AC と ZFC＋GCH＋$\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ の無矛盾性を確立するために用いられました．コーエンは (2a) の構文的モデルを使うアプローチを経て強制法の着想に至りましたが，研究結果を書いた出版物 ([Cohen 1963, 1964, 1966]) では (1a) と (1c) の表現法で話を進めています．(1b) はシェーンフィールドによる改良です．

コーエンの最初のとり扱いでは，強制法は構成可能的集合の階層に非常に密接に関係しているものに見えました．彼の扱う M は $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ のモデルばかりだったので，$\gamma = \mathrm{o}(M)$ とおけば $M = L(\gamma)$ となり，これに対して $M[G]$ は $L(\gamma, G)$ として (第 VI 章の演習問題 6 のやり方で) 定義されました．いまの場合は，これも $M[G]$ の他と同値な定義の一つなのです (演習問題 B10)．コーエンは一般の半順序を抽象的に扱うというアイディアに思い至らず，強制条件をなんらかの形式化された言語の文の集合に関連づけられたものと考えていました．スコットとソロヴェイは任意の完備ブール代数を用いる (2b) の方法を開発し，その際，構成可能的集合の階層 $L(\alpha)$ の構成は強制法にはまったく関係なく，関係あるのはむしろ $R(\alpha)$ の方だということに気づきました．じつは $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ を $\mathcal{B}$-値の冪集合をとる操作の繰り返しによって構成されるものと考えることもできるのです (演習問題 B17)．彼らはまた，どんな半順序もある完備ブール代数に稠密に埋め込めるので，ブール代数値の方法は完全な一般性を備えた方法であるということも見つけました．

強制法の現在の定式化のしかたは，シェーンフィールドに多くを負っています．シェーンフィールドの着想は，前もって完備ブール代数に埋め込んでおかなくても，半順序から直接にスコットとソロヴェイの構成法を実行すればいいだろうと

いうものです．私たちの用いた $\Vdash$ の定義も彼の着想によるもので，それ以前には $\Vdash^*$ しかなかったのです．それまではどんな定式化も，まず $\Vdash^*$ を定義して，基本的な事実として

$$\phi^{M[G]} \leftrightarrow \exists p \in G\,((p \Vdash^* \phi)^M)$$

(本書では定理 3.5) を証明していました．これができてしまえば，

$$(p \Vdash^* \phi)^M \leftrightarrow \forall \text{ ジェネリック } G\,(p \in G \rightarrow \phi^{M[G]})$$

となることはすぐにわかります．ということは，もし必要なら $\Vdash^*$ を使えばよいのですから $\Vdash$ を持ち込む必要は本当はないわけです．本書で ([Shoenfield 1971a] に倣って) したように，先に $\Vdash$ を

$$p \Vdash \phi \leftrightarrow \forall \text{ ジェネリック } G\,(p \in G \rightarrow \phi^{M[G]})$$

という定義で導入しておくことの利点は，$\Vdash^*$ の細かい議論の中へ投げ込まれる前に，これからやろうとしていることの見通しが読者に与えられることです．

書物によっては，$\Vdash^*$ とか $[\![\phi]\!]^*$ といった記法は用いられていません．ですから $p \Vdash \phi$ という式は我々の記法でいう $p \Vdash \phi, p \Vdash^* \phi, (p \Vdash^* \phi)^M$ のどれかの意味であり，どの意味で使っているのかは文脈から判断します．基本さえ理解していれば，こうした曖昧さのせいで混乱することはありません．

じつは私たちが使っている強制関係 $\Vdash$ は，かつては《弱い強制》と呼ばれていました．コーエンはまず基本概念として強い強制 $\Vdash_s$ を定義しました．$\Vdash$ と違って $\Vdash_s$ は論理的な同値性を反映しておらず，たとえば $p \Vdash_s \neg\neg\phi$ であっても $p \Vdash_s \phi$ でないことがあります．弱い強制は，$p \Vdash_s \neg\neg\phi$ のことを $p \Vdash \phi$ と書く，というように $\Vdash_s$ を使って定義されていました．今となっては $\Vdash_s$ は時代遅れの遺物のように見えますが，$\neg\neg\phi$ を ϕ と同値なものと考えない直観主義論理とは，いまでも関連があります．

現在の強制法の理論には，再帰理論とモデル理論に重要な先駆けが存在していました．

再帰理論の古い結果のなかには，今にして思えば強制法を用いた議論だと考えられるものがたくさんあります．一例として，互いに比較不可能な複数のチューリング次数が存在するという，クリーネとポストの定理について考えましょう．$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(2 \times \omega, \omega)$ とおき，G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とします．この G を，$f_i(n) = \bigcup G(i,n)$ によって定められる二つの ${}^{\omega}2$ の要素 f_0 と f_1 をコード化したも

のと考えましょう．このとき f_0 と f_1 は再帰的に比較不可能です．しかも，この比較不可能性を結論づけるためには，G は M の全体にわたるジェネリックである必要はなく，いくつかの算術的に定義された稠密集合と交わっていれば十分です．それらの稠密集合は本当に少ないので，G も f_0 も f_1 も $\mathbf{0}'$ (最大の再帰的可算次数) に相対的に再帰的でありうるほどです．実際のところ，$\mathbf{0}'$ の下に比較不可能なテューリング次数の対を作るためにこのように強制の論法を用いることは，もともとのクリーネとポストの論法を記号の上でわずかに手直ししただけのものです．再帰理論への強制法のもっと深遠な応用例，そしてそれらと (強制法以前の) 古い手法との比較が，[Sacks 1971] にあります．

モデルの理論において，真偽値を通常の $\{\mathbb{0},\mathbb{1}\}$ のかわりにどんなブール代数からとるモデルでも，古典論理に対して (補題 9.2 で述べたような意味で) 適正にふるまうことはすでに知られていました．現に，ゲーデルの完全性定理を証明するための一つの方法として，[Rasiowa–Sikorski 1963] ではまずブール代数値モデルを構成してからラショワとシコルスキの定理 (演習問題 D2) を適用し，$\{\mathbb{0},\mathbb{1}\}$ へのしかるべく《ジェネリックな》準同型写像を介して二値モデルを構成します．この方法を使えば，可算な長さの論理式を含む無限論理の完全性定理も得られます．しかし，不可算な言語に対してこれに類似の完全性定理が成り立たないことも，やはりブール代数値モデルを使うことによって知られていました．たとえば，ϕ を無限分配則

$$\bigwedge_{n<\omega}\bigvee_{i<2}P_{n,i}\rightarrow\bigvee_{f\in{}^{\omega}2}\bigwedge_{n<\omega}P_{n,f(n)}$$

とすると (ϕ は可算無限個の命題変数 $P_{n,i}$ に関する長さ 2^{ω} の文です)，ϕ は恒真式ですが，通常の無限論理の証明のルールを使って導出できないことが，あるブール代数値の解釈のもとで ϕ の真偽値が $\mathbb{0}$ になりうることからわかります．すなわち，${}^{\omega}2$ の正則開集合代数 (これは $\mathrm{Fn}(\omega,2)$ の完備化です：演習問題 G9) において，$P_{n,i}$ に真偽値 $\{f\in{}^{\omega}2\colon f(n)=i\}$ を割り当てた場合などがそうです．現代的な用語でいえば，ϕ はブール代数値拡大 $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ においては恒真式になりません．その理由は選言 $\bigvee_{f\in{}^{\omega}2}$ において f が $\mathbf{V}$ に属する関数の間しか動かないからです．無限論理におけるブール代数の応用法について，より詳しくは [Karp 1964] を見てください．

初期の着想の段階では，コーエンは自分の研究にこうした先駆者があることを知りませんでした．強制法の理論がある程度発展したあとで，改めて上に述べた関連性が明らかになったのです．

第 VII 章の演習問題

以下の演習問題では，特に断らない場合 M は ZFC のある c.t.m. をあらわし，$\mathbb{P}$ はある半順序をあらわします．さらにもしも $\mathbb{P}\in M$ である場合，G は M 上のある $\mathbb{P}$-ジェネリックなフィルターをあらわします．

A. ウォーミングアップ

[A1] $\mathbb{P}$ の要素 p について

$$\neg\exists q,r\in\mathbb{P}\,(q\leq p\wedge r\leq p\wedge q\perp r)$$

が成立するとき p を**アトム**と呼ぶ．p が $\mathbb{P}$ のアトムであれば，p を含み $\mathbb{P}$ の**すべての稠密部分集合と交わり**をもつフィルター G が存在する．このことを示しなさい．
[コメント] これは補題 2.4 の逆です．

[A2] $\mathbb{P}$ は M に属し，無限個の要素をもつと仮定する．このとき $M[H]$ が $\mathrm{ZF}-\mathrm{P}$ のモデルにならない $\mathbb{P}$ の部分集合 H が存在する．このことを示しなさい． [ヒント] f を $\omega\times\omega$ から $\mathbb{P}$ の中への M に属する 1 対 1 関数としなさい．H として $f^{-1}(H)$ が ω の $\mathrm{o}(M)$ より長い整列順序づけになるものを選びなさい．

[A3] 演習問題 A2 において，さらに $\mathbb{P}$ がアトムをもたない半順序であると仮定しなさい．この場合，フィルターをなすような H を選べることを示しなさい．

[A4] $\mathbb{P}$ が M に属するアトムのない半順序だと仮定する．M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリックなフィルター全体の集合の濃度は 2^ω であることを示しなさい．

[A5] $M^\mathbb{P}$ の要素 σ と τ について $\sigma_G\cup\tau_G=(\sigma\cup\tau)_G$ を示しなさい． [コメント] この場合 G がジェネリックである必要はありません．

[A6] τ を $M^\mathbb{P}$ の要素の一つとするとき

$$\pi=\{\langle\rho,p\rangle:\exists\langle\sigma,q\rangle\in\tau\exists r\,(\langle\rho,r\rangle\in\sigma\wedge p\leq r\wedge p\leq q)\}$$

とおく．このとき $\pi_G=\bigcup(\tau_G)$ を示しなさい． [コメント] これには G がフィルターである必要がありますが，ジェネリックではなくてもよいです．

[A7] σ と τ が $M^\mathbb{P}$ の要素で $\mathrm{dom}(\tau),\mathrm{dom}(\sigma)\subset\{\check{n}:n\in\omega\}$ となっているとき

$$\pi=\{\langle\check{n},p\rangle:\exists q,r\,(p\leq q\wedge p\leq r\wedge\langle\check{n},q\rangle\in\tau\wedge\langle\check{n},r\rangle\in\sigma)\}$$

とおく．このとき $\pi_G=\tau_G\cap\sigma_G$ を示しなさい． [コメント] これには G がフィルター

である必要がありますが，ジェネリックではなくてもよいです．

[A8] τ を $\mathrm{dom}(\tau)\subset\{\check{n}:n\in\omega\}$ となる $M^{\mathbb{P}}$ の要素とするとき

$$\sigma=\{\langle\check{n},p\rangle:\forall q\in\mathbb{P}(\langle\check{n},q\rangle\in\tau\to p\perp q)\}$$

とおく．$\sigma_G=\omega\setminus\tau_G$ を示しなさい．［ヒント］集合

$$\{r:\exists p\geq r(\langle\check{n},p\rangle\in\sigma\vee\langle\check{n},p\rangle\in\tau)\}$$

は稠密集合．［コメント］$\forall\tau\in M^{\mathbb{P}}((\omega\setminus\tau_G)\in M[G])$ を示すには強制法が必要です．

[A9] M が $\mathbb{P}$ に属するとする．p を $\mathbb{P}$ の要素の一つとし，$\exists q\in\mathbb{P}(p\perp q)$ となっているとする．このとき集合

$$\{\tau\in M^{\mathbb{P}}:p\Vdash\tau=\check{0}\}$$

が M にとって真のクラスになることを示しなさい．［コメント］したがって，もしも $p\in G$ であれば，集合 $\{\tau\in M^{\mathbb{P}}:\tau_G=0\}$ は M に属するいかなる集合の部分集合にもなりません．

[A10] $\mathbb{P}$ が M に属し，また $\mathbb{P}$ は (第 II 章の演習問題 15 で述べた意味で) 分離的であるとする．このとき

$$p\Vdash\{\langle\{\langle 0,q\rangle\},r\rangle\}=\check{1}$$

は $p\leq r$ かつ $p\perp q$ の必要十分条件であることを示しなさい．

[A11] $\mathbb{P}$ が M に属し，また $\mathbb{P}$ のある要素 p と q について $p\perp q$ が成立するとする．このとき集合

$$\{\tau\in M^{\mathbb{P}}:\mathbb{1}\Vdash\tau=\check{1}\}$$

は M にとって真のクラスになることを示しなさい．［ヒント］$M^{\mathbb{P}}$ の任意の要素 σ について $\{\langle\{\langle\sigma,p\rangle\},q\rangle,\langle\check{0},\mathbb{1}\rangle\}$ を考えてみなさい．

[A12] $\mathbb{P}$ が M に属するものとする．また G を $\mathbb{P}$ のフィルターとする．このとき次の三つが互いに同値であることを示しなさい．

(a) D が M に属する $\mathbb{P}$ の稠密部分集合であれば必ず $G\cap D\neq 0$ となる．

(b) A が M に属する $\mathbb{P}$ の極大反鎖であれば必ず $G\cap A\neq 0$ となる．

(c) E が M に属する $\mathbb{P}$ の部分集合で $\forall p\in\mathbb{P}\exists q\in E$ (p と q は両立する) をみたすものは必ず $G\cap E\neq 0$ となる．

次に，ここでのフィルターがみたすべき条件

(1) $\forall p,q\in G\,\exists r\in G\,(r\leq p\wedge r\leq q)$

は，条件

(1′) $\forall p,q\in\mathbb{P}\,\exists r\in G\,(r\leq p\wedge r\leq q)$

に弱めても構わないことを示しなさい．こうして，この演習問題では《ジェネリック集合》の定義の $2\times 3=6$ 通りの互いに等価なやり方を呈示したことになる．

訳注： この問題の後半部分は，フィルターの定義 (第 II 章定義 2.4) をこの弱いほうの条件を使って書き換えてよいという (間違った) 意味ではなくて，上に述べた同値な 3 条件 (a)–(c) をみたす集合 G に限っては，フィルターであるという条件のうち (1) に相当する部分を，見かけ上それより弱い (1′) に変えても結果として同じことになる，と言っているのです．補題 7.4 を参照．

B. 雑多な結果

[B1] チェック演算を

$$\check{x}=\{\langle\check{y},p\rangle : y\in x\wedge p\in\mathbb{P}\}$$

と定義しなおせば，この章で述べたあらゆる結果から，$\mathbb{P}$ は最大要素をもつという仮定をとり除くことができることを示しなさい． **[コメント]** $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ のありがたみは第 VIII 章でもっと明瞭になります．

[B2] $\langle\mathbb{P},\leq\rangle$ を M に属する半順序としよう．最大要素はあってもなくてもかまわない．$\mathbb{P}$ に属しない M の要素 $\mathbb{1}$ を一つ決めて $\mathbb{Q}=\mathbb{P}\cup\{\mathbb{1}\}$ と定義し，$\mathbb{P}$ 上の順序は元のままでさらに $\forall p\in\mathbb{P}(p<\mathbb{1})$ と定めれば，半順序 $\langle\mathbb{Q},\leq,\mathbb{1}\rangle$ が定義できる．このとき，$\mathbb{P}$ の部分集合 G が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックであることは $G\cup\{\mathbb{1}\}$ が M 上 $\mathbb{Q}$-ジェネリックであることと同値であり，しかもそのとき $\mathbb{P}$-ジェネリック拡大 $M[G]$ と $\mathbb{Q}$-ジェネリック拡大 $M[G\cup\{\mathbb{1}\}]$ とは同じになる，ということを示しなさい．

[B3] 関係 $\Vdash'$ を次の条項 (a) から (e) によって定義する．

(a) $p\Vdash'\tau_1=\tau_2$ となるのは

$$\forall\pi\in\mathrm{dom}(\tau_1)\cup\mathrm{dom}(\tau_2)\,\forall q\leq p\,((q\Vdash'\pi\in\tau_1)\leftrightarrow(q\Vdash'\pi\in\tau_2))$$

となるときである．

(b) から (e) までは，定義 3.3 の $\Vdash^*$ に関する条項と同様．

この定義が意味をなすことを示しなさい． **[コメントとヒント]** (a) と (b) は，二種類の原子式に対する $\Vdash'$ の同時再帰による定義です．すなわち，たとえば

$$\mathrm{rank}(\tau_1)<\mathrm{rank}(\pi)<\mathrm{rank}(\tau_2)$$

なら $\langle \pi, \tau_2 \rangle$ は $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ より《大きい》けれども，$\pi \in \tau_2$ を強制することは，条項 (b) によって $\mathrm{dom}(\tau_2)$ に属する π' に関して $\pi = \pi'$ を強制することに帰着し，そのときは

$$\max(\mathrm{rank}(\pi), \mathrm{rank}(\pi')) < \max(\mathrm{rank}(\tau_1), \mathrm{rank}(\tau_2))$$

となっているわけです．

[B4] 補題 3.4 から定理 3.6 までの言明を，$\Vdash^*$ の代わりに $\Vdash'$ について証明しなさい．

[B5] $f : A \to M$ かつ $f \in M[G]$ だったとしよう．このとき M に属するある集合 B について $f : A \to B$ となることを証明しなさい．［ヒント］ $f = \tau_G$ だったとして，

$$B = \{ b : \exists p \in \mathbb{P} \, (p \Vdash \check{b} \in \mathrm{ran}(\tau)) \}$$

と定めてみなさい．

[B6] $\mathbb{P}$ は M に属するとする．α を M における一つの基数とする．このとき次の (1)–(3) が互いに同値であることを示しなさい．

(1) B が M に属するときはいつでも ${}^{\alpha}B \cap M = {}^{\alpha}B \cap M[G]$ となる．

(2) ${}^{\alpha}M \cap M = {}^{\alpha}M \cap M[G]$ である．

(3) 次の言明が M において成立する：$\mathbb{P}$ の α 個の稠密開集合の共通部分は稠密である．

$\mathbb{P}$ 上の位相については第 II 章補題 3.3 の証明を見なさい．［コメント］ 条件 (3) をみたす半順序は α^+**-稠密**あるいは α^+**-ベール**であるといわれます．また，(半順序あるいは位相空間が) κ**-ベール**であるとは，κ 個未満の稠密開集合の共通部分が稠密であることを意味します．

[B7] $\mathbb{P}$ が λ-閉で λ が特異基数であるとき，$\mathbb{P}$ は λ^+-閉でもあることを証明しなさい．

[B8] $\mathbb{P}$ は M に属し，(演習問題 A1 で定義した意味での) アトムをもたないとする．モデルの列

$$M = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots \quad (n \in \omega)$$

を，M_n 上のなんらかの $\mathbb{P}$-ジェネリック集合 G_n について $M_{n+1} = M_n[G_n]$ とおくことによって作ったとすると，$\bigcup_n M_n$ が羃集合の公理をみたさないことを示しなさ

い．より強く，$\langle G_n : n \in \omega \rangle \in N$ と $o(M) = o(N)$ をみたす ZFC の c.t.m. N が存在しないように G_n を選べることを示しなさい．［ヒント］$\{n : p \in G_n\}$ に $o(M)$ をコード化させられます．

[B9] $\neg$KH から ω_2 が $\mathbf{L}$ において到達不能基数になることを導きなさい．［ヒント］ω_2 が $\mathbf{L}$ における基数 λ に対する $(\lambda^+)^{\mathbf{L}}$ だったと仮定しなさい．$X \subset \omega_1$ を $\omega_1^{\mathbf{L}(X)} = \omega_1$ かつ $\omega_2^{\mathbf{L}(X)} = \omega_2$ となるものとしなさい．$\mathbf{L}(X)$ は (第 VI 章演習問題 8 により) $\Diamond^+$ をみたし，したがって KH をみたしますが，$\mathbf{L}(X)$ におけるクレパ木は，$\mathbf{V}$ においてもやはりクレパ木になります．

[B10] M が $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ をみたし，したがって，$\gamma = o(M)$ とおけば $M = L(\gamma)$ となっていると仮定する．このとき，第 VI 章演習問題 6 で定義された意味において $M[G] = L(\gamma, G)$ が成立することを示しなさい．

[B11] 強制法を $\mathrm{ZF}^* - \mathrm{P}$ の c.t.m. M 上で実行でき，結果として得られる $M[G]$ も $\mathrm{ZF}^* - \mathrm{P}$ をみたす．このことを検証しなさい．$\mathrm{AC}^M \to \mathrm{AC}^{M[G]}$ であること，また，冪集合の公理を M がみたせば $M[G]$ もみたすことを示しなさい．［コメント］ZF^* については第 III 章の演習問題 19 を見なさい．$M[G]$ での AR^* (および AR) を証明するためには M での AR^* が必要です．

[B12] 演習問題 A9 から A11 までを，(モデルのことは一切忘れて) $\mathbf{V}$ 上の関係 $\Vdash^*$ についての問題に読みかえ，$\Vdash^*$ の定義にもとづいてそれらに取り組みなさい．たとえば A9 の結論は，$\{\tau \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}} : p \Vdash^* \tau = \check{0}\}$ は真のクラスだ，となります．

[B13] 半順序 $\mathbb{P}$ と任意の集合 x と y について次のことを示しなさい．

$$x = y \to \mathbb{1} \Vdash^* \check{x} = \check{y},$$

$$x \neq y \to \mathbb{1} \Vdash^* \neg(\check{x} = \check{y}),$$

$$x \in y \to \mathbb{1} \Vdash^* \check{x} \in \check{y},$$

$$x \notin y \to \mathbb{1} \Vdash^* \neg(\check{x} \in \check{y}).$$

［コメント］この問題はモデルのことには触れていません．

[B14] 構文的モデルを用いるアプローチ (第 9 節の (2a)) によってこの章で述べた無矛盾性に関するすべての結果が得られることを示しなさい．はじめに，ZFC のすべての公理 ϕ について，モデルを引合いに出さずに $\mathbb{1} \Vdash^* \phi$ を証明しなければな

りません．演習問題 B6 を $\mathbf{V}$ における κ-ベール性の特徴づけとして解釈しなさい．

[B15] 反映の原理を利用して演習問題 B14 を実行しなさい．つまり，ZFC の公理の一つ ϕ について，もしも $\neg(\mathbb{1} \Vdash^* \phi)$ であれば，ZFC の任意の有限部分についてその c.t.m. M で $\neg(\mathbb{1} \Vdash^* \phi)^M$ をみたすものが存在し，したがって $\neg(\mathbb{1} \Vdash \phi)$ となる．

[B16] $\mathcal{B}$ を完備ブール代数とする．集合論の言語に関する **$\mathcal{B}$-値構造**とは，三つ組 $\langle M, f_=, f_\in \rangle$ で $f_=$ と $f_\in$ が $M \times M$ から $\mathcal{B}$ への関数であり，しかも述語論理の公理と等号に関する公理が成立するもののことをいう．ただし，ここで《成立する》という意味は次のとおり．$[\![x \in y]\!] = f_\in(x,y)$, $[\![x = y]\!] = f_=(x,y)$ とし，各論理記号をそれに対応するブール代数の演算を使って評価したときに，たとえば，

$$[\![\forall x, y, z\, ((x = y \land y \in z) \to x \in z)]\!] = \mathbb{1}$$

となっていれば，等号に関するこの公理がこの構造において成立するという．$\vdash \phi$ であれば任意の $\mathcal{B}$-値構造において $[\![\phi]\!] = \mathbb{1}$ となることを証明しなさい．

[B17] ブール代数値の冪集合演算の繰り返しによって $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ を作ることもできるということを確かめること．そのために，順序数 α に対して (演習問題 B16 でいうところの) $\mathcal{B}$-値構造 $\langle R^{\mathcal{B}}(\alpha), f_=(\alpha), f_\in(\alpha) \rangle$ を定義する．その際，$R^{\mathcal{B}}(\alpha)$ から $\mathcal{B}$ への外延的関数を全部 $R^{\mathcal{B}}(\alpha)$ に付け加えたものを $R^{\mathcal{B}}(\alpha+1)$ と定める．ただし外延的関数とは

$$\forall x, y \in R^{\mathcal{B}}(\alpha)\, (([\![x = y]\!] \land h(y)) \leq h(x))$$

となるような関数 $h : R^{\mathcal{B}}(\alpha) \to \mathcal{B}$ のこと．次に $\mathbf{WF}^{\mathcal{B}} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} R^{\mathcal{B}}(\alpha)$ とする．この $\mathbf{WF}^{\mathcal{B}}$ と (第 9 章の (2b) の意味での) $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ との間に，次の意味でブール値同型関係が成立する．すなわち，写像 $\mathbf{I} : \mathbf{V}^{\mathcal{B}} \times \mathbf{WF}^{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$ が存在して

$$([\![\sigma \in \tau]\!]^* \land \mathbf{I}(\sigma, x) \land \mathbf{I}(\tau, y)) \leq [\![x \in y]\!], \bigvee \{\mathbf{I}(\sigma, x) : x \in \mathbf{WF}^{\mathcal{B}}\} = \mathbb{1}$$

などの式が成立する．

[B18] 第 9 節の (2c) において，$\mathbf{V}^{\mathcal{B}}/G$ が整礎的であるためには G が可算完備フィルターであることが必要かつ十分であることを示しなさい．もしも $\mathcal{B}$ がアトムをもたないなら，$|\mathcal{B}|$ が最初の二値可測基数かそれ以上の大きさでない限り，G は可算完備にはなりえないことを示しなさい．

C. 完備埋め込み写像と完備ブール代数

[C1]　二つの完備埋め込み写像の合成写像はまた完備埋め込み写像になること，すなわち，$i:\mathbb{P}\to\mathbb{Q}$, $j:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ が完備埋め込み写像であるとき，$j\circ i:\mathbb{P}\to\mathbb{R}$ も完備埋め込み写像になることを示しなさい．

[C2]　$\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ が (第 II 章の演習問題 15 の意味で) 分離的で，i が $\mathbb{P}$ から $\mathbb{Q}$ への完備埋め込み写像であるとして，i は 1 対 1 写像であること，$i(\mathbb{1}_{\mathbb{P}})=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ であること，また $\mathbb{P}$ の任意の要素 p と p' について $p\leq p'\leftrightarrow i(p)\leq i(p')$ であることを示しなさい．

[C3]　$\mathbb{P}$ から $\mathbb{Q}$ への関数 i を考える．i が完備埋め込み写像で $\mathbb{P}$ がアトムをもたないなら，$\mathbb{Q}$ もアトムをもたないことを示しなさい．また i が稠密埋め込み写像のときには，$\mathbb{P}$ がアトムをもたないことと $\mathbb{Q}$ がアトムをもたないことが同値であることを示しなさい．

[C4]　$\mathbb{P}$ を可算でアトムのない半順序とするとき，$\{p\in \mathrm{Fn}(\omega,\omega):\mathrm{dom}(p)\in\omega\}$ から $\mathbb{P}$ への稠密埋め込み写像が存在する．このことを示しなさい．［ヒント］$\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(\omega,\omega)$ のときは包含写像を考えればよいでしょう．一般には，まず $\{p:\mathrm{dom}(p)=1\}$ を $\mathbb{P}$ のある無限な反鎖の上に写像し，次に $\{p:\mathrm{dom}(p)=2\}$ を同様に処理するという具合いに進みなさい．［コメント］そこで，このような $\mathbb{P}$ は，$\mathrm{Fn}(\omega,2)$ でも $\mathrm{Fn}(\omega,\omega)$ でも $\mathrm{Fn}(\omega\times\omega,18)$ でも，どれも同じジェネリック拡大をもたらすことになります．

> **訳注：** もちろんジェネリック拡大は一意的ではないので，ここの「同じジェネリック拡大」という言葉は「全体として同じ」という意味に解釈しなければなりません．つまり，$\mathbb{P}$-ジェネリック拡大として得られるモデルはすべて $\mathbb{Q}$-ジェネリック拡大として得ることができ，その逆も同様にできるとき，$\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ が同じジェネリック拡大をもたらすというわけです (原文では “same generic extension*s*” と複数形になっています)．

[C5]　ブール代数 $\mathcal{B}$ の $\mathbb{0}$ でない要素の全体を $\mathbb{P}$ とすると，演習問題 A1 で定義した意味で $\mathbb{P}$ がアトムをもたないことと，$\mathcal{B}$ がブール代数についてのふつうの意味でアトムをもたないこと，すなわち

$$\forall b>\mathbb{0}\,\exists c\,(\mathbb{0}<c<b)$$

が同値になる．このことを示しなさい．

[C6]　$\mathcal{A}$ も $\mathcal{B}$ も，いずれも可算でアトムのないブール代数だとしよう．このとき $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が同型であることを示しなさい．［コメント］これをストーン空間の議論に直すことにより，コンパクトで 0 次元で第 2 可算で孤立点のないハウスドルフ位相

空間はカントール空間に位相同型である，という結果が導かれます．

[C7] $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ をブール代数とする．準同型写像 $i:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ が**完備**であるとは，$\mathcal{A}$ の部分集合 S の上限 $\bigvee S$ が存在するときには必ず $\bigvee(i''S)$ も存在して $i(\bigvee S)=\bigvee(i''S)$ となる，ということをいう．いま $i:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ が定義 7.1 の意味で完備埋め込み写像であるためには，i が完備単射準同型であることが必要十分であることを示し，さらに，この場合 $\mathcal{B}$ の要素 b に対して $h(b)=\bigwedge\{a\in\mathcal{A}:i(a)\geq b\}$ とおけば，この $h(b)$ が b の $\mathcal{A}$ への縮約のうち最大のものになることを示しなさい．$h(b)$ は b の **$\mathcal{A}$-包**と呼ばれています．

[C8] $i:\mathbb{P}\to\mathbb{Q}$ は完備埋め込み写像であるとする．$\mathcal{A}$ を $\mathbb{P}$ の完備化，$\mathcal{B}$ を $\mathbb{Q}$ の完備化とするとき，i から $\mathcal{A}$ の $\mathcal{B}$ への完備埋め込み写像 j が定められることを示しなさい．このときもしも i が稠密埋め込み写像であれば j は同型写像になることを示しなさい．

[C9] $\mathbb{P}$ として，(第 II 章定理 2.21 で) MA からルベーグ測度の $<c$ 加法性を導くために使った半順序を考える．$i:\mathbb{P}\to\mathcal{B}$ を $\mathbb{P}$ の完備化とするとき，$\mathbb{P}$ のある要素 p と q について $p\not\leq q$ かつ $q\not\leq p$ かつ $i(p)=i(q)$ となることを示しなさい．

[C10] $\mathcal{B}$ を完備ブール代数としよう．演習問題 B6 で述べた意味で $\mathcal{B}$ が ω_1-ベールであるためには，$\mathcal{B}$ が (ω,∞)**-分配的**であることが必要かつ十分であることを示しなさい．ただし $\mathcal{B}$ が (ω,∞)-分配的であるとは，任意の基数 κ について等式

$$\bigwedge_{n\in\omega}\bigvee_{\alpha\in\kappa} b_{n,\alpha}=\bigvee_{f\in{}^{\omega}\kappa}\bigwedge_{n\in\omega} b_{n,f(n)}$$

が成立するということをいう．

[C11] $\neg$SH が，アトムをもたず c.c.c. をみたし，そのうえ (ω,∞)-分配的であるような完備ブール代数 $\mathcal{B}$ の存在と同値であることを証明しなさい．そのような $\mathcal{B}$ は**ススリン代数**と呼ばれる．

D. 強制法と C との関連

[D1] $\mathcal{B}$ を M における完備ブール代数とし，F を $\mathcal{B}$ の部分集合とする．F が M 上の $\mathcal{B}$-ジェネリック集合であるためには，F が $\mathcal{B}$ の超フィルターであって，それに対応する $\mathcal{B}$ から二値ブール代数への準同型写像 h が M 内の上限演算をすべて保存すること，つまり $S\in M$, $S\subset\mathcal{B}$ ならば $h(\bigvee S)=\bigvee\{h(b):b\in S\}$ となることが，必要かつ十分である．このことを証明しなさい．

[D2]　([Rasiowa–Sikorski 1963])　$\mathcal{B}$ を任意のブール代数とし，各自然数 n について，S_n を $\mathcal{B}$ の部分集合とする．また，各 S_n の上限 b_n が存在すると仮定する．このとき，$\mathcal{B}$ から二値ブール代数への準同型写像で，S_n の上限演算をすべて保存するものが存在すること，つまり，$h(b_n)=\bigvee\{h(b):b\in S_n\}$ をみたす準同型写像 h: $\mathcal{B}\to\{\mathbb{0},\mathbb{1}\}$ が存在することを示しなさい．　[コメント] 演習問題 D1 によれば，このラショワとシコルスキの定理は，ブール代数値モデルに関するジェネリックなフィルターの存在定理といえます．

[D3]　i と $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ が M に属していて，i:$\mathbb{P}\to\mathbb{Q}$ が完備埋め込み写像になっているとしよう．$\mathbb{P}$ の任意の部分集合 G について

$$\mathbb{Q}/G=\{q\in\mathbb{Q}:\forall p\in G(q\text{ は }i(p)\text{ と両立する})\}$$

と定義する．このとき，p が q の $\mathbb{P}$ への縮約であるためには $p\Vdash\check{q}\in\check{\mathbb{Q}}/\Gamma$ が必要かつ十分であることを示しなさい．

[D4]　M において i:$\mathbb{P}\to\mathbb{Q}$ が完備埋め込み写像になっているとしよう．G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とし，K を $M[G]$ 上の $\mathbb{Q}/G$-ジェネリック集合とするとき，K が M 上の $\mathbb{Q}$-ジェネリック集合であって $M[K]_{\mathbb{Q}}=M[G][K]_{\mathbb{Q}/G}$ となることを示しなさい．ここで，$M[K]_{\mathbb{Q}}=\{\tau_K:\tau\in M^{\mathbb{Q}}\}$, $M[G][K]_{\mathbb{Q}/G}=\{\tau_K:\tau\in M[G]^{\mathbb{Q}/G}\}$ とする (このような書きかたをするのは，K が二つの違った半順序のフィルターになっているから)．　[ヒント] D が $\mathbb{Q}$ の稠密部分集合のとき，$D\cap\mathbb{Q}/G$ は $\mathbb{Q}/G$ において稠密です．これを示すには次のようにします．$\mathbb{Q}/G$ の要素の一つ q_0 を決め，$p_0\Vdash\check{q}_0\in\check{\mathbb{Q}}/\Gamma$ をみたすような G の要素 p_0 を決めれば，集合

$$\{p\in\mathbb{P}:\exists q\in\mathbb{Q}(q\leq q_0\wedge q\in D\wedge p\Vdash\check{q}\in\check{\mathbb{Q}}/\Gamma)\}$$

が p_0 以下で稠密になることを示しなさい．

[D5]　M において i:$\mathbb{P}\to\mathbb{Q}$ が完備埋め込み写像になっているとする．H を M 上の $\mathbb{Q}$-ジェネリック集合とし，$G=i^{-1}(H)$ とおく．このとき，$H\subset\mathbb{Q}/G$ で，H は $M[G]$ 上 $\mathbb{Q}/G$-ジェネリックであり，$M[H]_{\mathbb{Q}}=M[G][H]_{\mathbb{Q}/G}$ となることを示しなさい．　[ヒント] D を $\mathbb{Q}/D$ の稠密部分集合で $M[G]$ に属するとして $D=\tau_G$ とし，$p_0\Vdash$ (τ は $\check{\mathbb{Q}}/\Gamma$ において稠密) となる p_0 をとりなさい．このとき集合

$$\{q:\exists p\exists q_1[(p\Vdash\check{q}_1\in\tau)\wedge q\leq i(p)\wedge q\leq q_1]\}$$

が $i(p_0)$ 以下で稠密になります．　[コメント] 演習問題 D4 と D5 によれば，$\mathbb{Q}$ で一回

拡大するのと，$\mathbb{P}$ で拡大してから $\mathbb{Q}/G$ でまた拡大するのは同等です．

[D6]　M において，$i\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ が完備ブール代数の間の完備埋め込み写像になっているとする．G を M 上の $\mathcal{A}$-ジェネリックなフィルターとし，$M[G]$ において

$$\mathcal{I}=\{\,b\in\mathcal{B}\colon \exists a\in G\,(b\perp i(a))\,\}$$

と定義する．このとき，$\mathcal{I}$ は $\mathcal{B}$ のイデアルで，商代数 $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ は $M[G]$ において完備であって，$\mathcal{I}=\{b\colon (h(b))'\in G\}$ となる．このことを示しなさい．ただし $h(b)$ は演習問題 C7 で定義した b の $\mathcal{A}$-包とする．次に，演習問題 D3 のとおりに $\mathcal{B}/G$ を定義して $i(b)=[b]_{\mathcal{I}}$ と定義したら $i\colon\mathcal{B}/G\to\mathcal{B}/\mathcal{I}$ が稠密埋め込み写像になるので，$\mathcal{B}/\mathcal{I}$ は $M[G]$ における $\mathcal{B}/G$ の完備化である，ということを示しなさい．

[D7]　$\mathcal{B}$ を M における完備ブール代数とするとき，等式

(a) $[\![\tau_1=\tau_2]\!]=\bigwedge\{[\![\pi\in\tau_1]\!]\leftrightarrow[\![\pi\in\tau_2]\!]\colon \pi\in\mathrm{dom}(\tau_1)\cup\mathrm{dom}(\tau_2)\}$, および

(b) $[\![\tau_1\in\tau_2]\!]=\bigvee\{[\![\pi=\tau_1]\!]\wedge b\colon \langle\pi,b\rangle\in\tau_2\}$

を証明しなさい．ただし，$\mathcal{B}$ の要素 a と b に対して $(a\leftrightarrow b)=(a'\vee b)\wedge(a\vee b')$ と定める．［コメント］演習問題 B3 のような考え方でいうと，この (a) と (b) を $[\![\ldots]\!]^*$ の帰納法による定義の条項とみなすことができます．

[D8]　M において $i\colon\mathbb{P}\to\mathcal{B}$ が $\mathbb{P}$ の完備化であるとすると，$i(p)=i(q)$ のとき，かつそのときに限り，すべての M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合 G が $p\in G\leftrightarrow q\in G$ をみたす．このことを示しなさい．

E. 自己同型写像から AC の独立性へ

[E1]　$\mathbb{P}$ (正確には $\langle\mathbb{P},\leq,\mathbb{1}\rangle$) を半順序とするとき，$\mathbb{P}$ から $\mathbb{P}$ の上への 1 対 1 写像 i で，$\leq$ を保存し，$i(\mathbb{1})=\mathbb{1}$ をみたすもののことを $\mathbb{P}$ の**自己同型写像**という．したがってこのときはすべての x について $i_*(\check{x})=\check{x}$ が成立する．半順序 $\mathbb{P}$ が**ほとんど均質**であるとは，$\mathbb{P}$ の任意の要素 p と q に対して，$i(p)$ が q と両立するような $\mathbb{P}$ の自己同型写像 i が存在することをいう．さて，$\mathbb{P}$ が M に属し，M においてほとんど均質であったとしよう．このとき $p\Vdash\phi(\check{x}_1,\ldots,\check{x}_n)$ から $\mathbb{1}\Vdash\phi(\check{x}_1,\ldots,\check{x}_n)$ が導かれることを示しなさい．したがって $\mathbb{1}\Vdash\phi(\check{x}_1,\ldots,\check{x}_n)$ かまたは $\mathbb{1}\Vdash\neg\phi(\check{x}_1,\ldots,\check{x}_n)$ が成立する．

[E2]　任意の I, J, λ について $\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)$ がほとんど均質であることを証明しなさい．

[E3] (ミラーによる)　M において I と J は不可算集合であるとして，$\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(I,2)$, $\mathbb{Q}=\mathrm{Fn}(J,2)$ とおく．このとき，式 $\phi(x)$ と M の順序数 α について

$$(\mathbb{1}\Vdash_{\mathbb{P}}(\phi(\check{\alpha})^{\mathbf{L}(\mathcal{P}(\omega))}))\leftrightarrow(\mathbb{1}\Vdash_{\mathbb{Q}}(\phi(\check{\alpha})^{\mathbf{L}(\mathcal{P}(\omega))}))$$

を証明しなさい．［ヒント］もしも $(|I|=|J|)^M$ であれば補題 7.13 を適用すればよい．一般には，$(|I|\leq|J|)^M$ だったとして M 上の $\mathrm{Fn}(I,J,\omega_1)^M$-ジェネリック集合 H を考えると，$(|I|=|J|)^{M[H]}$ となります．G を $M[H]$ 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とすると，G は M 上のジェネリック集合でもあり，しかも $M[G]\cap\mathcal{P}(\omega)=M[H][G]\cap\mathcal{P}(\omega)$ となります．そこで，E1 を用いれば

$$(\mathbb{1}\Vdash_{\mathbb{P},M}(\phi(\check{\alpha})^{\mathbf{L}(\mathcal{P}(\omega))}))\leftrightarrow(\mathbb{1}\Vdash_{\mathbb{P},M[H]}(\phi(\check{\alpha})^{\mathbf{L}(\mathcal{P}(\omega))}))$$

となります．$\mathbb{Q}$ についても同じことが言えます．

[E4]　$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})\rightarrow\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}+\neg\mathrm{AC})$ を証明しなさい．実際には $\neg\mathrm{AC}$ と $\mathbf{V}=\mathbf{L}(\mathcal{P}(\omega))=\mathbf{HOD}(\mathcal{P}(\omega))$ とが矛盾しないことを証明しなさい．［ヒント］(ミラーによる) $(|I|\geq\omega_1)^M$ だったとして，M 上の任意の $\mathrm{Fn}(I,2)$-ジェネリック集合 G について $N=L(\mathcal{P}(\omega))^{M[G]}$ とおきなさい．仮に N において AC が成立するとして，$(\kappa=|\mathcal{P}(\omega)|)^N$ とおきなさい．このとき $\mathbb{1}\Vdash((\check{\kappa}=|\mathcal{P}(\omega)|)^{\mathbf{L}(\mathcal{P}(\omega))})$ となる．そこで，$(|J|>\kappa)^M$ をみたす J をとれば演習問題 E3 の結果との間に矛盾が生じることになる．

[E5]　ZFC+GCH と $\mathbf{V}\neq\mathbf{OD}$ が矛盾しないことを証明しなさい．［ヒント］$\mathrm{Fn}(I,2)$ を使って演習問題 E1 の結果を応用しなさい．

F. 鎖条件

[F1]　$\mathbb{P}$ が θ-c.c. をもたない最小の基数 θ を $\mathrm{c.c.}(\mathbb{P})$ と書くとき，$\mathrm{c.c.}(\mathbb{P})\neq\omega$ を証明しなさい．［ヒント］互いに両立不可能なアトムの作る集合のうち極大なものを考えてみなさい．

[F2]　$\mathbb{P}$ は M に属し $\mathrm{c.c.}(\mathbb{P})<\omega$ となっていれば，M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックな G はすべて M に属する．このことを証明しなさい．同様に $(\kappa=\mathrm{c.c.}(\mathbb{P})\wedge\mathbb{P}$ は κ-閉$)^M$ の場合を考えなさい．

[F3]　$\mathbb{P}\in M$ ならば $\mathrm{c.c.}(\mathbb{P})<\omega$ と $(\mathrm{c.c.}(\mathbb{P})<\omega)^M$ が同値であることを示しなさい．［ヒント］M において $\mathbb{P}$ をアトムによって分割してみなさい．

***[F4]**　(タルスキによる)　$\mathrm{c.c.}(\mathbb{P})\geq\omega$ のときは $\mathrm{c.c.}(\mathbb{P})$ は正則基数になる．このこ

とを証明しなさい．

[F5] $|I| \geq \lambda$ かつ $|J| \geq 2$ であれば，$\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)$ にはサイズ $2^{<\lambda}$ の反鎖が存在することを示しなさい． [コメント] λ が後続型基数の場合は比較的やさしいです．

[F6] 可算な完備ブール代数は有限なものに限ることを証明しなさい． [ヒント] 演習問題 F1 を見なさい．

G. $\mathrm{Fn}(I,J,\lambda)$ について

[G1] κ, λ, θ を M における無限基数とし，$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ とおく．このとき，等式

$$(\lambda^\theta)^{M[G]} = ((\max(\kappa,\lambda))^\theta)^M$$

を示しなさい．

[G2] I を M に属する無限集合とし，$2 \leq \alpha \leq \beta \leq \omega$ とする．このとき，$\mathrm{Fn}(I,\alpha)$ と $\mathrm{Fn}(I,\beta)$ からは同じジェネリック拡大が得られることを示しなさい． [ヒント] $I = \kappa \times \omega$ として，演習問題 C4 を成分ごとに適用してみなさい．

[G3] λ を正則基数として $\mathbb{P}(J) = \{p \in \mathrm{Fn}(\lambda,J,\lambda) : \mathrm{dom}(p) \in \lambda\}$ とおくとき，$\mathbb{P}(J)$ は $\mathrm{Fn}(\lambda,J,\lambda)$ に稠密に含まれていることを示しなさい．次に，$2 \leq |J| \leq 2^{<\lambda}$ ならば $\mathbb{P}(2^{<\lambda})$ は $\mathrm{Fn}(\lambda,J,\lambda)$ に稠密に埋め込まれることを示しなさい． [コメント] この結果を M に相対化して利用すれば，$\mathrm{Fn}(\lambda,2,\lambda)$ が λ から $2^{<\lambda}$ の上への関数をつけ加えることがわかります．というのも，$\mathrm{Fn}(\lambda,2^{<\lambda},\lambda)$ がそうした関数をつけ加えることは明らかですから．

[G4] $(|I| \geq \omega_1)^M$ である I について $(\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I,2,\omega_1))^M$ とおくとき，M が CH をみたすかどうかにかかわらず，$M[G]$ は CH をみたす．このことを示しなさい．

[G5] M において $\theta = \mathrm{cf}(\lambda) < \lambda$ が成立しているとすると，$\mathrm{Fn}(\lambda,2,\lambda)$ は θ から λ^+ の上への関数をつけ加えることを示しなさい． [ヒント] たとえば $\lambda = (\omega_\omega)^M$ の場合，集合 $\{\alpha : \bigcup G(\alpha) = 1\}$ の ω_n-番目の要素を $f(n)$ としなさい．$f(n) = \omega_n \cdot \delta + \beta$ $(\beta < \omega_n)$ の形に書いたときの β を $g(n)$ としなさい．このとき g は ω を λ の上へ写します．次に $\bigcup G$ が ω から λ への M に属する関数すべてをコード化していることを示しなさい．

[G6] M が GCH をみたすと仮定する．M における正則基数 $\kappa_1 < \cdots < \kappa_n$ を考え，また M における基数 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ について $(\mathrm{cf}(\lambda_i) > \kappa_i)^M$ が成立していると

する．強制法を n 回使って，M を拡大する c.t.m. N で，M と同じ基数をもちすべての i について $(2^{\kappa_i}=\lambda_i)^N$ をみたすものを作りなさい．

[G7] M が CH をみたすと仮定し，$(|I|\geq\omega_2)^M$ となるある集合 I について $\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(I,2)$ とおいたとする．このとき，$M[G]$ において CH が成立しないことを示しなさい． [ヒント] まず，$f\in{}^{\omega}\omega\cap M[G]$ のときに，${}^{\omega}\omega$ の M に属するある要素 g について集合 $\{n:g(n)\geq f(n)\}$ が無限集合となることを示しなさい．次に第 II 章の演習問題 8 を使いなさい．

[G8] $\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(\kappa\times\omega,2)$, $f_\alpha(n)=\bigcup G(\alpha,n)$ とするとき，κ 未満の各 α に対する f_α は互いに再帰的に比較不可能であることを示しなさい．

[G9] 半順序 $\mathrm{Fn}(I,2)$ の完備化は，位相空間 ${}^{I}2$ の正則開集合代数と同型であることを証明しなさい．ここで，2 すなわち $\{0,1\}$ には離散位相，${}^{I}2$ にはその直積の位相を与えて考える．

H. 強制法による構成の例

[H1] M において κ は不可算な正則基数で，$\mathbb{P}$ は κ-c.c. をみたすとする．また C は $M[G]$ に属する κ の部分集合で，κ において c.u.b. であるとする．このとき C は M に属するある c.u.b. 集合 C' を含むことを示しなさい． [ヒント] $M[G]$ に属する関数 $f:\kappa\to\kappa$ を $\forall\alpha<\kappa(\alpha<f(\alpha)\in C)$ をみたすようにとって，補題 6.8 を応用しなさい．

[H2] M において，κ は不可算正則基数，S は κ の定常部分集合，$\mathbb{P}$ は κ-c.c. をみたすかあるいは κ-閉な半順序，となっているものとしなさい．このとき S は $M[G]$ においても依然として定常集合であることを示しなさい．

[H3] 基数 κ が正則基数であって，しかも集合 $\{\alpha<\kappa:\alpha$ は正則基数$\}$ が κ の定常部分集合になるときに，κ のことを**弱マーロ基数**という．では，κ が弱マーロ基数であれば，集合

$$\{\alpha<\kappa:\alpha\text{ は弱到達不能基数}\}$$

が κ の定常部分集合であることを証明しなさい．

[H4] M において，κ は不可算基数，$\mathbb{P}$ は κ-閉であるかあるいは κ より小さいある λ について λ-c.c. をみたす半順序としなさい．もしも κ が M において弱マーロ基数であれば，$M[G]$ においても依然として κ は弱マーロ基数であることを示しな

さい．同じことを弱超マーロ基数についても考えなさい．ここで，**弱超マーロ基数**とは，集合

$$\{\alpha<\kappa:\alpha \text{ は弱マーロ基数}\}$$

が定常集合になるような正則基数 κ のことをいう．

[H5]　系 5.16 の《到達不能》を全部《マーロ》に書き換えたものもやはり正しいことを示しなさい．《超マーロ》についても同様にしなさい．強マーロ基数や強超マーロ基数の定義については第 II 章の演習問題 48 と 50 を見なさい．さらに，κ がマーロ基数 (あるいは超マーロ基数) であって，$2^\kappa>\kappa^+$ をみたし，しかも κ 未満の基数については GCH が成立する，という κ の存在の相対的無矛盾性を示しなさい．

[H6]　M において $\mathcal{P}(\omega)$ の部分集合 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{C}$ があって，$\mathcal{C}$ のすべての要素 y と $\mathcal{A}$ の任意の有限部分集合 F について $|y\setminus\bigcup F|=\omega$ が成立しているとする．このとき M 内に次の性質をもつ半順序 $\mathbb{P}$ が存在することを示しなさい：($\mathbb{P}$ は c.c.c. をみたし$)^M$, M 上の任意の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合 G に対し，$M[G]$ 内に

$$\forall x\in\mathcal{A}(|d\cap x|<\omega) \quad \text{かつ} \quad \forall y\in\mathcal{C}(|d\cap y|=\omega)$$

をみたすような ω の部分集合 d が存在する．［ヒント］第 II 章の定理 2.15 を見なさい．

[H7]　$\langle X,<\rangle$ を M に属する全順序とする．このとき M に属するある半順序 $\mathbb{P}$ について次のことが成立することを示しなさい．($\mathbb{P}$ は c.c.c. をみたし$)^M$, G が M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合であれば，$M[G]$ には ω の部分集合のシステム $\langle a_x:x\in X\rangle$ が存在して $x<y\rightarrow a_x\subset^* a_y$ をみたす．［ヒント］第 II 章演習問題 22 を見なさい．

[H8]　M において $\diamondsuit$ が成立し，また半順序 $\mathbb{P}$ は (c.c.c. をみたし，$|\mathbb{P}|\leq\omega_1)^M$ とする．このとき，$\diamondsuit$ が $M[G]$ においても成立することを示しなさい．［ヒント］M における $\diamondsuit$ を使って，ω_1 の部分集合の都合のよい名前をすべて《把握させ》なさい．

[H9]　M において $\mathbb{P}$ は c.c.c. をみたすとし，$M[G]$ において $\diamondsuit$ が成立しているとする．このとき $\diamondsuit$ が M においても成立することを示しなさい．［ヒント］$\diamondsuit^-$ を確かめればよい．第 II 章の定義 7.13 と定理 7.14 を見なさい．

[H10]　M において半順序 $\mathbb{P}$ が ω_1 を準内径とするとしなさい (第 II 章の演習問題 26 で定義されている)．このときもしも T が M における ω_1-ススリン木であれば

$M[G]$ においてもやはり T はススリン木であることを示しなさい．$\mathbb{P}$ が ω_1-閉である場合も同様にしなさい．

[H11]　κ を不可算正則基数とする．κ-ススリン木をつけ加えるためのイェックの半順序 $\mathbb{P}$ は次のようなものだ．$\mathbb{P}$ の要素は $\mathbb{1}$ すなわち空な木であるか，または $2^{<\kappa}$ の部分木 p のうち，ある極限順序数 α について

$$\mathrm{ht}(p)=\alpha+1,$$

$$\forall s\in p\,(\mathrm{dom}(s)<\alpha\rightarrow(s^\frown\langle 0\rangle\in p\wedge s^\frown\langle 1\rangle\in p)),$$

$$\forall\xi\leq\alpha\,(|\mathrm{Lev}_\xi(p)|<\kappa),$$

$$\forall s\in p\exists t\in p\,(\mathrm{dom}(t)=\alpha\wedge s\subset t)$$

という条件をみたすものとする．$p\leq q$ となるのは $q=\{s\in p:\mathrm{dom}(s)<\mathrm{ht}(q)\}$ となるとき，つまり，p の先のほうをある高さで水平に切り落した結果が q になるときだとする．このとき $\mathbb{P}$ は ω_1-閉であり，ω_2-閉ではないことを示しなさい．［ヒント］$p_0>p_1>\cdots$ だったとすると $\bigcup_n p_n$ は高さがある極限順序数 γ であるような木になっています．ところが $\mathrm{cf}(\gamma)=\omega$ なので，$\bigcup_n p_n$ を拡大して $\mathbb{P}$ に属する高さ $\gamma+1$ の木を作るのは簡単です．いっぽう，$\bigcup_{\xi<\omega_1} p_\xi$ は ω_1-アロンシャイン木になる可能性があります．

[H12]　$\mathbb{P}$ を演習問題 H11 の半順序，α を κ より小さい順序数とするとき，集合 $D_\alpha=\{p\in\mathbb{P}:\mathrm{ht}(p)>\alpha\}$ が $\mathbb{P}$ において稠密であることを示しなさい．［コメント］強制条件の高さを後続型順序数にしてあることが効いてくるのはここです．［ヒント］$D_\alpha\neq 0$ を示すためには

$$p=\{s\in 2^{<\alpha+1}:|\{\xi:s(\xi)=1\}|<\omega\}$$

とおいてみなさい．

[H13]　演習問題 H11 の半順序 $\mathbb{P}$ は κ-ベール (演習問題 B6 を参照) であることを示しなさい．いっぽう $\kappa>\omega_1$ のとき $\mathbb{P}$ は κ-閉ではない．［ヒント］$\lambda<\kappa$ とし，λ 未満の順序数 ξ に対応して $\mathbb{P}$ の稠密開集合 D_ξ があったとして，下降列 p_ξ $(\xi\leq\lambda)$ を，$\xi<\lambda$ のときは $p_\xi\in D_\xi$ となるようにとります．そうすれば $p_\lambda\in\bigcap_{\xi<\lambda}D_\xi$ となるわけです．$\mathrm{ht}(p_\xi)$ を $\alpha_\xi+1$ とし，γ が極限順序数のときは $\alpha_\gamma=\sup\{\alpha_\xi:\xi<\gamma\}$ と

なるようにします．また，$\mathrm{cf}(\gamma)>\omega$ でも $\bigcup_{\xi<\gamma} p_\xi$ がさらに延長できることを保証するために，p_ξ を選び出す際に，その各要素 s に対応する $\mathrm{Lev}_{\alpha_\xi}(p_\xi)$ の要素 $f(s,\xi)$ を選び，$s\subset f(s,\xi)$ および $\xi<\eta\to f(s,\xi)\subset f(s,\eta)$ が成立するようにしておきます．
[コメント] $\kappa>\omega_1$ のときのこの論法はプリクリとシルヴァーによるものです．

[H14] κ を M における不可算な正則基数とし，半順序 $\mathbb{P}$ は M 内で演習問題 H11 の要領で定義されたものとする．$M[G]$ において，$\bigcup G$ が κ-ススリン木であること，そして，もしも M において $2^{<\kappa}=\kappa$ であれば $\mathbb{P}$ が共終数を保存することを示しなさい．[ヒント] もしも $p\Vdash$ (τ は Γ の極大反鎖である) となっていたとしたら，$p=p_0>p_1>p_2>\cdots$ を

$$\forall n\forall s\in p_n\left((p_{n+1}\Vdash \check{s}\in\tau)\vee(p_{n+1}\Vdash \check{s}\notin\tau)\right)$$

となるようにとって $q=\bigcup_n p_n$ とおき ($q\notin\mathbb{P}$ に注意)，$A=\{s\in q:\exists n\,(p_n\Vdash \check{s}\in\tau)\}$ としなさい．p_n をこの A が木 q の極大反鎖になるようにうまく選ぶように．次に q を延長して $q'\Vdash\tau=A$ をみたす q' にしなさい．これは $\Diamond\to\neg\mathrm{SH}$ (第 II 章の定理 7.8) の証明に似ています．

[H15] ω_1-ススリン木をつけ加えるイェックの半順序の完備化と $\mathrm{Fn}(\omega_1,2^\omega,\omega_1)$ の完備化が同型になることを示しなさい．[ヒント] 集合

$$\{p\in\mathrm{Fn}(\omega_1,2^\omega,\omega_1):\mathrm{dom}(p)\ \text{は後続型順序数}\}$$

が両者に稠密に埋め込まれます．

[H16] T を κ-ススリン木とする．定理 8.4 の証明と同様，半順序に関連した《稠密》などの用語は木の順序 $<$ の逆の順序について言っているとする．T の任意の部分集合 X に対してある κ 未満の順序数 α が存在して，$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ のすべての要素 p について，X は p 以下で稠密か p 以下で空 (つまり $\neg\exists q<p(q\in X)$) になる．このことを証明し，さらにそれを用いて T が κ-ベールであることを示しなさい．

[H17] M において $\mathbb{P}$ は c.c.c. をみたし T は ω_1 より大きなある基数 κ について κ-ススリン木となっているとする．T は $M[G]$ においてもやはりススリン木であることを示しなさい．[ヒント] M において $X\subset T$ かつ $|X|=\kappa$ であれば，X は不可算な鎖と不可算な反鎖を含みます．

[H18] イェンセンの $\Diamond^+$-順序とは，次のような半順序 $\mathbb{P}$ のこと．$\mathbb{P}$ の要素は $\langle p,\mathcal{S}\rangle$ の形のペアで，p はイェックの半順序 (H11 で $\kappa=\omega_1$ の場合) の要素，$\mathcal{S}$ は 2^{ω_1} の

可算部分集合で，この $\mathcal{S}$ の各要素 f について $f\restriction(\mathrm{ht}(p)-1)\in p$ が成り立つようなものとする．$\langle p,\mathcal{S}\rangle\leq\langle p',\mathcal{S}'\rangle$ とは $p\leq p'$ かつ $\mathcal{S}'\subset\mathcal{S}$ となることだとする．CH を仮定して，この $\mathbb{P}$ が ω_1-閉で ω_2-c.c. をみたすことを証明しなさい．

[H19] M において $\mathbb{P}$ を (演習問題 H18 の) $\diamondsuit^+$-順序とし，また M において CH が成立しているとする．$T=\bigcup\{p:\exists\mathcal{S}(\langle p,\mathcal{S}\rangle\in G)\}$ とおくと，$M[G]$ において T がクレパ木になることを示しなさい．

[H20] M において $\mathbb{P}$ を $\diamondsuit^+$-順序とし，また M において CH が成立しているとする．このとき $M[G]$ において $\diamondsuit^+$ が成立していることを示しなさい．［ヒント］まず $M[G]$ 内の 2^{ω_1} の要素 h を $T\in\mathbf{L}(h)$ かつ $\mathcal{P}(\omega)\in\mathbf{L}(h)$ となるように選びなさい．それから，次の二つのことが $M[G]$ において成立していることを示しなさい．

(a) $\forall f\in 2^{\omega_1}\cap M\,\exists g\in 2^{\omega_1}\,(f\in\mathbf{L}(g,h)\wedge g$ は T の道$)$,

(b) $\forall f\in 2^{\omega_1}\,\exists g\in 2^{\omega_1}\cap M\,(f\in\mathbf{L}(g,h))$.

(b) を示すには，$G\cap\mathbf{L}(g,h)\in\mathbf{L}(g,h)$ に注目しなさい．

[H21] $\mathcal{B}$ を M における 2^I の測度代数とする．すなわち，$2=\{0,1\}$ には $\{0\}$ と $\{1\}$ にそれぞれ測度 $\dfrac{1}{2}$ を与え，2^I にはその直積測度を与える．そして，測度ゼロの集合全体を法として考えた可測集合のブール代数を $\mathcal{B}$ とする．$\mathcal{B}$ が M において c.c.c. をみたすことを示し，さらに，G が M 上の $\mathcal{B}$-ジェネリック集合であるとき，$M[G]$ において $2^\omega\geq|I|$ となることを示しなさい．［ヒント］G は関数 $f:I\to 2$ を定めます．ここで $I=\kappa\times\omega$ であったとして $f_\alpha(n)=f(\alpha,n)$ とおけば，f_α はすべて互いに異なります．

[H22] 演習問題 H21 で，さらに，M において $|I|=\kappa$ かつ $\kappa^\omega=\kappa$ が成立していると仮定する．このとき $2^\omega=\kappa$ を示しなさい．［コメント］M においては，$\mathcal{B}$ は測度ゼロの集合全体を法として考えた 2^I のベール集合全体のブール代数と同型です．いっぽう，$\mathrm{Fn}(I,2)$ の完備化は 2^I の正則開集合のブール代数で，これは第一類の集合全体を法として考えた 2^I のベール集合全体のブール代数と同じものです．ジェネリック拡大における測度とベール類の振舞いの類似性については，[Kunen 1984] で詳しく述べています．

[H23] 演習問題 H21 の状況，あるいは $\mathcal{B}$ は M における任意の測度つきブール代数だとして，$\omega^\omega\cap M[G]$ の要素 f を考える．このとき M に属する ω^ω の要素 g で

$\forall n\,(f(n)\leq g(n))$ をみたすものが存在することを示し，次に，$\mathrm{Fn}(I,2)$ によるジェネリック拡大ではこれが成立しないことを示しなさい．［コメント］H22 の結果とは裏腹に，これら二通りのジェネリック拡大の特性は，まるきり同じというわけではないのです．［ヒント］$\mathbb{1}\Vdash \tau:\check{\omega}\to\check{\omega}$ かつ $\varepsilon>0$ だったとするとき，$\mu([\![\tau(\check{n})\leq\check{m}]\!])\geq 1-\varepsilon/2^n$ をみたす数 m を $g(n)$ としてみなさい．$\mathrm{Fn}(I,2)$ の場合については，代わりに $\mathrm{Fn}(\omega,\omega)$ を使って考えなさい．

[H24]　(プリクリの結果)　M において，κ が二値可測基数であり，また $\mathbb{P}$ が c.c.c. をみたす半順序であるとする．このとき $M[G]$ において $\exists\mathcal{J}\,S(\kappa,\omega_1,\mathcal{J})$ が成立することを示しなさい (第 II 章の演習問題 60 を参照).

M において $S(\kappa,2,\mathcal{I})$ が成立しているとして，$\mathcal{J}$ を

$$\mathcal{J}=\{\,X\in\mathcal{P}(\kappa)\cap M[G]:\exists Y\in\mathcal{I}\,(X\subset Y)\,\}$$

と定義しなさい．［コメント］$\mathbb{P}$ を測度つきブール代数とすれば，κ は $M[G]$ において実数値可測基数になります．これについては [Solovay 1971] を見てください．

***[H25]**　(イェンセンの結果)　M において，T を ω_1 の定常部分集合とし，$\mathbb{P}$ を T に含まれ ω_1 において閉であるような可算集合全体の集合とする．$\mathbb{P}$ の要素 p と q について $p\leq q$ とは $q\subset p$ かつ $q=p\cap(\max(q)+1)$ となることだとする．このとき，M において $\mathbb{P}$ が ω_1-ベールであること，また，$M[G]$ において T が c.u.b. 集合を含むことを示しなさい．［コメント］この場合 $\omega_1\setminus T$ は，たとえ M で定常集合であったとしても，$M[G]$ では定常集合でなくなります．この結果を演習問題 H2 の結果と比較してみなさい．

第 VIII 章

反復強制法

この章全体を通じて，M は ZFC のある決まった c.t.m. をあらわすとします．ただし，この章では M だけにとどまらず，M のいろいろな拡大モデルをも基礎モデルにして，前の第 VII 章で得られた結果を適用します．

反復強制法の背景となる発想は，α をなにか順序数だとして，ジェネリック拡大を α 回繰り返すことによって

$$M = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_\xi \subset \cdots \subset M_\alpha$$

のようなモデルの連鎖を作ろうというものです．ここで，$M_{\xi+1}$ は M_ξ に属するなんらかの半順序 $\mathbb{P}_\xi$ について M_ξ 上の $\mathbb{P}_\xi$-ジェネリック集合 G_ξ によって $M_{\xi+1} = M_\xi[G_\xi]$ という形で得られるようにします．こうして得られた M_α は M に列 $\langle G_\xi : \xi < \alpha \rangle$ をつけ加えることで得られたものとなります．この反復強制法の理論は，次の二つの部分に分けることができるでしょう．一つは二段階の繰り返し，もう一つは極限回の繰り返しです．

一見したところ，二段階の (つまり $\alpha = 2$ の) 繰り返しは馬鹿らしいくらい簡単に見えます．M_1 すなわち $M_0[G_0]$ はまた ZFC の c.t.m. の一つなので，それに属するどんな半順序 $\mathbb{P}_1$ を使っても，強制法のプロセスを適用すれば $M_1[G_1]$ すなわち M_2 が得られるというわけです．実際のところすでに，(第 VII 章定理 6.18 において) 私たちはまさにこの方法を使って，GCH をいろいろな基数のところで破るモデルを作っています．

二段階の繰り返しのことが解ってしまえば，どんな自然数 n についても，n 段階の反復は帰納法により明らかでしょう．超限回の段階にわたる反復強制法でも，M_ξ から $M_{\xi+1}$ を得るときにこの二段階の繰り返しの方法を使えばいいだろうと見

当がつきます．M_ξ 上で強制を行なって $M_{\xi+1}$ を作ればいいというわけです．

それにくらべて，極限回の繰り返しには問題がありそうに見えます．すべての自然数 n に対して M_n が手に入ったとして，では M_ω とはなんでしょうか．単純に $M_\omega = \bigcup_n M_n$ というわけにはいきません．というのも，普通はこの集合は $\{G_n : n \in \omega\}$ を含まないし，それどころか $\langle G_n : n \in \omega \rangle \in N$ かつ $\mathrm{o}(N) = \mathrm{o}(M)$ をみたす c.t.m. N が一つもないという例すら作れるからです (第 VII 章演習問題 B8)．大雑把な言い方としては，列 $\langle G_n : n \in \omega \rangle$ 全体をジェネリックなものとして選ぶことによってこうしたおかしな事態を避けることができます．でも，それは実際のところどういう意味でしょうか．

この問題を解決するために，いったん二段階の繰り返しに立ち返ってきちんとやり直すことにします．そこでは二段階の繰り返しを一段階で済ませる方法を示します．つまり，M に属する半順序 $\mathbb{Q}_1$ をうまく見つけてきて，先ほど $M[G_0][G_1]$ として得られた M_2 が，M 上の $\mathbb{Q}_1$-ジェネリック集合 H_1 によって $M[H_1]$ という形でも得られるようにします．さらにこのとき (第 VII 章定義 7.2 の意味で) $\mathbb{P}_0 \subset_c \mathbb{Q}_1$ となるようにしておきます．これと同様に，n 段階の繰り返しは

$$\mathbb{P}_0 = \mathbb{Q}_0 \subset_c \mathbb{Q}_1 \subset_c \cdots \subset_c \mathbb{Q}_n$$

という M 内に作られる連鎖に対応し，M_n は $M[H_n]$ という形で M 上の $\mathbb{Q}_n$-ジェネリック集合から得られることになります．

より一般に，α 段階の繰り返しは

$$\mathbb{P}_0 = \mathbb{Q}_0 \subset_c \mathbb{Q}_1 \subset_c \cdots \subset_c \mathbb{Q}_\xi \subset_c \cdots \subset_c \mathbb{Q}_\alpha$$

という連鎖を M 内で作ることに対応します．このように，この方法ではモデルの連鎖を作ることから始めるのではなく，そのかわり M 内で $\mathbb{Q}_\xi$ を作ることに力を注ぎます．これができてしまえば，$M_\xi = M[H_\alpha \cap \mathbb{Q}_\xi]$ と定義して結果的にモデルの連鎖も得られます．しかしそれはあくまで二次的な意味合いしかもちません．

このように半順序の連鎖を作るにしても，極限の段階をどうすればよいかという問題は依然として残ります．《M_ω とはなにか》というさきほどの問いが，今度は《$\mathbb{Q}_\omega$ とはなにか》という問いに変わったわけです．実際，反復強制法を応用するときこれが問題のタネになる場合もありますが，いつでもそうだというわけではありません．たとえば，$\mathrm{Con}(\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH})$ の証明の場合は単純明快に $\mathbb{Q}_\omega = \bigcup_n \mathbb{Q}_n$ とすればうまくいきます．ですから，この章の大部分は後続型順序数の段階の面倒

をみることに充てられ，そしてそれは二段階の繰り返しの場合に帰着します．いいかえれば，M 内に $\mathbb{P}_0$, $M[G_0]$ (すなわち M_1) 内に $\mathbb{P}_1$ が与えられたとして $\mathbb{Q}_1$ を定義する方法に帰着します．

$\mathbb{P}_1$ があらかじめ M 内にあるという特殊ケースは一般の場合に比べてずっと簡単で，さすがに Con(MA+¬CH) を示すのには使えないものの，これだけでもかなり応用は効きます．第 1 節で，$\mathbb{P}_1 \in M$ のときは単に $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ とすればよいということを示します．第 2 節から第 4 節にかけて，この特殊ケースの応用として，コーエン拡大 ($\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$) についてのいろいろな結果や ¬KH の無矛盾性を証明します．また，無限個の正則基数のところで GCH を破る例を与えます．

第 5 節では $\mathbb{P}_1$ が M に属さない一般の反復強制法の理論を提示します．第 6 章ではこの理論を応用して Con(MA+¬CH) を証明します．

§1 半順序の積

定義 1.1. $\langle \mathbb{P}_0, \leq_0, \mathbb{1}_0 \rangle$ と $\langle \mathbb{P}_1, \leq_1, \mathbb{1}_1 \rangle$ という二つの半順序があるとき，その積半順序

$$\langle \mathbb{P}_0, \leq_0, \mathbb{1}_0 \rangle \times \langle \mathbb{P}_1, \leq_1, \mathbb{1}_1 \rangle = \langle \mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1, \leq, \mathbb{1} \rangle$$

は，順序づけ $\langle p_0, p_1 \rangle \leq \langle q_0, q_1 \rangle \leftrightarrow p_0 \leq q_0 \wedge p_1 \leq q_1$ と最大要素 $\mathbb{1} = \langle \mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1 \rangle$ をもつとして定められる．このとき，写像 $i_0 : \mathbb{P}_0 \to \mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ と $i_1 : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ をそれぞれ $i_0(p_0) = \langle p_0, \mathbb{1}_1 \rangle$, $i_1(p_1) = \langle \mathbb{1}_0, p_1 \rangle$ によって定義する．□

$\mathbb{P}_0$ と $\mathbb{P}_1$ について話すときでも，普段はそれぞれの $\leq$ や $\mathbb{1}$ の添字を省きます．

半順序に最大要素があることが本当に役に立つのはここからです．第 VII 章では，$\check{x}$ の定義をちょっと手直しすれば，半順序が最大要素をもたねばならないという制限を外すことができました (第 VII 章演習問題 B1)．ここでもその制限を外すことは可能ですが，i_0 と i_1 の定義に $\mathbb{1}_0$ と $\mathbb{1}_1$ が必要なので，それをやるのは前よりも手間がかかります．

補題 1.2. 定義 1.1 の i_0 と i_1 はいずれも完備埋め込み写像である．

【証明】 第 VII 章定義 7.1 の条件 (1) と (2) はすぐにわかる．i_0 が条件 (3) をみたすことを確かめるには，$\mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ の要素 $\langle p_0, p_1 \rangle$ に対して p_0 がその $\mathbb{P}_0$ への縮約になっていることがわかればよい．□

補題 1.3. $\mathbb{P}_0$ と $\mathbb{P}_1$ を M に属する半順序とし，G を M 上の $\mathbb{P}_0\times\mathbb{P}_1$-ジェネリック集合とする．このとき $i_0^{-1}(G)$ は M 上 $\mathbb{P}_0$-ジェネリックであり，$i_1^{-1}(G)$ は M 上 $\mathbb{P}_1$-ジェネリックであって，しかも $G=i_0^{-1}(G)\times i_1^{-1}(G)$ である．

【証明】 $i_0^{-1}(G)$ と $i_1^{-1}(G)$ がジェネリックであることは i_0 と i_1 が完備埋め込み写像であることから (第 VII 章定理 7.5 によって) 導かれる．$\langle p_0,p_1\rangle\in G$ のときは $\langle p_0,\mathbb{1}\rangle\in G$ かつ $\langle\mathbb{1},p_1\rangle\in G$ なので $p_0\in i_0^{-1}(G)$ かつ $p_1\in i_1^{-1}(G)$ となり，$\langle p_0,p_1\rangle\in i_0^{-1}(G)\times i_1^{-1}(G)$ である．いっぽう $\langle p_0,p_1\rangle\in i_0^{-1}(G)\times i_1^{-1}(G)$ のときは $\langle p_0,\mathbb{1}\rangle$ と $\langle\mathbb{1},p_1\rangle$ がともに G に属するので，両者に共通の拡大 $\langle q_0,q_1\rangle$ がある．すると $\langle q_0,q_1\rangle\leq\langle p_1,p_1\rangle$ となるので $\langle p_1,p_1\rangle\in G$ である．□

こうして，$\mathbb{P}_0\times\mathbb{P}_1$-ジェネリック集合はすべて，$M$ 上の二つのジェネリック集合 G_0 と G_1 によって $G_0\times G_1$ と表されることがわかりました．かといって，この形の積がいつでもジェネリックになるわけではありません．たとえば $\mathbb{P}\times\mathbb{P}$ において $G\times G$ の形の集合は普通はジェネリックにはなりません (演習問題 J1 を見てください)．$G_0\times G_1$ がジェネリックであるためには G_1 は $M[G_0]$ 上のジェネリックでなければなりません．このことは次の定理からわかります．この定理はまた積 $\mathbb{P}_0\times\mathbb{P}_1$ と強制法の二段階の反復との関連づけを明らかにします．

定理 1.4. $\mathbb{P}_0$ と $\mathbb{P}_1$ を M に属する半順序とし，$G_0\subset\mathbb{P}_0, G_1\subset\mathbb{P}_1$ とするとき，次の (1) から (3) までは互いに同値である．

(1) $G_0\times G_1$ が M 上 $\mathbb{P}_0\times\mathbb{P}_1$-ジェネリックである．

(2) G_0 が M 上 $\mathbb{P}_0$-ジェネリックであり，G_1 が $M[G_0]$ 上 $\mathbb{P}_1$-ジェネリックである．

(3) G_1 が M 上 $\mathbb{P}_1$-ジェネリックであり，G_0 が $M[G_1]$ 上 $\mathbb{P}_0$-ジェネリックである．

さらに，この (1) から (3) までが成立しているとき $M[G_0\times G_1]=M[G_0][G_1]=M[G_1][G_0]$ である．□

【証明】 ここでは (1) と (2) の同値性を証明する．(1) と (3) の同値性の証明もまったく同じ．まず (1) から (2) を導くために (1) を仮定する．補題 1.3 により G_0 すなわち $i_0^{-1}(G_0\times G_1)$ は M 上 $\mathbb{P}_0$-ジェネリックである．G_1 が $M[G_0]$ 上 $\mathbb{P}_1$-ジェネリックであることを示したいので，$M[G_0]$ に属する $\mathbb{P}_1$ の稠密部分集合 D がなにか与えられたとする．$M^{\mathbb{P}_0}$ の要素 τ を $D=\tau_{G_0}$ をみたすとして，

$$p_0 \Vdash (\tau \text{ は } \check{\mathbb{P}}_1 \text{ において稠密}) \tag{a}$$

となる G_0 の要素 p_0 を考える．$\mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ の部分集合 D' を

$$D' = \{\langle q_0, q_1 \rangle : (q_0 \leq p_0) \wedge (q_0 \Vdash \check{q}_1 \in \tau)\}$$

によって定めよう．

まず D' が $\langle p_0, \mathbb{1} \rangle$ 以下で稠密となることを示す．$\langle r_0, r_1 \rangle \leq \langle p_0, \mathbb{1} \rangle$ だったとしよう．$r_0 \leq p_0$ なので

$$r_0 \Vdash \exists x \in \check{\mathbb{P}}_1 (x \in \tau \wedge x \leq \check{r}_1) \tag{b}$$

となり，したがって

$$q_0 \Vdash (\check{q}_1 \in \tau \wedge \check{q}_1 \leq \check{r}_1)$$

となるような $\mathbb{P}_1$ の要素 q_1 と r_0 の拡大 q_0 がある．このとき $\langle q_0, q_1 \rangle \leq \langle q_0, q_1 \rangle$ かつ $\langle q_0, q_1 \rangle \in D'$ である．

ここで $\langle p_0, \mathbb{1} \rangle \in G_0 \times G_1$ であるから，$(G_0 \times G_1) \cap D'$ の要素 $\langle q_0, q_1 \rangle$ がある．このとき $q_0 \Vdash \check{q}_1 \in \tau$ であるから $q_1 \in \tau_{G_0} = D$，また $q_1 \in G_1$ でもあるから，$G_1 \cap D \neq 0$ である．

次に (2) から (1) を導くために (2) を仮定しよう．$G_0 \times G_1$ がフィルターであることは簡単にわかる．それがジェネリックであることを示すために，M に属する $\mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ の稠密部分集合 D を考えよう．これに対して

$$D^* = \{p_1 : \exists p_0 \in G_0 (\langle p_0, p_1 \rangle \in D)\}$$

を考えるとこれは $M[G_0]$ に属し，

$$D^* \cap G_1 \neq 0 \rightarrow D \cap (G_0 \times G_1) \neq 0$$

となる．だからあとは D^* が $\mathbb{P}_1$ の稠密部分集合であることがチェックできればよい．$\mathbb{P}_1$ の任意の要素 r_1 を考えよう．すると，集合

$$D_0 = \{p_0 : \exists p_1 \leq r_1 (\langle p_0, p_1 \rangle \in D)\}$$

は M に属する $\mathbb{P}_0$ の稠密部分集合である．そこで，$D_0 \cap G_0$ の要素 p_0 をとり，それから r_1 の拡大 p_1 を $\langle p_0, p_1 \rangle \in D$ となるようにとろう．このとき p_1 は D^* に属する r_1 の拡大となる．

最後に，$M[G_0 \times G_1] = M[G_0][G_1]$ は各々のジェネリック拡大の最小性から次のようにして導かれる．まず，$M \subset M[G_0][G_1]$ と $G_0 \times G_1 \in M[G_0][G_1]$ から $M[G_0 \times G_1] \subset M[G_0][G_1]$．いっぽう，$M \subset M[G_0 \times G_1]$ と $G_0 \in M[G_0 \times G_1]$ から $M[G_0]$

$\subset M[G_0 \times G_1]$ であり，さらに $G_1 \in M[G_0 \times G_1]$ でもあることから $M[G_0][G_1] \subset M[G_0 \times G_1]$ となる．□

いまの議論を注意深く読み直せば，あちこちでずさんな記号の使い方をしていることは明らかです．式 (a) の $\Vdash$ は本当は $\Vdash_{\mathbb{P}_0}$ と書くべきでした．また，どのモデルを基礎モデルとして話をしているのかは文脈から判断しなければなりません．たとえば (a) は M 上で強制していて $M[G_1]$ のことはなにも言っていないのですが，もしも $M[G_1]$ を拡大して $M[G_1][G_0]$ を作ろうという話の中で $p_0 \Vdash \phi$ という式が出てきたのだったら，それは $M[G_1]$ 上での強制を意味しているわけです．さらに，式 (b) の中の記号 $\leq$ は実際には M の要素である $\leq_1$ を対象として指示しているので，式の中では $(\leq_1)\check{}$ と書くべきでした．

強制の積についての理論はこれでおしまいです．続く第 2 章から第 4 章まででは，応用例をいくつか述べます．反復強制法の一般理論 (第 5 章) と違って，積の応用例では $\mathbb{P}_0$ と $\mathbb{P}_1$ を用意してから積 $\mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ を作ることはあまりありません．第 2 章で $\mathrm{Fn}(I,2)$ についてやるように，むしろ一つ半順序 $\mathbb{P}$ がハジメカラ (ab initio) 明示的に定義されている状態から始めて $\mathbb{P}$-拡大 $M[G]$ を普通に構成し，もっと進んだ結果を得るために $\mathbb{P}$ をなにか $\mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ の形に因数分解するという方法をとります．

もしもお望みなら，ここからすぐに第 5 節へ進むこともできます．それでも話のつながりは失われません．

§2　コーエンのモデルについてもう少し

ここで言うコーエンのモデルとは，コーエンが $\neg$CH の無矛盾性をはじめて証明したときに用いたのと同じ $\mathrm{Fn}(I,2)$ という形の半順序によるジェネリック拡大のことです．この節では，コーエンのジェネリック拡大について追加しておくべき結果をいくつか導きます．

$\mathrm{Fn}(I,2)$ はさまざまな意味で積半順序と考えることができます．すなわち，I の任意の部分集合 $I_0 \subset I$ について，$\mathrm{Fn}(I,2)$ は $\mathrm{Fn}(I_0,2) \times \mathrm{Fn}(I \setminus I_0, 2)$ と同型になります．この事実を用いると，第 1 節で得られた基本的な結果をすべて $\mathrm{Fn}(I,2)$ についての主張に書き換えることができます．次の定理は，私たちにとってこれから必要になる範囲で第 1 節の結果を書き換えたものです．

定理 2.1. $I = I_0 \cup I_1$, $I_0 \cap I_1 = 0$, $I_0, I_1 \in M$ としよう．G を M 上の $\mathrm{Fn}(I,2)$-ジェ

ネリック集合とし，$G_0=G\cap\mathrm{Fn}(I_0,2), G_1=G\cap\mathrm{Fn}(I_1,2)$ とおく．すると，G_0 は M 上 $\mathrm{Fn}(I_0,2)$-ジェネリック，G_1 は $M[G_0]$ 上 $\mathrm{Fn}(I_1,2)$-ジェネリックであって，$M[G]=M[G_0][G_1]$ が成立する．

【証明】 写像 $j:\mathrm{Fn}(I_0,2)\times\mathrm{Fn}(I_1,2)\to\mathrm{Fn}(I,2)$ を $j(p_0,p_1)=p_0\cup p_1$ によって定めよう．この j が同型写像になることは簡単にわかる．そこで，$H=j^{-1}(G)$ とおけば (第 VII 章系 7.6 より) これは M 上 $\mathrm{Fn}(I_0,2)\times\mathrm{Fn}(I_1,2)$-ジェネリックで $M[G]=M[H]$ である．補題 1.3 から，$H_0=i_0^{-1}(H), H_1=i_1^{-1}(H)$ とすれば $H=H_0\times H_1$ となる．定理 1.4 から，H_0 は M 上 $\mathrm{Fn}(I_0,2)$-ジェネリック，H_1 は $M[H_0]$ 上 $\mathrm{Fn}(I_1,2)$-ジェネリックであって $M[G]=M[H]=M[H_0][H_1]$ となっている．ところがここで

$$H_0=\{p_0\in\mathrm{Fn}(I_0,2):\langle p_0,\mathbb{1}\rangle\in H\}=\{p_0\in\mathrm{Fn}(I_0,2):\langle p_0\cup 0\in H\}=G_0$$

であり，同様に $H_1=G_1$ である．□

定理 2.1 の便利なところは，$M[G]$ の中の小さな集合はある小さな I_0 に対応する $M[G_0]$ に属している，という点にあります．もっと詳しくいえば，次のことが成立します．

補題 2.2. I と S は M に属するとする．G を M 上の $\mathrm{Fn}(I,2)$-ジェネリック集合とし X を $M[G]$ に属する S の部分集合とすると，I 部分集合 I_0 で $X\in M[G\cap\mathrm{Fn}(I_0,2)], I_0\in M, (|I_0|\le|S|)^M$ をみたすものがある．

【証明】 S が有限集合のときは $X\in M$ になってしまうので，以下では S は無限集合であるとする．(第 VII 章定義 5.11 で言った意味で) $\check{S}$ の部分集合の都合のよい名前 τ で $X=\tau_G$ をみたすものをとると，ある $\mathrm{Fn}(I,2)$ の反鎖 $A_s\,(s\in S)$ を用いて

$$\tau=\bigcup_{s\in S}(\{\check{s}\}\times A_s)$$

と書ける．そこで $I_0=\bigcup\{\mathrm{dom}(p):\exists s\in S(p\in A_s)\}, G_0=G\cap\mathrm{Fn}(I_0,2)$ とおこう．M 内で考えたとして，$\mathrm{Fn}(I,2)$ が c.c.c. をみたすことにより，$|A_s|\le\omega$ であり，したがって $|I_0|\le|S|$ が M において成立する．どの A_s も $\mathrm{Fn}(I_0,2)$ に含まれるので τ は $\mathrm{Fn}(I_0,2)$-名前であって，

$$\tau_G=\{\,s\in S:\exists p\in G_0\,(p\in A_s)\,\}=\tau_{G_0}\in M[G_0]$$

となる．□

そこで $M[G]$ に属する ω の部分集合はどれも，M に属するある $\mathrm{Fn}(\omega,2)$ と同型

な半順序による拡大に属する，ということになります．$\mathrm{Fn}(\omega,2)$ による拡大は CH を保存するので，CH から導かれるある命題が任意の $\mathrm{Fn}(I,2)$ による拡大 $M[G]$ においても成立していることを証明するために，補題 2.2 を用いることが可能です．たとえば，M において CH が成立しているならば $M[G]$ において ω の ω_1 個の部分集合からなるほとんど交わりのない極大集合族 (m.a.d.f. — 定義は第 II 章の定義 1.1) が存在するという結果を次に証明します．第 II 章の系 2.16 によれば，この結果は CH が成立していない場合は MA と相容れません．ただし，ここで考えているタイプの拡大モデルにおいて MA が成立しないことを証明するためだけなら，もっと簡単な方法があります (第 VII 章演習問題 G7).

定理 2.3. I が M に属するとし，また M において CH が成立しているとする．また G を M 上の $\mathrm{Fn}(I,2)$-ジェネリック集合とする．このとき，$M[G]$ において，サイズが ω_1 であるような m.a.d.f. が存在する．

【証明】 M においてサイズが ω_1 の m.a.d.f. $\mathcal{A}$ で次の性質をもつものを定義しよう：$\mathcal{A}$ は M において m.a.d.f. であるばかりでなく，I を M の任意の集合，G を M 上の任意の $\mathrm{Fn}(I,2)$-ジェネリック集合とするとき，$M[G]$ においても $\mathcal{A}$ は依然として m.a.d.f. である．補題 2.2 によれば，M において可算な I_0 に対応する $\mathrm{Fn}(I_0,2)$-ジェネリック拡大において $\mathcal{A}$ が極大であることを確かめれば十分である．なぜなら，$M[G]$ に属する ω の部分集合 X はどれも，そうした I_0 の一つについて $M[G\cap\mathrm{Fn}(I_0,2)]$ に属するからである．さて，I_0 が有限であれば $M[G_0]=M$ であるし，I_0 が M において可算無限であれば $\mathrm{Fn}(I_0,2)$ は $\mathrm{Fn}(\omega,2)$ と M 内の同型写像で写りあう．ところが (第 VII 章系 7.6 によると)，M 内の同型写像でうつりあう二つの半順序からは同じジェネリック拡大が得られるので，結局，M における m.a.d.f. $\mathcal{A}$ をうまく定義して，M 上のどんな $\mathrm{Fn}(\omega,2)$-ジェネリック集合 G についても，$M[G]$ に属する ω の無限部分集合で $\mathcal{A}$ の全要素とほとんど交わらないようなものが存在しないようにすればよい．

ここから先では，強制法の用語はすべて半順序 $\mathrm{Fn}(\omega,2)$ について言っているとする．集合族 $\mathcal{A}$ は次のようにして M 内で構成される．CH を利用して $\mathrm{Fn}(\omega,2)$ の要素 p と $\check{\omega}$ の部分集合の都合のよい名前 τ のペア $\langle p,\tau\rangle$ の全体を $\langle p_\xi,\tau_\xi\rangle$ $(\omega\leq\xi<\omega_1)$ のように数え上げておく．ω の無限部分集合 A_ξ を再帰的に選んでいこう．まず各自然数 n に対応する A_n を，これらが互いに交わりのない無限集合であるように選ぶ．次に，$\omega\leq\xi<\omega_1$ をみたす順序数 ξ について，ξ より小さいすべての

η に対応する A_η がすでに選ばれたとしたら，(1) $\forall\eta<\xi\,(|A_\eta\cap A_\xi|<\omega)$, となるように，そしてさらに，(2) もしも

$$p_\xi \Vdash (|\tau_\xi|=\omega) \quad \text{かつ} \quad \forall\eta<\xi\,[p_\xi \Vdash (|\tau_\xi\cap\check{A}_\eta|<\check{\omega})] \tag{$*$}$$

であった場合には，

$$\forall n\in\omega\,\forall q\le p_\xi\,\exists r\le q\,\exists m\ge n\,(m\in A_\xi\wedge r\Vdash \check{m}\in\tau_\xi)$$

となるように，A_ξ を選ぶ．ここで，実際にこういう A_ξ が存在することを確認しておく必要がある．$(*)$ が成り立たないとき考慮すべき条件は (1) だけだから，サイズ ω の m.a.d.f. が存在しないという (第 II 章定理 1.2 (a) の) 結果を使えばよい．そこで，$(*)$ が成り立っている場合を考える．$\{A_\eta:\eta<\xi\}$ の要素を数え上げて B_i $(i\in\omega)$ とし，$\omega\times\{q:q\le p_\xi\}$ の要素を数え上げて $\langle n_i,q_i\rangle$ $(i\in\omega)$ としよう．すべての番号 i について，仮定 $(*)$ により

$$q_i \Vdash (|\tau_\xi\setminus(\check{B}_0\cup\cdots\cup\check{B}_i)|=\check{\omega})$$

となっているので，半順序の要素 r_i と自然数 m_i を，$r_i\le q_i$, $m_i\ge n_i$, $m_i\notin B_0\cup\cdots\cup B_i$, $r_i\Vdash \check{m}_i\in\tau_\xi$ という条件をみたすように選べる．そこで $A_\xi=\{m_i:i\in\omega\}$ とおけばよい．

さて，$\mathcal{A}=\{A_\xi:\xi<\omega_1^M\}$ とおき，M 上の $\mathrm{Fn}(\omega,2)$-ジェネリック集合 G を考える．仮に $\mathcal{A}$ が $M[G]$ において極大でなかったとしたら，$p_\xi\in G$ と $p_\xi\Vdash|\tau_\xi|=\check{\omega}$ と $p_\xi\Vdash\forall X\in\mathcal{A}\,(|\tau_\xi\cap X|<\check{\omega})$ をみたすペア $\langle p_\xi,\tau_\xi\rangle$ がある．つまりそのような ξ に対しては $(*)$ が成立している．いっぽう $p_\xi\Vdash|\tau_\xi\cap\check{A}_\xi|<\omega$ でもあるので，p の拡大 q と自然数 n を $q\Vdash(\tau_\xi\cap\check{A}_\xi\subset\check{n})$ となるようにとれる．ところがこれは $\exists r\le q\,\exists m\ge n\,(m\in A_\xi\wedge r\Vdash\check{m}\in\tau_\xi)$ という条件 (2) の主張と矛盾する．□

MA から導かれる命題のなかには，コーエン拡大において同様に成立するものもあります．たとえば，極大独立集合族はどれもサイズが 2^ω になります．

定義 2.4. $\mathcal{P}(\omega)$ の部分集合 $\mathcal{A}$ が**独立集合族**であるとは，$a_1,\ldots,a_m$, $b_1,\ldots,b_n$ を $\mathcal{A}$ の有限個の互いに異なる要素とするとき，必ず

$$|a_1\cap\cdots\cap a_m\cap(\omega\setminus b_1)\cap\cdots\cap(\omega\setminus b_n)|=\omega$$

となることをいう．この性質をもつ集合のうちで極大であるものを**極大独立集合族** (略して m.i.f.) と呼ぶ．□

ほとんど交わりのない集合族の場合と同じように，サイズが 2^ω の独立集合族は

必ず存在します (演習問題 A6). したがって，サイズ 2^ω の m.i.f. も存在します. 残る問題は，すべての m.i.f. のサイズが 2^ω なのか，ということです. 対角線論法を使えば，どんな m.i.f. も不可算であることは簡単にわかるので (演習問題 A15)，この問題を扱うには ¬CH のモデルを考える必要が出てきます. つい先ほど m.a.d.f. について示したのと同じく，¬CH とサイズが ω_1 の m.i.f. の存在は両立します. しかしこのことを証明するには反復強制法による拡大を扱わなければなりません (演習問題 A13). コーエン拡大モデルにおいては，このあと定理 2.6 で示すとおり，どんな m.i.f. のサイズも 2^ω になります.

どの m.i.f. もサイズ 2^ω をもつことは，MA から導かれる結果でもあります. これは，$\mathrm{Fn}(\omega,2)$ に MA を適用して補題 2.5 の証明とまったく同じように議論すれば解ける簡単な演習問題 (A15) です. 一般に，MA から導かれる結果のうち $\mathrm{Fn}(I,2)$ という形の半順序だけを使って証明されるものは，コーエン拡大においても成立します. 第 6 節でやるように，MA + ¬CH のモデルを得るためには，存在する可能性のあるすべての c.c.c. 半順序について強制法を繰り返さなくてはなりません.

補題 2.5. M に属する $\mathcal{P}(\omega)$ の部分集合 $\mathcal{A}$ を考える. I を M に属する無限集合とし，G を M 上の $\mathrm{Fn}(I,2)$-ジェネリック集合とする. このとき $M[G]$ において $\mathcal{A}$ は m.i.f. ではない.

【証明】 まず，$I=\omega$ の場合を考えれば十分であることを示そう. M に属する I の部分集合 I_0 で $(|I_0|=\omega)^M$ となるものを考えると，$M[G\cap\mathrm{Fn}(I_0,2)]\subset M[G]$ であり，M 上のなんらかの $\mathrm{Fn}(\omega,2)$-ジェネリック集合 H によって $M[G\cap\mathrm{Fn}(I_0,2)]=M[H]$ となる.

訳注：ここで，$M[H]$ において $\mathcal{A}$ が m.i.f. でないことが示されれば，$M[H]$ よりもっと広い $M[G]$ においては，なおさら $\mathcal{A}$ は m.i.f. でないわけです.

$I=\omega$ であれば $\bigcup G$ は ω から 2 への関数なので，ω の部分集合 $C=\{n\in\omega:\bigcup G(n)=1\}$ の特徴関数である. ここでは，ω の任意の無限部分集合 B について，$B\in M$ ならば $B\cap C$ と $B\setminus C$ の両方が無限集合になることを示す. そのとき $\mathcal{A}$ が M に属する独立集合族であれば $\mathcal{A}\cup\{C\}$ も独立集合族になるから，$\mathcal{A}$ は $M[G]$ において m.i.f. ではない.

$B\cap C$ が無限集合であることを示すには，任意の自然数 m について，集合

$$\{p:\exists n>m\,(p(n)=1\wedge n\in B)\}$$

が M に属する $\mathrm{Fn}(\omega,2)$ の稠密部分集合であることに注意すればよい．$B\setminus C$ が無限集合であることは，

$$\{p : \exists n > m\,(p(n)=0 \wedge n \in B)\}$$

を使えば同様にして示される．□

定理 2.6. κ を M の無限基数で $\kappa^{\omega}=\kappa$ を (M において) みたすものとし，G を M 上の $\mathrm{Fn}(\kappa,2)$-ジェネリック集合とする．すると，$M[G]$ において $2^{\omega}=\kappa$ であり，すべての m.i.f. は濃度 κ をもつ．

【証明】 $\mathrm{Fn}(\kappa,2)$ と $\mathrm{Fn}(\kappa\times\omega,2)$ は M に属する同型写像によって写りあうので，第 VII 章の補題 5.14 により $2^{\omega}=\kappa$ はすぐにわかる．次に，$\mathcal{A}$ を $M[G]$ に属する独立集合族とし，$M[G]$ における $\mathcal{A}$ のサイズ λ は κ 未満であるとする．このとき $\mathcal{A}$ は極大でないことを示そう．

$M[G]$ において $\mathcal{A}=\{A_{\xi}:\xi<\lambda\}$ と数え上げたとして，

$$X=\{\,\langle\xi,n\rangle : n\in A_{\xi}\,\}\subset\lambda\times\omega$$

とおく．補題 2.2 により，M に属する I の部分集合 I_0 で，$(|I_0|\leq\lambda)^M$ と $X\in M[G\cap\mathrm{Fn}(I_0,2)]$ をみたすものがある．そこで $G_0=G\cap\mathrm{Fn}(I_0,2)$ とおく．また，$I_1=I\setminus I_0$, $G_1=G\cap\mathrm{Fn}(I_1,2)$ とおく．すると，定理 2.1 により G_1 は $M[G_0]$ 上 $\mathrm{Fn}(I_1,2)$-ジェネリックで，$M[G]=M[G_0][G_1]$ である．さらに，I_1 は無限集合で $\mathcal{A}\in M[G_0]$ であるから，補題 2.5 を $M[G_0]$ と I_1 に適用すると $\mathcal{A}$ が $M[G_0][G_1]$ において極大でないことがわかる．□

§3　クレパの仮説の独立性

私たちはすでに，(第 II 章系 7.11 と第 VI 章定理 5.2 により) クレパの仮説 KH が $\mathbf{L}$ において成立するので，Con(ZFC) である限り Con(ZFC+KH) でもあると知っています．また，第 VII 章の演習問題 H19 によれば，どんな c.t.m. も KH が成立するモデルへとジェネリック拡大できます．第 VII 章系 8.9 では，M 内に強到達不能基数が必要だったものの，M のレヴィ式拡大において KH が成立していることも示しました．

ここでは，M 内に強到達不能基数があれば M のあるジェネリック拡大が ¬KH をみたす，というシルヴァーの証明を紹介します．第 VII 章演習問題 B8 によれ

ば，$\neg$KH から ω_2 が $\mathbf{L}$ にとって到達不能基数であることが導かれるので，この証明での到達不能基数の使用は避けられず，したがって

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\neg\mathrm{KH})\leftrightarrow\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\exists\kappa\,(\kappa\text{ は到達不能基数}))$$

という結果が得られます．

シルヴァーの半順序は，有限部分関数ではなく可算無限の部分関数を用いるということを除いて，レヴィの半順序と同じです．まずはそうしたジェネリック拡大についての基本事項を呈示しておきます．これは第 VII 章第 8 節での $\mathrm{Lv}(\kappa)$ の扱いとほとんど変わりがありません．

定義 3.1.

$$\mathrm{Lv}'(\kappa)=\{p:|p|\leq\omega\wedge p\text{ は関数}\wedge$$
$$\mathrm{dom}(p)\subset\kappa\times\omega_1\wedge\forall\langle\alpha,\xi\rangle\in\mathrm{dom}(p)\,(p(\alpha,\xi)\in\alpha)\}.$$

この $\mathrm{Lv}'(\kappa)$ を包含関係の逆の順序で順序づけする．□

補題 3.2. $\mathrm{Lv}'(\kappa)$ は ω_1-閉である．また κ が強到達不能基数であるとき $\mathrm{Lv}'(\kappa)$ は κ-c.c. をみたす．

【証明】 $\mathrm{Lv}(\kappa)$ の場合 (第 VII 章補題 8.7) とまったく同じように，κ-c.c. は Δ-システムの論法によって証明できる．□

補題 3.3. κ を M における強到達不能基数とする．また，G を M 上の $\mathrm{Lv}'(\kappa)$-ジェネリック集合とする．このとき $\omega_1^{M[G]}=\omega_1^M$ かつ $\omega_2^{M[G]}=\kappa$ となる．

【証明】 ω_1-閉な半順序は ω_1 を保存する (第 VII 章系 6.15)．また，κ-c.c. をみたす半順序は κ 以上の基数を保存する (第 VII 章補題 6.9)．したがって，ω_1^M と κ は $M[G]$ における基数である．しかし，$0<\alpha<\kappa$ であるような α については，第 VII 章定理 8.8 と同じように，$(\bigcup G)_\alpha$ を $(\bigcup G)_\alpha(\xi)=\bigcup G(\alpha,\xi)$ によって定義すれば，ω_1^M から α の上への関数になっている．□

ここで T を M における ω_1-木の一つとしましょう．M において T がクレパ木であるということは大いにありえますが，それでもたかだか $(2^{\omega_1})^M$ 本の道をもつだけです．ところが $(2^{\omega_1})^M<\kappa=\omega_2^{M[G]}$ です．そして次の補題がシルヴァーの証明の急所ですが，そこでは $M[G]$ において T に新しい道が追加されることはないことが示されます．したがって，T は $M[G]$ においてクレパ木ではなくなります．

補題 3.4. M において，T は ω_1-木，$\mathbb{P}$ は ω_1-閉な半順序であるとする．G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とし，C を $M[G]$ における T の一つの道とする．このとき $C\in M$ である．

【証明】 そうでなかったと仮定して矛盾を導く．$\mathcal{C}=(\mathcal{P}(T))^M=\mathcal{P}(T)\cap M$ とおくと仮定により $C\notin\mathcal{C}$ である．$C=\tau_G$ をみたす τ を一つ決めて，G の要素 p を

$$p\Vdash[(\tau \text{ は } \check{T} \text{ の道である})\wedge\tau\notin\check{\mathcal{C}}] \tag{1}$$

となるようにとる．ここから先は，M の中に留まって作業して (1) から矛盾を導く．

ω_1 未満の順序数 α と $\mathbb{P}$ の要素 q に対して $q\|\tau_\alpha$ と書いたら，それは

$$\exists b\in\mathrm{Lev}_\alpha(T)\,(q\Vdash\check{b}\in\tau)$$

を意味する略記法だとする．この $\|$ という記号は，《決める》と読むこと．木の道は各々の水準の要素をちょうど一個ずつ含むことを思い出そう．τ_α という (非公式な) 記号は，τ 名前で表示される道の第 α 水準の要素をあらわしていると思うことにする．τ_α はジェネリックなフィルターに依存して変わりうるので，条件 q が τ_α を決定できることもできないこともあるだろう．けれども

$$p\Vdash\exists x\,(x\in(\mathrm{Lev}_\alpha(T))\check{}\wedge x\in\tau)$$

は成立するから，(第 VII 章系 3.7 (d) により) ω_1 未満のどの α についても

$$\text{集合 } \{q\leq p: q\|\tau_\alpha\} \text{ は } p \text{ 以下で稠密} \tag{2}$$

である．ところがそのいっぽうで

$$q\leq p\rightarrow\exists\alpha\neg(q\|\tau_\alpha) \tag{3}$$

でもある．これを示すために $\forall\alpha(q\|\tau_\alpha)$ と仮定しよう．$q\Vdash(\check{b}_\alpha\in\tau)$ をみたす $b_\alpha\in\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ をとって $B=\{b_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ とおく．すると $q\Vdash\tau=\check{B}$ であるから $q\Vdash\tau\in\check{\mathcal{C}}$ でなければならないが，これは $p\Vdash\tau\notin\mathcal{C}$ であるから起こりえない．

さらに，

$$[(q\leq p)\wedge(q\|\tau_\beta)\wedge(\alpha<\beta)]\rightarrow(q\|\tau_\alpha) \tag{4}$$

が成立する．これを示すには $q\Vdash(\check{b}\in\tau)$ となるような $\mathrm{Lev}_\beta(T)$ の要素 b を考えればよい．q は τ が $\check{T}$ の道であることを強制しているので，b の下にある水準 α の要素を a とすれば $q\Vdash(\check{a}\in\tau)$ である．

(3) と (4) より，$q\leq p$ であれば集合 $\{\alpha:q\|\tau_\alpha\}$ は ω_1 の真の切片である．そこで

$$\delta(q)=\{\alpha:q\|\tau_\alpha\}=\min\{\alpha:\neg(q\|\tau_\alpha)\}$$

とおこう．$\alpha\geq\delta(q)$ のときは $\neg(q\|\tau_\alpha)$ なので，強制条件 q と両立する τ_α の候補が複数存在する．もっときちんと書くと，

$$(q\leq p\wedge\alpha\geq\delta(q))\rightarrow\ \exists q_0,q_1\leq q\,\exists a_0,a_1\in\mathrm{Lev}_\alpha(T)$$
$$[(q_0\Vdash\check{a}_0\in\tau)\wedge(q_1\Vdash\check{a}_1\in\tau)\wedge a_0\neq a_1]\quad(5)$$

となっている．このことを証明するため，まず (2) を用いて q_0 と a_0 を $q_0\leq q$, $a_0\in\mathrm{Lev}_\alpha(T)$, $q_0\Vdash(\check{a}_0\in\tau)$ となるようにとる．ここで，$\neg(q\|\tau_\alpha)$ であることにより $\neg(q\Vdash\check{a}_0\in\tau)$ であるから，$r\leq q$ かつ $r\Vdash\check{a}_0\notin\tau$ をみたす r がとれる．これに (2) をもう一度適用すると，$q_1\leq r$, $a_1\in\mathrm{Lev}_\alpha(T)$, $q_1\Vdash(\check{a}_1\in\tau)$ をみたす q_1 と a_1 をとることができる．ここで $q_1\Vdash\check{a}_0\notin\tau$ であるから $a_0\neq a_1$.

(5) を ω 回続けて適用することにより，p を拡大する強制条件からなる (高さ ω の) 木を得ることにしよう．$2^{<\omega}$ の要素 s に対応する p_s と a_s, それと自然数 n に対応する順序数 α_n を，次の条件をみたすように定める．

(a) $\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots$.

(b) $\alpha_n\geq\max\{\delta(p_s):\mathrm{dom}(s)=n\}$.

(c) $p_{\langle\rangle}=p$ (ただし $\langle\rangle$ とは空列のこと).

(d) $a_{s\frown\langle 0\rangle}\neq a_{s\frown\langle 1\rangle}$ であり，$i=0,1$ それぞれについて $p_{s\frown\langle i\rangle}\leq p_s$ と $a_{s\frown\langle i\rangle}\in\mathrm{Lev}_{\alpha_n}(T)$ と $p_{s\frown\langle i\rangle}\Vdash(\check{a}_{s\frown\langle i\rangle}\in\tau)$ が成立する．

ここで $\gamma=\sup\{\alpha_n:n\in\omega\}$ とおき，$|\mathrm{Lev}_\gamma(T)|\geq 2^\omega$ を証明しよう．そうすれば矛盾が得られたことになる．${}^\omega 2$ の要素 f に対して

$$p\geq p_{\langle f(0)\rangle}\geq p_{\langle f(0),f(1)\rangle}\geq\cdots$$

である．$\mathbb{P}$ が ω_1-閉であることから，$\forall n\,(p_f\leq p_{f\restriction n})$ をみたす q_f が存在し，さらに $r_f\leq q_f$, $b_f\in\mathrm{Lev}_\gamma(T)$, $r_f\Vdash(\check{b}_f\in\tau)$ となる r_f と b_f を見つけることができる．ここで $\forall n\,(r_f\Vdash\check{a}_{f\restriction n}\in\tau)$ であるから $\forall n\,(a_{f\restriction n}<b_f)$ となる．$f\neq g$ のとき $\exists n\,(f\restriction n\neq g\restriction n)$ なので $b_f\neq b_g$ となる．こうして ${}^\omega 2$ の要素 f 一つ一つに $\mathrm{Lev}_\gamma(T)$ の相異なる要素 b_f が対応することになるが，これは $|\mathrm{Lev}_\gamma(T)|\leq\omega$ という ω_1-木の条件と矛盾する．□

補題 3.4 の状況で $M[G]$ 内に ω_1^M から $(2^{\omega_1})^M$ の上への関数が存在するなら，T は $M[G]$ においてクレパ木になりません．しかしこれは必ずしも $M[G]$ において

¬KH が成立することを意味しません．なぜなら，$M[G]$ のクレパ木は M に属するものとは限らないからです．$\mathrm{Lv}'(\kappa)$ によるジェネリック拡大において ¬KH が成立している理由は，この拡大を

$$M \subset M[G_0] \subset M[G_0][G_1] = M[G]$$

という拡大の繰り返しによって得られたものと考えられるところにあります．ここで G_0 は $T \in M[G_0]$ となるようにとられた G の《小さな》一部分とし，G_1 によって $M[G_0]$ における 2^{ω_1} を潰すわけです．こうすれば，補題 3.4 を $M[G_0]$ に対して適用することによって T は $M[G]$ においてクレパ木にならないことが示されます．これから述べるこの論法の詳細は，定理 2.1 と補題 2.2 にいくぶん似たものになっています．

定理 3.5. M において κ を強到達不能基数とし，$\mathbb{P} = \mathrm{Lv}'(\kappa)$ とする．G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とする．このとき $M[G]$ において ¬KH が成立する．

【証明】 次の段落の終わりまでは $M[G]$ 内で議論する．T を ω_1-木とする．T の道はたかだか ω_1 本しかないことを証明しよう．T は $\langle \omega_1, W \rangle$ という形のなんらかの木と同型になっている (W は可算順序数の間の木の順序づけになる)．互いに同型な木は同じ本数の道をもつので，$T = \langle \omega_1, W \rangle$ と仮定してかまわない．

W は $\omega_1^M \times \omega_1^M$ の部分集合であるから，$W = \sigma_G$ をみたすような，$(\omega_1^M \times \omega_1^M)\check{}$ の部分集合の都合のよい名前 σ が (M 内に) ある．

この段落は M 内での議論である．σ は都合のよい名前なので，$\omega_1 \times \omega_1$ の要素 s ごとに $\mathbb{P}$ の反鎖 A_s が存在して

$$\sigma = \bigcup \{ \{\check{s}\} \times A_s : s \in \omega_1 \times \omega_1 \}$$

となっている．$\mathbb{P}$ は κ-c.c. をみたすので $|A_s| < \kappa$ となっている．κ は正則基数なので，ω_1 以上 κ 未満の基数 θ を

$$\forall s \in \omega_1 \times \omega_1 \, \forall p \in A_s \, (\mathrm{dom}(p) \subset \theta \times \omega_1)$$

となるようにとれる．そこで

$$\mathbb{P}_0 = \{ p \in \mathbb{P} : \mathrm{dom}(p) \subset \theta \times \omega_1 \},$$

$$\mathbb{P}_1 = \{ p \in \mathbb{P} : \mathrm{dom}(p) \subset (\kappa \setminus \theta) \times \omega_1 \}$$

と定めよう．すると，定理 2.1 と同様の議論により $\mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ は $\mathbb{P}$ と同型になる．

$G_0 = G \cap \mathbb{P}_0, G_1 = G \cap \mathbb{P}_1$ と定義しよう．このとき定理 2.1 と同様の理由によ

り，G_0 は M 上 $\mathbb{P}_0$-ジェネリック，G_1 は $M[G_0]$ 上 $\mathbb{P}_1$-ジェネリックで，$M[G]=M[G_0][G_1]$ となる．また，補題 2.2 と同様にして $T\in M[G_0]$ となる．

$\mathbb{P}_1$ は M において ω_1-閉であるし，$\langle p_n:n\in\omega\rangle$ を $\mathbb{P}_1$ の要素の $M[G_0]$ に属する列とすれば $\langle p_n:n\in\omega\rangle\in M$ となる．なぜなら $\mathbb{P}_0$ も M において ω_1-閉だからである．そこで，$\mathbb{P}_1$ は $M[G_0]$ においても依然として ω_1-閉になる．そこで，$M[G_0]$ と $\mathbb{P}_1$ に対して補題 3.4 を用いれば，$M[G]$ (これは $M[G_0][G_1]$ である) に存在する T の道はすべて $M[G_0]$ 内に存在することになる．そこで $\lambda=(2^{\omega_1})^{M[G_0]}$ とおけば

$$(|\{C:C\text{ は }T\text{ の道}\}|\leq\lambda)^{M[G]}$$

が成立する．$\omega_2^{M[G]}=\kappa$ であるから，あとは $\lambda<\kappa$ を証明すればよい．

$M[G_0]$ に属する ω_1 の部分集合はどれも，$\check{\omega}_1$ の部分集合のある都合のよい名前 τ によって τ_{G_0} と表される．ここから先は M 内で考えよう．すると $|\mathbb{P}_0|\leq\theta^{\omega}$ である．この右辺を θ_1 と書くと，$\mathbb{P}_0$ には多くとも 2^{θ_1} 個の反鎖しかない．この個数を θ_2 と書くと，$\check{\omega}_1$ の都合のよい名前は多くとも $\theta_2^{\omega_1}$ 個しかない．そこで，この個数を θ_3 とすると $\lambda\leq\theta_3$ になる．いっぽう，κ は M において強到達不能基数なので $\theta_3<\kappa$ である．□

§4　イーストン式強制

この節では，無限個の正則基数の冪を一度に変更する方法を説明します．まずは，二個の基数の場合 (第 VII 章の定理 6.18) を，半順序の積に関してこれまでに得られた結果を用いて見なおすことから始めます．第 VII 章第 6 節では $\mathrm{Fn}(\kappa\times\lambda,2,\lambda)$ という形の半順序を用いました．ここではその代わりにそれと同型な $\mathrm{Fn}(\kappa,2,\lambda)$ を用いることにします．どちらでも同じジェネリック拡大が得られますが，書くのはこちらのほうが楽だからです (これについては第 VII 章の系 7.6 とそのあとの議論を見てください)．

M が GCH をみたすとき $2^{\omega_1}=\omega_4\wedge2^{\omega_3}=\omega_5$ をみたす拡大モデルが欲しかったとしましょう．第 VII 章の考え方でいけば，まず $\mathbb{P}_2=(\mathrm{Fn}(\omega_5,2,\omega_2))^M$ とおいて M 上の $\mathbb{P}_2$-ジェネリック集合 G_2 を考えることができます．このとき $M[G_2]$ においては $2^{\omega}=\omega_1\wedge2^{\omega_1}=\omega_2\wedge2^{\omega_2}=\omega_5$ となります．そこで次に $\mathbb{P}_1=(\mathrm{Fn}(\omega_4,2,\omega_1))^{M[G_2]}$ とおいて $M[G_2]$ 上の $\mathbb{P}_1$-ジェネリック集合 G_1 を考えます．すると，$M[G_2][G_1]$ において $2^{\omega_1}=\omega_4\wedge2^{\omega_2}=\omega_5$ が成立します．

この $\mathbb{P}_1$ は $(\mathrm{Fn}(\omega_4,2,\omega_1))^M$ でもあります．なぜなら，$M[G_2]$ における可算集合

のうち M の部分集合になっているものは，すべて M に属し，しかも M において もやはり可算集合だからです．したがって $\mathbb{P}_1 \in M$ なので，$G = G_1 \times G_2$ とおけば G は M 上 $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$-ジェネリックであって，(定理 1.4 によって) $M[G_2][G_1] = M[G]$ が成立します．ふたたび定理 1.4 によれば，このとき $M[G] = M[G_1][G_2]$ であって G_2 は $M[G_1]$ 上 $\mathbb{P}_2$-ジェネリックになります．ただし，M になかった新しいサイズ ω_1 の部分関数が $M[G_1]$ に存在するので，$\mathbb{P}_2$ は $\mathbb{P}_2 = (\mathrm{Fn}(\omega_5, 2, \omega_2))^{M[G_1]}$ ではありません．実際のところ $M[G_1]$ 上で $\mathbb{P}_2 = (\mathrm{Fn}(\omega_5, 2, \omega_2))^{M[G_1]}$ を用いた強制を行なえば ω_3 と ω_4 は潰れてしまう (第 VII 章演習問題 G3) のに対して，$\mathbb{P}_2$ を用いた $M[G_1]$ 強制は基数を保存します．というのも，$M[G_1][G_2] = M[G_2][G_1]$ であり，M と $M[G_2]$ と $M[G_2][G_1]$ における基数の全体は一致することがすでに示されているからです．積半順序を用いた強制は強制の繰り返しとみなすことができて，その際の強制の順番はどちらが先でも同じですが，ここでの $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ の場合は，上に述べたような理由から，まず M に ω_2 のジェネリックな部分集合を《普通のやり方で》ω_5 個つけ加えて $M[G_2]$ を得て，さらにそこへ ω_1 のジェネリックな部分集合を《普通のやり方で》ω_4 個つけ加えるために $M[G_2]$ 上で強制を実行する，と考えるのが《自然》でしょう．

では今度は $\forall n \in \omega\,(2^{\omega_n} = \omega_{n+3})$ をみたすモデルが欲しかったとしましょう．これを M の拡大の無限回の連鎖によってやり遂げる方法は明らかではないかもしれません．しかし，先ほどの積半順序を用いた構成法を拡張して試してみると，いちばん安直なやり方がうまくいくのです．$\mathbb{P}_n = (\mathrm{Fn}(\omega_{n+3}, 2, \omega_n))^M$ とおいて，それらの無限積 $\left(\prod_{n \in \omega} \mathbb{P}_n\right)^M$ を $\mathbb{P}$ としましょう．このあとで，G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とするとき，$M[G]$ が $\forall n \in \omega\,(2^{\omega_n} = \omega_{n+3})$ をみたすことが明らかになります．非公式な見方としては，ω_n のジェネリックな部分集合を ω_{n+3} 個つけ加えることを，最大の n から始めて (というのがどういう意味かはともかくとして) 繰り返すような反復強制法を，$\mathbb{P}$ によって作り出すのだと考えられます．

それではここからイーストン式強制法の理論をきちんと展開してゆきましょう．イーストン式強制法によって，正則基数の指数関数は，《見るからにマチガイ》であるようなもの以外のどんなものであってもかまわないということが示されます．

定義 4.1. (1) 索引関数とは，正則基数を要素とするある集合を定義域とするような関数である．

(2) イーストン式索引関数とは，次の条件 (a) と (b) をみたす索引関数 E のこと

である．

(a) $\mathrm{dom}(E)$ のすべての要素 κ に対して，$E(\kappa)$ は $\mathrm{cf}(E(\kappa))>\kappa$ をみたす基数である．

(b) $\forall\kappa,\kappa'\in\mathrm{dom}(E)\,(\kappa<\kappa'\rightarrow E(\kappa)\leq E(\kappa'))$.

(3) E を索引関数とするとき，次の条件 (a) から (c) までをみたす p 全体の集合を $\mathbb{P}(E)$ とあらわす．

(a) $\mathrm{dom}(p)=\mathrm{dom}(E)$.

(b) $\forall\kappa\in\mathrm{dom}(p)\,(p(\kappa)\in\mathrm{Fn}(E(\kappa),2,\kappa))$.

(c) ($\mathrm{dom}(E)$ に属しているかいないかによらず) すべての正則基数に対して，

$$|\{\kappa\in\lambda\cap\mathrm{dom}(E):p(\kappa)\neq 0\}|<\lambda.$$

$\mathbb{P}(E)$ に座標ごとの順序によって

$$p\leq p'\leftrightarrow\forall\kappa\in\mathrm{dom}(E)\,(p'(\kappa)\subset p(\kappa))$$

と順序づけする．また，$\mathbb{P}(E)$ における $\mathbb{1}$ とは，$\mathrm{dom}(E)$ に属するすべての κ について $\mathbb{1}(\kappa)=0$ となる関数だとする (すなわち，$\mathbb{1}(\kappa)$ は $\mathrm{Fn}(E(\kappa),2,\kappa)$ の $\mathbb{1}$ である)．□

大ざっぱに言えば，どんなイーストン式索引関数についても，それと正則基数の冪が一致することが集合論と矛盾しないことを，これから示します．イーストン式索引関数は先ほどの定義の (2) の (a) と (b) という二つの条件をみたしさえすればなんでもよかったわけですが，その二つの条件はそれぞれ $\mathrm{cf}(2^\kappa)>\kappa$ (ケーニヒの補題．第 I 章系 10.41) および $\kappa<\kappa'\rightarrow 2^\kappa\leq 2^{\kappa'}$ ($\mathcal{P}(\kappa)\subset\mathcal{P}(\kappa')$ ということによる) という二つの事実に対応しています．きちんと言えば，E が M における索引関数で M が GCH をみたすときには $(\mathbb{P}(E))^M$ は基数を保存することを証明し，さらに，E がイーストン式索引関数である場合に，$(\mathbb{P}(E))^M$ による強制の結果として

$$\forall\kappa\in\mathrm{dom}(E)\,(2^\kappa=E(\kappa))$$

が $M[G]$ において成立する，ということを示します．

$\mathbb{P}(E)$ の定義において条項 (3) の (c) がなかったとしたら，$\mathbb{P}(E)$ は積集合

$$\prod\{\mathrm{Fn}(E(\kappa),2,\kappa):\kappa\in\mathrm{dom}(E)\}$$

そのものになります．$\mathrm{dom}(E)$ の要素が基数ばかりであることを考えると，条件

(c) が意味をもつのは λ が弱到達不能基数である場合だけで，そのとき (c) は，λ 未満の κ に対する $p(\kappa)$ の値は λ 個未満の例外を除いて $\mathbb{1}$ (つまり空な関数) でなければならない，という主張になります．

しかし実際には，以下の議論で $\mathbb{P}(E)$ を無限積として扱うことはありません．第 2 節や第 3 節と同様，重要なのはむしろ $\mathbb{P}(E)$ がいろいろな仕方で二つの因子の積として扱えるということです．

定義 4.2. 索引関数 E に対して，$E^+_\lambda = E\restriction\{\kappa : \kappa > \lambda\}, E^-_\lambda = E\restriction\{\kappa : \kappa \le \lambda\}$ とおく．□

補題 4.3. E を任意の索引関数，λ を任意の基数とするとき，$\mathbb{P}(E)$ は $\mathbb{P}(E^+_\lambda)\times\mathbb{P}(E^-_\lambda)$ と同型である．□

第 1 節の結果を利用すれば，$\mathbb{P}(E)$ による拡大を，λ を任意の基数として，$\mathbb{P}(E^+_\lambda)$ で拡大したあとに $\mathbb{P}(E^-_\lambda)$ で拡大する反復強制法とみなすことができます．この事実はあとの議論で何度も使われます．気をつけておくべき特別の場合が二つあります．一つは $\mathrm{dom}(E)\cap\lambda^+=0$ の場合，もう一つは $\mathrm{dom}(E)\subset\lambda^+$ の場合です．これらの場合，積半順序の理論は不要ですが，だからといって特別扱いをせず一般論にこれらの場合も含めて考えておきます．たとえば $\mathrm{dom}(E)\cap\lambda^+=0$ のときは $E=E^+_\lambda$ なので $\mathbb{P}(E)=\mathbb{P}(E^+_\lambda)$ となり，いっぽう $E^-_\lambda=0$ なので $\mathbb{P}(E^-_\lambda)$ は $\{0\}$ すなわちただ一つの要素のみからなる半順序になります．ですからこの場合 $\mathbb{P}$ が $\mathbb{P}(E^+_\lambda)\times\mathbb{P}(E^-_\lambda)$ と同型になるのは当然です．

条項 (c) を $\mathbb{P}(E)$ に含めたおかげで，$\mathbb{P}(E^-_\lambda)$ が λ^+-c.c. をみたすことを示せます．

補題 4.4. E が索引関数，λ が正則基数で $\mathrm{dom}(E)\subset\lambda^+, 2^{<\lambda}=\lambda$ とすると，$\mathbb{P}(E)$ は λ^+-c.c. をみたす．

【証明】 $\mathbb{P}(E)$ の要素 p に対して

$$d(p)=\bigcup\{\,\{\kappa\}\times\mathrm{dom}(p(\kappa)) : \kappa\in\mathrm{dom}(E)\,\}$$

とおく．すると，定義 4.1 (3) の (c) によって $|d(p)|<\lambda$. すべての λ^+ より小さい順序数 α に対して $\mathbb{P}(E)$ の要素 p_α を対応させたとしよう．$2^{<\lambda}=\lambda$ なので，Δ-システム補題 (第 II 章定理 1.6) によって，λ^+ のサイズ λ^+ をもつ部分集合 X をうまくとると X に属する α に対する $d(p_\alpha)$ の全体が Δ-システムをなす．この Δ-システムの根を r としよう．$|r|<\lambda$ なので $2^{|\lambda|}\le\lambda$ であって，X からサイズ λ^+ の部

分集合 Y をとりだして

$$\forall\alpha,\beta\in Y\,\forall\langle\kappa,i\rangle\in r\,(p_\alpha(\kappa)(i)=p_\beta(\kappa)(i))$$

が成立するようにできる．このとき Y の要素に対応する p_α どうしは互いに両立する．□

補題 4.4 で $\mathrm{dom}(E)\subset\lambda$ であった場合に $\mathbb{P}(E)$ が λ-c.c. をみたすと結論づけることは，たとえ GCH を仮定してもできません．λ が到達不能基数である場合は，これが成立することと λ がマーロ基数であることとは同値です (演習問題 J14).

補題 4.5. E が索引関数で $\mathrm{dom}(E)\cap\lambda^+=0$ となっているとすると，$\mathbb{P}(E)$ は λ^+-閉である．□

補題 4.6. E を M における一つの索引関数として $\mathbb{P}=\mathbb{P}(E)$ とおき，さらに GCH が M において成立しているとする．このとき $\mathbb{P}$ は共終数を保存する (したがって基数を保存する).

【証明】 そうでないとすると，M におけるある正則基数 θ が $M[G]$ においては正則でない順序数になるような，M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合 G が存在する．そこで $\lambda=(\mathrm{cf}(\theta))^{M[G]}$ とおこう．このとき λ は $M[G]$ において正則，したがって M においても正則である．

M において $\mathbb{P}_0=\mathbb{P}(E_\lambda^-)$, $\mathbb{P}_1=\mathbb{P}(E_\lambda^+)$ とおく．写像 $i_0:\mathbb{P}_0\to\mathbb{P}_0\times\mathbb{P}_1$ と $i_1:\mathbb{P}_0\to\mathbb{P}_0\times\mathbb{P}_1$ を (定義 1.1 で述べたような) 埋め込み写像とし，$j:\mathbb{P}_0\times\mathbb{P}_1\to\mathbb{P}$ を同型写像としよう．

$G_0=i_0^{-1}(j^{-1}(G))$, $G_1=i_1^{-1}(j^{-1}(G))$ とおく．(第 VII 章系 7.6 によって) $j^{-1}(G)$ は M 上 $\mathbb{P}_0\times\mathbb{P}_1$-ジェネリックであり，$M[G]=M[j^{-1}(G)]$ である．したがって，(補題 1.3 と定理 1.4 を $j^{-1}(G)$ に適用すれば) G_1 は M 上 $\mathbb{P}_1$-ジェネリック，G_0 は $M[G_1]$ 上 $\mathbb{P}_0$-ジェネリックであって，$M[G]=M[G_1][G_0]$ が成立する．

$M[G]$ すなわち $M[G_1][G_0]$ において，f を λ から θ の共終部分集合に写す写像とする．ここで ($\mathbb{P}_1$ が λ^+-閉)^M だから $(2^{<\lambda}=\lambda)^{M[G_1]}$ である．そこで補題 4.4 を $M[G_1]$ 内で適用すると ($\mathbb{P}_0$ は λ^+-c.c. をみたす)$^{M[G_1]}$ ことがわかる．そこで，(第 VII 章補題 6.8 により) $M[G_1]$ に属する関数 $F:\lambda\to\mathcal{P}(\theta)$ で，$\forall\alpha<\lambda\,(f(\alpha)\in F(\alpha))$ かつ $\forall\alpha<\lambda\,(|F(\alpha)|\le\lambda)^{M[G_1]}$ となるものがある．ところが ($\mathbb{P}_1$ は λ^+-閉)^M なので，$F\in M$ かつ $\forall\alpha<\lambda\,(|F(\alpha)|\le\lambda)^M$ となる．

そうすると，M において $\bigcup_{\alpha<\lambda} F(\alpha)$ は θ の共終部分集合で，そのサイズはたかだか λ ということになる．これは θ が M において正則であるという仮定と矛盾する．□

定理 4.7. E を M における一つのイーストン式索引関数として $\mathbb{P}=\mathbb{P}(E)$ とおき，さらに GCH が M において成立しているとする．このとき，$\mathbb{P}$ は共終数 (と基数) を保存し，また G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とすれば，

$$\forall\kappa\in\mathrm{dom}(E)\,(2^{\kappa}=E(\kappa))$$

が $M[G]$ において成立する．また，$M[G]$ において一般に次のことが成立する：基数 θ に対して

$$E'(\theta)=\max(\theta^{+},\sup\{E(\kappa):\kappa\in\mathrm{dom}(E)\wedge\kappa\leq\theta\})$$

とおき，さらに $\mathrm{cf}(E'(\theta))>\theta$ のとき $E^{*}(\theta)=E'(\theta)$，そうでないとき $E^{*}(\theta)=(E'(\theta))^{+}$ とすれば，$2^{\theta}=E^{*}(\theta)$ である．

【証明】共終数が保存されることは補題 4.4 で証明されている．そしてこのことから，E' と E^{*} の定義が $M,M[G]$ に対して絶対的であることがわかる．

E に関する仮定 (定義 4.1 (2)) により，$\kappa\in\mathrm{dom}(E)$ のとき $E^{*}(\kappa)=E(\kappa)$ である．そこで，M における任意の無限基数 θ について $M[G]$ において $2^{\theta}=E^{*}(\theta)$ となることを示すことにする．

ケーニヒの補題によって，$2^{\theta}\geq E^{*}(\theta)$ を示すためには $\mathrm{dom}(E)$ の要素 κ について $2^{\kappa}\geq E(\kappa)$ を示せば十分である．$M[G]$ において $2^{\kappa}\geq E(\kappa)$ となることを示すには，$\mathbb{P}$ に因子として含まれる $(\mathrm{Fn}(E(\kappa),2,\kappa))^{M}$ によって，κ の互いに相異なる部分集合の $E(\kappa)$-列がつけ加わることが強制されることに注意する．きちんと言えば，f を M に属する $E(\kappa)\times\kappa$ と $E(\kappa)$ の間の 1 対 1 関数として，$M[G]$ において $E(\kappa)$ 未満の順序数 α に対して

$$A_{\alpha}=\{\xi<\kappa:\exists p\in G\,(p(\kappa)(f(\alpha,\xi))=1)\}$$

とおけば，$\langle A_{\alpha}:\alpha<E(\kappa)\rangle\in M[G]$ かつ $\alpha\neq\beta\rightarrow A_{\alpha}\neq A_{\beta}$ となる．

今度は，$M[G]$ において $2^{\theta}\leq E^{*}(\theta)$ となることを示すために，$\lambda=(\mathrm{cf}(\theta))^{M}=(\mathrm{cf}(\theta))^{M[G]}$ とおいて補題 4.6 の証明と同様に進む．M の中で $\mathbb{P}_0=\mathbb{P}(E^{-}_{\lambda})$，$\mathbb{P}_1=\mathbb{P}(E^{+}_{\lambda})$ とおく．すると M において $\mathbb{P}$ は $\mathbb{P}_0\times\mathbb{P}_1$ と同型であり，$\mathbb{P}_0$ は λ^{+}-c.c. をみたし，$\mathbb{P}_1$ は λ^{+}-閉である．また，M 上 $\mathbb{P}_1$-ジェネリックな G_1 と $M[G_1]$ 上 $\mathbb{P}_0$-

ジェネリックな G_0 があって，$M[G]=M[G_1][G_0]$ となっている．

まず $\lambda=\theta$ の場合を考察しよう．M の中で考えると $|\mathbb{P}_0|\le E^*(\lambda)$ である．なぜなら，$\mathrm{dom}(E^-_\lambda)$ に属する (したがって λ 以下の) κ について

$$|\mathrm{Fn}(E(\kappa),2,\kappa)|\le|\mathrm{Fn}(E^*(\lambda),2,\kappa)|\le E^*(\lambda)^\lambda$$

であるから $|\mathbb{P}_0|\le(E^*(\lambda)^\lambda)^\lambda$ がわかるが，いっぽう $\mathrm{cf}(E^*(\lambda))>\lambda$ であることとGCH が成り立つことから $E^*(\lambda)^\lambda=E^*(\lambda)$ となるからである．ところが ($\mathbb{P}_1$ が λ^+-閉$)^M$ であることから，$M[G_1]$ の中で考えても，$E^*(\lambda)^\lambda=E^*(\lambda)$ であって $\mathbb{P}_0$ が λ^+-c.c. をみたし，$|\mathbb{P}_0|\le E^*(\lambda)$ となる．それゆえ，$M[G_1]$ において $\check{\lambda}$ の部分集合の都合のよい $\mathbb{P}_0$-名前は，たかだか $(E^*(\lambda)^\lambda)^\lambda$ すなわち $E^*(\lambda)$ 個しかない．したがって，$M[G_1][G_0]$ において $2^\lambda\le E^*(\lambda)$ である．

ここまででわかったのは，$M[G]$ において，θ が正則基数である場合は $2^\theta=E^*(\theta)$ となることである．

一般の場合を扱うために，まず $M[G]$ において $E^*(\theta)^\lambda=E^*(\theta)$ となることを示そう．$M[G]\cap{}^\lambda(E^*(\theta))$ の要素 f があったとする．いま ($\mathbb{P}_0$ は λ^+-c.c. をみたす$)^{M[G_1]}$ ので，第 VII 章補題 6.8 によって関数 F が存在して

$$F\in{}^{\lambda\times\lambda}(E^*(\theta))\cap M[G_1], \tag{1}$$

$$\forall\alpha<\lambda\,\exists\beta<\lambda\,(f(\alpha)=F(\alpha,\beta)) \tag{2}$$

となる．さらに ($\mathbb{P}_1$ は λ^+-閉$)^M$ であるから，(1) をみたす関数 F は結局 M に属する．それゆえ，M における GCH により，このような F はたかだか $E^*(\theta)$ 個だけしかない．そして，各々の F について，$M[G]$ において (2) をみたす関数 f の集合のサイズは (λ が正則基数である$)^{M[G]}$ ことから，先ほど示したとおり $\lambda^\lambda=E^*(\lambda)\le E^*(\theta)$ となる．したがって $(|{}^\lambda E^*(\theta)|\le E^*(\theta))^{M[G]}$ である．

以下，すべてを $M[G]$ の中で考える．$\lambda<\theta$, すなわち θ が特異基数であったとする．B を θ の有界部分集合全体の集合としよう．θ より小さい正則基数 δ に対しては $|\mathcal{P}(\delta)|=E^*(\delta)\le E^*(\theta)$ がわかっている．また，正則基数の全体の集合が θ において共終であるから，B の要素はどれかの δ の部分集合になる．したがって $|B|\le E^*(\theta)$. ところが，関数 g に $\bigcup\{g(\alpha):\alpha<\lambda\}$ を対応させることで，${}^\lambda B$ を $\mathcal{P}(\theta)$ の上へ写像できる．そこで $2^\theta\le E^*(\theta)^\lambda=E^*(\theta)$ になる．□

系 4.8. Con(ZFC) から $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\forall n\in\omega\,(2^{\omega_n}=\omega_{n+3})+\forall\kappa\ge\omega_\omega\,(2^\kappa=\kappa^+))$ が導かれる．□

定理 4.7 によると，$\lambda \notin \mathrm{dom}(E)$ のとき $M[G]$ における 2^λ は可能な限り最小の値をとることになります．そこで，λ のところで基数の冪を《ジャンプ》させたいとすれば，λ を $\mathrm{dom}(E)$ に入れておく必要があります．一つ一つの正則基数についてはこれは特に問題になりませんが，

$$\forall\kappa\,(\kappa \text{ は正則基数} \to 2^\kappa = \kappa^{+++})$$

の無矛盾性を証明したい場合には，素直に $\mathbb{P}$ を考えるとそれは M にとって真のクラスになります．真のクラスを用いて強制すると拡大モデルが ZFC のモデルにならないこともあるのですが，イーストン式拡大の場合は大丈夫です．より詳しくは [Easton 1970] およびこの章の演習問題 G1 から G5 までを見てください．

また，λ が M における特異基数のときには，λ を $\mathrm{dom}(E)$ に入れられません．そして，λ のところで基数の冪をジャンプさせることはいろいろの理由で困難です．モデルのことはいったん忘れて，特異基数 λ に対して $f(\lambda) = \sup\{2^\kappa : \kappa < \lambda\}$ とおきましょう．このとき以下の二つの場合のどちらかが成立するはずです．

第一の場合：　$\mathrm{cf}(f(\lambda)) \neq \mathrm{cf}(\lambda)$．このときは $\exists\kappa_0 < \lambda\,\forall\kappa\,(\kappa_0 \leq \kappa < \lambda \to 2^\kappa = 2^{\kappa_0})$ となるので実は $\mathrm{cf}(f(\lambda)) > \lambda$ となります．この場合は $2^\lambda = f(\lambda)$ となることが簡単にわかります (演習問題 H1)．

第二の場合：　$\mathrm{cf}(f(\lambda)) = \mathrm{cf}(\lambda)$．このときは $2^\lambda \geq (f(\lambda))^+$ です．

定理 4.7 によれば，GCH のモデルのイーストン式拡大モデルにおいて必ず $2^\lambda = (f(\lambda))^+$ が成立します．そして，イェンセンの結果によると，$2^\lambda > (f(\lambda))^+$ の無矛盾性を強制法によって証明することは不可能なのです．これについてもう少し説明するために

$$\forall\lambda\,(\lambda \text{ は特異基数} \wedge \mathrm{cf}(f(\lambda)) = \mathrm{cf}(\lambda) \to 2^\lambda = (f(\lambda))^+) \tag{$*$}$$

という命題と

$$\forall X \subset \mathbf{ON}\,(|X| \geq \omega_1 \to \exists Y \subset \mathbf{ON}\,(X \subset Y \wedge |X| = |Y| \wedge Y \in \mathbf{L})) \tag{CL}$$

という命題を考えます．すぐわかるとおり (CL) $\to$ $(*)$ です (演習問題 H2)．この (CL) は ZFC の定理ではありませんが，イェンセンの被覆定理によれば，$\neg$(CL) から《$0^\#$ の存在》と呼ばれる命題が導かれます ([Drake 1974], [Shoenfield 1971b], [Silver 1973] などを見てください)．この命題からは，すべての不可算基数が $\mathbf{L}$ において到達不能 (さらにマーロかつ弱コンパクト) であるという結果が得られます．そのうえ，$\mathbf{V} = \mathbf{L}$ のモデルのどんな強制拡大においても《$0^\#$ の存在》は成立せず，

したがって (CL) と (∗) が成立しています.

初めて $0^{\#}$ を導入したのはシルヴァーとソロヴェイで，彼らは《$0^{\#}$ の存在》が可測基数の存在から (あるいはラムズィー基数の存在でもいいですが) 導かれることを示しました．そして，$0^{\#}$ の定義をみれば，$\neg$(CL) が《$0^{\#}$ の存在》と同値であることは直ちにわかるのです.

プリクリとシルヴァーの結果によると，超コンパクト基数が存在するモデルをジェネリック拡大することによって $\neg(*)$ の成立するモデルを作ることができます．また，マギドア [Magidor 1977] は，M が膨大基数一個の存在より少しばかり強いある仮定をみたす場合に

$$\forall n<\omega\,(2^{\omega_n}=\omega_{n+1})\wedge 2^{\omega_\omega}=\omega_{\omega+2}$$

が M のあるジェネリック拡大において成立することを示しました．《超コンパクト基数》や《膨大基数》はいずれも巨大基数の一種で，どちらも可測基数よりはるかに大きいものですが，κ が膨大基数であるときには，集合

$$\{\lambda<\kappa:(\kappa\text{ は超コンパクト基数})^{R(\kappa)}\}$$

が κ において定常集合になるという意味において，膨大基数は超コンパクト基数よりさらにはるかに大きいのです．こうした巨大基数の存在が ZFC と矛盾するかどうかはわかっていません．詳細は [Solovay–Reinhardt–Kanamori 1978] を見てください.

共終数が不可算な特異基数については，(∗) の特別の場合のいくつかが ZFC で証明できます．たとえば，シルヴァーは $\omega<\mathrm{cf}(\lambda)<\lambda$ かつ

$$\forall\kappa<\lambda\,(2^{\kappa}=\kappa^{+})$$

のときは $2^{\lambda}=\lambda^{+}$ となることを証明しています．詳細については [Galvin–Hajnal 1975] およびこの章の演習問題 H3 から H6 までを見てください.

訳注：ここで話題となっている仮説 (∗) は**特異基数仮説** SCH と呼ばれています．マギドアの結果に用いられた巨大基数の仮定は，のち (1989 年ごろ) にウディンとギティックによって《ミッチェル次数》が κ^{++} であるような二値可測基数 κ の存在にまで弱められました．この巨大基数の仮定が，強制法による $\neg$SCH の無矛盾性証明には必要十分であることがわかっています．また，1980 年代のシェラハの研究の結果として，ω_ω より小さい基数について GCH が成立していれば，2^{ω_ω} は $\omega_{(2^{\omega})^{+}}$ より小さくなければならないことが証明されています．難波完爾の [難波 1975] は，共終数が不可算な特異基数に関するシルヴァーの上記の結果を，いち早く日本語で紹介した本として知られています.

§5　反復強制法の一般論

ここでは $\mathbb{P}$ が M に属する半順序，G が M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合，$\mathbb{Q}$ が $M[G]$ に属する半順序という状況を考察します．M に属する半順序 $\mathbb{R}$ を見つけて，$\mathbb{R}$ による M のジェネリック拡大が $\mathbb{Q}$ による $M[G]$ のジェネリック拡大と同じになるようにしたいわけです．$\mathbb{Q}\in M$ の場合は $\mathbb{R}=\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ とすればよかったのですが，$\mathbb{Q}\notin M$ なら $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}\notin M$ となってしまいます．$M[G]$ に属する一般の半順序 $\mathbb{Q}$ を扱うため，$\mathbb{P}$ と M における $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{P}$-名前から $\mathbb{R}$ を M において構成します．

あらゆる $\mathbb{P}$-名前をすべて考慮するするには及ばないということがわかれば，$\mathbb{R}$ の構成法は少し単純化できます．まず $\mathbb{Q}=\langle\alpha,\leq_{\mathbb{Q}},0\rangle$，つまり，考える半順序はある順序数 α 上の半順序づけのうちゼロを最大要素としてもつと考えて差し支えありません．なぜなら，どんな $\mathbb{Q}$ も $M[G]$ においてこの形の半順序と同型になり，そして同型な半順序からは同じジェネリック拡大が得られるからです．次に $\leq_{\mathbb{Q}}=\tau_G$ だったとします．そして，《x は $\check{\alpha}$ を $\check{0}$ を最大要素として半順序づけする》という言明を $\phi(x)$ と書きます．このとき $\mathbb{1}\Vdash\phi(\tau)$ が成立するとは限らないのですが

$$\mathbb{1}\Vdash\exists x\,(\phi(x)\wedge(\phi(\tau)\rightarrow x=\tau))$$

が成立するので，極大原理 (第 VII 章定理 8.2) によって

$$\mathbb{1}\Vdash\phi(\sigma)\wedge(\phi(\tau)\rightarrow\sigma=\tau)$$

をみたす $\mathbb{P}$-名前 σ が存在します．このとき $\mathbb{1}\Vdash\phi(\sigma)$ であり，しかも $\phi(\tau_G)$ は $M[G]$ において真なので $\sigma_G=\tau_G=\leq_{\mathbb{Q}}$ となります．

実際には，半順序の定義域が順序数であるという事実は，このあとの議論の単純化には全然つながりません．いっぽう，前もって決めておいた特定の名前に最大要素が一致するような半順序であることを $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ によって強制されているような $\mathbb{P}$-名前に，考察の対象を制限してよいという事実は役に立ちます．そこで，これら二つの事実のうち後者の制限だけを正式な定義の一部分として採用します．

定義 5.1. $\mathbb{P}$ を M に属する半順序とするとき，半順序の $\mathbb{P}$-名前とは M に属する $\mathbb{P}$-名前の三つ組 $\langle\pi,\pi',\pi''\rangle$ で，条件 $\pi''\in\mathrm{dom}(\pi)$ および

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}}\Vdash_{\mathbb{P}}[(\pi''\in\pi)\wedge$$
$$(\pi' \text{ は } \pi \text{ の半順序づけであり } \pi'' \text{ はその最大要素である})]$$

をみたすもののことだとする．π' のことを $\leq_\pi$，π'' のことを $\mathbb{1}_\pi$ あるいは単に $\mathbb{1}$

と書くことがしばしばある. □

定義 5.2. $\mathbb{P}$ を M に属する半順序とし, π (正確には $\langle \pi, \pi', \pi'' \rangle$) を半順序の $\mathbb{P}$-名前とするとき, $\mathbb{P} * \pi$ は次のように定義される半順序である. 集合としての $\mathbb{P} * \pi$ は

$$\{ \langle p, \tau \rangle : p \in \mathbb{P} \wedge \tau \in \mathrm{dom}(\pi) \wedge p \Vdash \tau \in \pi \}$$

であり, 順序づけ $\langle p, \tau \rangle \leq \langle q, \sigma \rangle$ は

$$p \leq_{\mathbb{P}} q \wedge p \Vdash_{\mathbb{P}} \tau \leq_{\pi} \sigma$$

で与えられる. また $\mathbb{1}_{\mathbb{P} * \pi} = \langle \mathbb{1}_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\pi} \rangle$ と定める. 写像 $i : \mathbb{P} \to \mathbb{P} * \pi$ を $i(p) = \langle p, \mathbb{1}_{\pi} \rangle$ と定義する. □

$\mathbb{P} * \pi$ が実際に半順序になることは簡単に確かめられるでしょう.

第 1 章で扱った積半順序を $\mathbb{P} * \pi$ の特別の場合と考えることができます. すなわち, $\mathbb{Q}$ を M に属する半順序として $\pi = \check{\mathbb{Q}}$ とおけば, $\mathbb{P} * \pi$ は $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ と同型になります.

もう一つ例をあげましょう. $\mathbb{P}$ が基数を保つと仮定し, G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合として $\mathbb{Q} = (\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \omega_1))^{M[G]}$ とおきましょう. この $\mathbb{Q}$ を, ある順序数に半順序づけをほどこしたものとして表示し直すこともできますが, $\pi = S \times \{\mathbb{1}_{\mathbb{P}}\}$ という名前のほうが順当でしょう. ただし, S は M において

$$S = \{ \tau : (\mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{P}} \tau \in \mathrm{Fn}(\check{\kappa}, \check{2}, \check{\omega}_1)) \wedge \mathrm{dom}(\tau) \subset \mathrm{dom}((\kappa \times 2)\check{\ }) \}$$

と定義されるとします. それから, $\mathbb{1}_{\pi}$ としては $\mathbb{P}$-名前としての 0 を使います. この場合, π の定義域 S に属する 0 と異なるなんらかの名前 τ について $p \Vdash \tau = 0$ が成立することもあり, そのとき $\langle p, \tau \rangle \neq \langle p, \mathbb{1}_{\pi} \rangle$ であるにもかかわらず $\langle p, \tau \rangle \leq \langle p, \mathbb{1}_{\pi} \rangle \leq \langle p, \tau \rangle$ が成立します. しかしこれは問題になりません. 狭義の半順序 (すなわち $p \leq p' \leq p$ ならば $p = p'$ であるような半順序のこと. 第 II 章定義 2.1 を参照) だけしか扱ってはならないという要請を私たちはしていないからです. MA をつかってなにかを証明する場合や (第 VII 章のような) 普通の強制法の議論の場合には, 自然に登場する半順序がすべて狭義の半順序であったわけですが, 反復強制法の議論に登場する半順序についてはその限りではありません.

補題 5.3. 定義 5.2 の記法のもとで,

(a) $\forall p, p' \in \mathbb{P} \, (p \leq p' \leftrightarrow \langle p, \mathbb{1} \rangle \leq \langle p', \mathbb{1} \rangle)$.

(b) $i(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}) = \mathbb{1}_{\mathbb{P} * \pi}$.

(c) $\forall\langle p,\tau\rangle,\langle p',\tau'\rangle\in\mathbb{P}*\pi\,(p\perp p'\to\langle p,\tau\rangle\perp\langle p',\tau'\rangle)$.

(d) $\forall\langle p,\tau\rangle\in\mathbb{P}*\pi\,\forall p'\in\mathbb{P}\,(p\perp p'\leftrightarrow\langle p,\tau\rangle\perp\langle p',\mathbb{1}\rangle)$.

(e) $\forall p,p'\in\mathbb{P}\,(p\perp p'\leftrightarrow i(p)\perp i(p'))$.

(f) $i:\mathbb{P}\to\mathbb{P}*\pi$ は完備埋め込み写像である.

【証明】 (a) から (c) までは定義からすぐわかる. (d) の左から右が導かれるのは (c) の一つの場合にすぎない. (d) の右から左について, もしも p'' が p と p' に共通の拡大だとしたら, $\langle p'',\tau\rangle$ は $\langle p,\tau\rangle$ と $\langle p',\mathbb{1}\rangle$ に共通の拡大である. (e) は (d) で $\tau=\mathbb{1}$ とおいた場合である. (f) は (a) と (e) と (d) から出てくる. p が $\langle p,\tau\rangle$ の $\mathbb{P}$ への縮約となることが (d) からわかるからである. □

$\mathbb{P}*\pi$ を用いて M を拡大することは, まず $\mathbb{P}$ を用いて拡大してから π (という名前をもつ半順序) を用いて拡大することと同等です. 積半順序の場合同様, これが $\mathbb{P}*\pi$ に関する主要な結果になります. ただし積の場合と違って $\mathbb{P}$ と π の間に対称性はありません. $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}\times\mathbb{P}$ は互いに同型ですが, $\pi*\mathbb{P}$ は定義もできないし, そもそも先に π を用いて拡大するということが意味をなさないのです.

定義 5.4. 定義 5.2 の記法のもとで, G が M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合, H が π_G の部分集合であるときに, $G*H$ を次の式で定義する：

$$G*H=\{\langle p,\tau\rangle\in\mathbb{P}*\pi:p\in G\wedge\tau_G\in H\}.\quad\square$$

定理 5.5. $\mathbb{P}$ が M に属する半順序, π が半順序の $\mathbb{P}$-名前, K を M 上の $\mathbb{P}*\pi$-ジェネリック集合とする. $G=i^{-1}(K)$ とおき,

$$H=\{\tau_G:\tau\in\mathrm{dom}(\pi)\wedge\exists q\,(\langle q,\tau\rangle\in K)\}$$

としよう. すると, G は M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリック, H は $M[G]$ 上 π_G-ジェネリックで $K=G*H$, また $M[K]=M[G][H]$ が成立する.

【証明】 G がジェネリックであることは i が完備埋め込み写像であることから導かれる.

H がジェネリックであることを証明するにはまず H がフィルターであることをチェックしなければならない. そのために $\tau_G\in H$ かつ $\tau_G\le\sigma_G$ だったとしよう. ただし, $\sigma_G\in\pi_G$ かつ $\sigma\in\mathrm{dom}(\pi)$ とする. $\sigma_G\in H$ となることを示したい. $\langle q,\tau\rangle\in K$ となる q を考えると, G のある要素 p について $p\Vdash\tau\le\sigma$ となっている. そこ

で，$\langle r,\rho\rangle \le \langle p,\mathbb{1}\rangle$ かつ $\langle r,\rho\rangle \le \langle q,\tau\rangle$ となる K の要素 $\langle r,\rho\rangle$ が存在する．このとき $r \Vdash \rho \le \tau$ かつ $r \Vdash \tau \le \sigma$ となっているから $r \Vdash \rho \le \sigma$ が成立する．こうして $\langle r,\rho\rangle \le \langle r,\sigma\rangle$ が成り立ち $\langle r,\sigma\rangle \in K$ となり，$\sigma_G \in H$ となる．H の二つの要素に必ず共通の拡大があることの証明は簡単だが省略する．

H が $M[G]$ にあるすべての稠密集合と交わることを証明するために，定理 1.4 の (1)→(2) の証明をまねることにする．$M[G]$ の要素 D が π_G の稠密部分集合だったとする．$D=\delta_G$ をみたす $M^{\mathbb{P}}$ の要素 δ と $p \Vdash (\delta$ は π において稠密である$)$ をみたす G の要素 p をとろう．これに対して

$$D' = \{\langle q,\tau\rangle \in \mathbb{P} * \pi : q \Vdash \tau \in \delta\}$$

とおく．D' が $\langle p,\mathbb{1}\rangle$ 以下で稠密なことは簡単にわかる．そこで $K \cap D'$ に属する $\langle q,\tau\rangle$ があり，このとき $\tau_G \in H \cap D$ である．

$\langle p,\tau\rangle \in K$ のとき，G と H の定義によって $p \in G$ かつ $\tau_G \in H$ となるから $\langle p,\tau\rangle \in G * H$．したがって $K \subset G * H$ である．逆に $\langle p,\tau\rangle \in G * H$ のとき，$p \in G$ かつ $\tau_G \in H$, $\langle p,\tau\rangle \in \mathbb{P} * \pi$ である．これから $\langle p,\mathbb{1}\rangle \in K$ であり，ある q について $\langle q,\tau\rangle \in K$ でもある．そこで $\langle r,\sigma\rangle$ を，K に属する $\langle p,\mathbb{1}\rangle$ と $\langle q,\tau\rangle$ に共通の拡大とする．このとき $r \le p$ かつ $r \Vdash \sigma \le \tau$ だから $\langle r,\sigma\rangle \le \langle p,\tau\rangle$ であり，したがって $\langle p,\tau\rangle \in K$ となる．こうして $G * H \subset K$ がわかった．

G と H は $M[K]$ に属するから $M[G][H] \subset M[K]$．また $K = G * H \in M[G][H]$ より $M[K] \subset M[G][H]$ である．□

定理 5.5 の逆を考えると，任意に与えられた $\mathbb{P}$-ジェネリック集合 G と π_G-ジェネリック集合 H から $G * H$ を作ると $\mathbb{P} * \pi$-ジェネリックになる，ということになります．この命題を使う予定はないので，証明は演習問題 J15 として残しておきます．積半順序の場合も，この逆命題は定理 1.4 の中で証明されていましたが，結局のところ第 2 節から第 4 節までの応用に全然使われませんでした．

あとで MA＋¬CH の無矛盾性証明をするときに，c.c.c. をみたす半順序を反復するとまた c.c.c. をみたす半順序ができるという知識が大切な意味をもってきます．まずいくつかの補題を証明しましょう．

補題 5.6. M において，κ が正則基数で $\mathbb{P}$ は κ-c.c. をみたし，σ は

$$\mathbb{1} \Vdash (\sigma \subset \check{\kappa} \wedge |\sigma| < \check{\kappa})$$

をみたす $\mathbb{P}$-名前だとする．このとき，κ より小さいある β について $\mathbb{1} \Vdash (\sigma \subset \check{\beta})$

が成立する.

【証明】 M において $E=\{\alpha<\kappa:\exists p\in\mathbb{P}(p\Vdash(\check{\alpha}=\sup(\sigma)))\}$ とおき，E の要素 α に対して $p_\alpha\Vdash(\check{\alpha}=\sup(\sigma))$ をみたす $\mathbb{P}$ の要素 p_α を対応させよう．このとき $\{p_\alpha:\alpha\in E\}$ が $\mathbb{P}$ の反鎖をなすので，κ-c.c. により $|E|<\kappa$ である．そこで $E\subset\beta$ と $\beta<\kappa$ をみたす β がとれる.

G を M 上の任意の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とするとき，κ-c.c. によって κ は $M[G]$ においても正則基数のままである (第 VII 章補題 6.9)．そして $|\sigma_G|<\kappa$ であるから，$\alpha=\sup(\sigma_G)$ とおくと $\alpha<\kappa$ となる．このとき $\exists p\in G(p\Vdash\check{\alpha}=\sup(\sigma))$ なので $\alpha\in E$, したがって $\sigma_G\subset\alpha<\beta$ となる.

以上のことから $\mathbb{1}\Vdash(\sigma\subset\check{\beta})$ である. □

補題 5.7. $\mathbb{P}$ は M に属する半順序，π は半順序の $\mathbb{P}$-名前，κ は M における正則基数で，$(\mathbb{P}$ は κ-c.c. をみたし$)^M$, $\mathbb{1}\Vdash(\pi$ は κ-c.c. をみたす$)$ とする．このとき，$(\mathbb{P}*\pi$ も κ-c.c. をみたす$)^M$.

【証明】 そうでなかったとして，$\{\langle p_\xi,\tau_\xi\rangle:\xi<\kappa\}$ を M に属する $\mathbb{P}*\pi$ の反鎖としよう．$\sigma=\{\langle\check{\xi},p_\xi\rangle:\xi<\kappa\}$ とおくと $\sigma\in M^{\mathbb{P}}$ かつ $\mathbb{1}\Vdash(\sigma\subset\check{\kappa})$ となる.

G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とすれば，$\sigma_G=\{\xi<\kappa:p_\xi\in G\}$ である．ここで主張したいことは，$M[G]$ において σ_G に属する ξ に対応した $(\tau_\xi)_G$ を考えると，それらが互いに両立不可能な π_G の要素になっていることである．これを示すために，$\xi\neq\eta, p_\xi\in G, p_\eta\in G$ となる ξ と η に対応する $(\tau_\xi)_G$ と $(\tau_\eta)_G$ に共通の拡大が π_G に存在したとする．そうすると G の要素 q と $\mathrm{dom}(\pi)$ の要素 ρ が存在して，$q\Vdash\rho\leq_\pi\tau_\xi$ かつ $q\Vdash\rho\leq_\pi\tau_\eta$ をみたす．G はフィルターだから，$q\leq p_\xi$ かつ $q\leq p_\eta$ と仮定して差し支えない．しかしそうすると，$\langle q,\rho\rangle$ は $\mathbb{P}*\pi$ における $\langle p_\xi,\tau_\xi\rangle$ と $\langle p_\eta,\tau_\eta\rangle$ に共通の拡大ということになってしまう.

$\mathbb{1}\Vdash(\pi$ は κ-c.c. をみたす$)$ ということから，M 上の任意の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合 G について $(|\sigma_G|<\kappa)^{M[G]}$ となる．したがって $\mathbb{1}\Vdash(|\sigma|<\check{\kappa})$ である．補題 5.6 により，$\beta<\kappa$ かつ $\mathbb{1}\Vdash\sigma\subset\check{\beta}$ となるような β がある．しかし $p_\beta\Vdash\check{\beta}\in\sigma$ でもあるから矛盾が生じる. □

補題 5.7 の逆については演習問題 C2 を見てください.

この補題の特別な場合として，M に属する半順序 $\mathbb{Q}$ について $\pi=\check{\mathbb{Q}}$ だったと仮定しましょう．この場合に補題 5.7 が言っていることは，$\mathbb{P}$ が M において c.c.c. を

みたし，$\mathbb{1}\Vdash(\check{\mathbb{Q}}$ が c.c.c. をみたす) となっていれば $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ も M において c.c.c. をみたす，ということです．補題 5.7 は c.c.c. をみたす二つの半順序の積がまた c.c.c. をみたす，とは**言っていません**．たとえ $\mathbb{Q}$ が M においてc.c.c. をみたしていても，M のある $\mathbb{P}$-ジェネリック拡大において c.c.c. をみたさない可能性はあるからです．c.c.c. という条件は絶対的ではないのです．これは演習問題 C4 でも扱っています．

ここで話題を変えて，任意の順序数 α に関する α-段階の反復強制法について考えることにします．$\alpha=1$ の場合が普通の強制法で，$\alpha=2$ の場合が上で議論した $\mathbb{P}*\pi$ の形の繰り返しです．$\alpha=3$ のときは，M 内の半順序 $\mathbb{P}_1$ と半順序の $\mathbb{P}_1$-名前 π_1 から出発して，まず $\mathbb{P}_2=\mathbb{P}_1*\pi_1$ とおきます．次に π_2 を半順序の $\mathbb{P}_2$-名前として $\mathbb{P}_3=\mathbb{P}_2*\pi_2$ とおきます．したがって $\mathbb{P}_3$ の要素は $\langle\langle\rho_0,\rho_1\rangle,\rho_2\rangle$ という形になっていて，$\rho_0\in\mathbb{P}_1$, $\rho_0\Vdash(\rho_1\in\pi_1)$, $\langle\rho_0,\rho_1\rangle\Vdash(\rho_2\in\pi_2)$ が成立します．任意の自然数 n についても，この手続きを同様に n 回繰り返せば，n-段階の反復 $\mathbb{P}_n$ が得られます．ここにはなにも新味はありません．しかし正式な定義 (5.8) では，記法をシンプルに保つためいくつかの些細な変更を加えています．たとえば，$\langle\langle\cdots\langle\langle\rho_0,\rho_1\rangle,\rho_2\rangle\cdots,\rho_{n-2}\rangle,\rho_{n-1}\rangle$ とは書きにくいので，$\mathbb{P}_n$ の要素を n-組 $\langle\rho_0,\rho_1,\ldots,\rho_{n-1}\rangle$ と考えることにします．したがって，$\mathbb{P}_n$ の要素は長さ n の列，いいかえれば n を定義域とする関数です．この書き方に従うなら，いままで定義してこなかった $\mathbb{P}_0$ はただ一つの要素からなる順序集合 $\{0\}$ と定義すべきでしょう．というのも，0 とは長さゼロの列のことですから．そこで，M の 0-段階の拡大とは M そのものになります．半順序の系列 $\mathbb{P}_0,\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_n$ には次の性質があります．いま p を $\mathbb{P}_n$ の要素 $\langle\rho_0,\rho_1,\ldots,\rho_{n-1}\rangle$ のことだとすると，n 未満の番号 i に対して $p\restriction i$ すなわち $\langle\rho_0,\rho_1,\ldots,\rho_{i-1}\rangle$ は $\mathbb{P}_i$ の要素となり，そして $p\restriction i\Vdash_{\mathbb{P}_i}\rho_i\in\pi_i$ となります．この π_i は $\mathbb{P}_i$-名前ですから，特に π_0 は M のある要素 $\mathbb{Q}$ に関する $\check{\mathbb{Q}}$ になっているはずです．だとすると $\mathbb{P}_1$ は最初に言ったようにどんな半順序でもよいというわけには本当はいかないことになります．ただし，$\mathbb{Q}$ はどんな半順序でもよいのですから，同型なものを同じと思えば，$\mathbb{P}_1$ も任意の半順序でよいといえるでしょう．

次は，極限の段階ですることを決めなくてはいけません．すべての自然数 n に対して上に述べた $\mathbb{P}_n$ がすでに構成してあり，これから $\mathbb{P}_\omega$ を定義するとしましょう．すべての列 $p=\langle\rho_n : n\in\omega\rangle$ を集めるという方法 (**全極限**) もありうるでしょう．別の可能性として，有限個の自然数 i 以外では $\rho_i=\mathbb{1}$ となる列だけを考える，という制限を加えるやり方 (**有限サポート反復**) もあります．これが MA$+\neg$CH の無矛盾性証明に関わってくる反復です．不可算な極限 γ においては，可算なサポー

トをもつ列 $\langle \rho_\xi : \xi < \gamma \rangle$ をすべて集めて $\mathbb{P}_\gamma$ を定義するという第三の可能性 (**可算サポート反復**) が考えられます．極限の段階ではサポートがなんらかのイデアル (第II章定義 6.2) に属するようにすることで，これら三つの反復をいっせいに取り扱うことができます．

定義 5.8. M において，α を任意の順序数とし，また $\mathcal{I}$ を $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\alpha)$ をみたす $\alpha+1$ のイデアルで，α の有限部分集合をすべて含むものとする．$\mathcal{I}$ に属するサポートをもつ α-段階の**反復強制構造**とは，M に属する

$$\langle\ \langle \langle \mathbb{P}_\xi, \leq_{\mathbb{P}_\xi}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi} \rangle : \xi \leq \alpha \rangle,\quad \langle \langle \pi_\xi, \leq_{\pi_\xi}, \mathbb{1}_{\pi_\xi} \rangle : \xi < \alpha \rangle\ \rangle$$

という形のオブジェクトで，特に以下の条件をみたすものをいう．$\langle \mathbb{P}_\xi, \leq_{\mathbb{P}_\xi}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi} \rangle$ はいずれも半順序で，その要素は長さ ξ の列である．p が $\mathbb{P}_\eta$ の要素で $\xi < \eta$ であれば $p \restriction \xi \in \mathbb{P}_\xi$ となる．$\langle \langle \pi_\xi, \leq_{\pi_\xi}, \mathbb{1}_{\pi_\xi} \rangle$ はいずれも半順序の $\mathbb{P}_\xi$-名前である．$\langle \rho_\mu : \mu < \xi \rangle$ を $\mathbb{P}_\xi$ の要素とするとき，ρ_μ はいずれも $\mathrm{dom}(\pi_\mu)$ に属する．$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi}$ はすべての μ について $\rho_\mu = \mathbb{1}_{\pi_\mu}$ となるような列 $\langle \rho_\mu : \mu < \xi \rangle$ である．ここで $\mathrm{supt}(\langle \rho_\mu : \mu < \xi \rangle) = \{\mu < \xi : \rho_\mu \neq \mathbb{1}_{\pi_\mu}\}$ と定義しよう．このときこの構造はさらに次の条件をみたす必要がある：

(1) 基底：$\mathbb{P}_0 = \{0\}$.

(2) 後続者：$p = \langle \rho_\mu : \mu \leq \xi \rangle$ とするとき，$p \in \mathbb{P}_{\xi+1}$ となるためには，$p \restriction \xi \in \mathbb{P}_\xi$ かつ $\rho_\xi \in \mathrm{dom}(\pi_\xi)$ かつ $p \restriction \xi \Vdash (\rho_\xi \in \pi_\xi)$ となることが必要かつ十分.

(3) 極限：η を極限順序数とし $p = \langle \rho_\mu : \mu < \eta \rangle$ とするとき，$p \in \mathbb{P}_\eta$ となるためには,

$$\forall \xi < \eta\, (p \restriction \xi \in \mathbb{P}_\xi) \wedge \mathrm{supt}(p) \in \mathcal{I}$$

となることが必要かつ十分．また，$\mathbb{P}_\eta$ の要素 p と p' について，$p \leq p'$ と $\forall \xi < \eta (p \restriction \xi \leq p' \restriction \xi)$ が同値. □

これまで通り，$\mathbb{1}$ や $\Vdash$ や $\leq$ につけるべき添字はしばしば省略し，$\langle \mathbb{P}_\xi, \leq_{\mathbb{P}_\xi}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi} \rangle$ や $\langle \pi_\xi, \leq_{\pi_\xi}, \mathbb{1}_{\pi_\xi} \rangle$ のことを単に $\mathbb{P}_\xi$ とか π_ξ と書きます.

定義 5.9. 定義 5.8 において $\mathcal{I} = \{X \subset \alpha : |X| < \omega\}$ のときこの反復を**有限サポート反復**という．$\mathcal{I} = (\{X \subset \alpha : |X| \leq \omega\})^M$ のときは**可算サポート反復**という．また，**全極限をもつ反復**とは $\mathcal{I} = (\mathcal{P}(\alpha))^M$ を意味する. □

$\alpha < \omega$ なら当然これら三つは同じになります．定義 5.8 で $\mathcal{I}$ のことを $\alpha+1$ 上のイデアルと言ったのは，$\mathcal{P}(\alpha)$ のことを α 上の (真の) イデアルと呼べないから，と

いう技術的な理由によります．

$\mathcal{I}$ がイデアルで有限集合をすべて含むことから，$p\in\mathbb{P}_\xi\to\mathrm{supt}(p)\in\mathcal{I}$ が，定義のなかで要請されている極限順序数の場合だけでなくすべての ξ に対して成立します．

定義 5.8 は反復強制法による構成の処方箋と考えられるべきものです．実際に応用する場合は，π_ξ が特定のタイプの半順序すべて (たとえば MA のモデルの構成では c.c.c. をみたす半順序全体) にわたって動くことを保証するために，いわば帳簿 (book-keeping) のような仕組みが用いられます．π_ξ を選ぶ手順が与えられれば，$\mathbb{P}_\xi$ を帰納的に組み立てていく方法は定義 5.8 が教えてくれます．条項 (2) によって $\mathbb{P}_{\xi+1}$ と $\mathbb{P}_\xi*\pi_\xi$ とが同型になることと，条項 (3) でイデアル $\mathcal{I}$ を使って極限順序数の段階を扱っていることに注意しておいてください．

二段階の反復について定義された $i:\mathbb{P}\to\mathbb{P}*\tau$ は次のように拡張されます．

定義 5.10. 定義 5.8 の記法のもとで，$\xi\le\eta\le\alpha$ のときに写像 $i_{\xi\eta}:\mathbb{P}_\xi\to\mathbb{P}_\eta$ を次のように定義する．$i_{\xi\eta}(p)$ とは，$p'\restriction\xi=p$ かつ $\xi\le\mu<\eta\to p(\mu)=\mathbb{1}_{\pi_\mu}$ をみたす $\mathbb{P}_\eta$ の要素 p' のことである．□

ここで当然，そのような p' が $\mathbb{P}_\eta$ に属することをチェックしておかなければならないのですが，それは η に関する帰納法で簡単にできます．

次のやさしい補題に，抽象的な順序集合としての反復強制構造の性質がまとめられています．

補題 5.11. 定義 5.8 と定義 5.10 の記法のもとで，さらに $\xi\le\eta\le\zeta\le\alpha$ とする．

(a) $i_{\xi\zeta}=i_{\eta\zeta}\circ i_{\xi\eta}$.
(b) $i_{\xi\eta}(\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi})=\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\eta}$.
(c) $\forall p,p'\in\mathbb{P}_\eta\,(p\le p'\to p\restriction\xi\le p'\restriction\xi)$.
(d) $\forall p,p'\in\mathbb{P}_\xi\,(p\le p'\leftrightarrow i_{\xi\eta}(p)\le i_{\xi\eta}(p'))$.
(e) $\forall p,p'\in\mathbb{P}_\eta\,(p\restriction\xi\perp p'\restriction\xi\to p\perp p')$.
(f) $\forall p,p'\in\mathbb{P}_\eta\,[\mathrm{supt}(p)\cap\mathrm{supt}(p')\subset\xi\to(p\restriction\xi\perp p'\restriction\xi\leftrightarrow p\perp p')]$.
(g) $\forall p,p'\in\mathbb{P}_\xi\,(p\perp p'\leftrightarrow i_{\xi\eta}(p)\perp i_{\xi\eta}(p'))$.
(h) $i_{\xi\eta}$ は完備埋め込み写像である．

【証明】 (a) と (b) は定義からすぐわかる．(c) と (d) は η に関する帰納法によって証明できる．(e) を示すために p'' を p と p' に共通の拡大とすれば，(c) によって

$p''\restriction\xi$ が $p\restriction\xi$ と $p'\restriction\xi$ に共通の拡大である．

(f) のうち半分は (e) に含まれる．残りの半分を示すために $\mathrm{supt}(p)\cap\mathrm{supt}(p')\subset\xi$ であって $p\restriction\xi$ と $p'\restriction\xi$ は両立すると仮定しよう．$\mathbb{P}_\xi$ に属する，これらに共通の拡大 p'' を考える．$\mathbb{P}_\eta$ の要素 $p^*=\langle\rho^*_\mu:\mu<\eta\rangle$ を，$p^*\restriction\xi=p''\restriction\xi$ であって，$\xi\leq\mu<\eta$ のときは $\mu\in\mathrm{supt}(p)$ なら $\rho^*_\mu=\rho_\mu$, $\mu\in\mathrm{supt}(p')$ なら $\rho^*_\mu=\rho'_\mu$, どちらでもなければ $\rho^*_\mu=\mathbb{1}$ と定義する．このとき $\xi\leq\gamma\leq\eta$ をみたす γ について

$$(p^*\restriction\gamma\in\mathbb{P}_\gamma)\wedge(p^*\restriction\gamma\leq p\restriction\gamma)\wedge(p^*\restriction\gamma\leq p\restriction\gamma)$$

が γ に関する帰納法で証明できる．ここで $\gamma=\eta$ とおけば，p と p' に共通の拡大が得られる．

(g) は (f) の一つの場合にすぎない．(h) は (d) と (g) と (f) から導かれる．ここで (f) は $p\restriction\xi$ が p の $\mathbb{P}_\xi$ への縮約であることを示すのに使われる．□

補題 5.11 (f) のおかげで，有限サポート反復が c.c.c. を保存することが Δ-システムの論法を使って証明できます．この事実は第 6 章で MA のモデルを作るにあたって決定的に重要になってきます．

補題 5.12. M において次のことが成り立っているとする：κ は不可算正則基数,

$$\langle\langle\mathbb{P}_\xi:\xi\leq\alpha\rangle,\ \langle\pi_\xi:\xi<\alpha\rangle\rangle$$

は α-段階の有限サポート反復強制構造で，α より小さいすべての ξ について

$$\mathbb{1}\Vdash_{\mathbb{P}_\xi}(\pi_\xi\text{ は }\check{\kappa}\text{-c.c. をみたす})$$

となる．このとき，各 ξ について $\mathbb{P}_\xi$ は M において κ-c.c. をみたす．

【証明】 ξ に関する帰納法による．後続型順序数の場合，$\mathbb{P}_{\xi+1}$ が $\mathbb{P}_\xi*\pi_\xi$ と同型であることから補題 5.7 で話は済んでいる．そこで ξ を極限順序数として，ξ 未満のすべての順序数 ζ について $\mathbb{P}_\zeta$ が M において κ-c.c. をみたしているのに，$\mathbb{P}_\xi$ の反鎖 $\{p^\beta:\beta<\kappa\}$ が M に存在したと仮定しよう．必要なら部分集合に置き換えることによって，$\{\mathrm{supt}(p^\beta):\beta<\kappa\}$ が Δ-システムをなすと仮定して差し支えない．この Δ-システムの根を r としよう．ここで $r\subset\zeta<\xi$ をみたす ζ をとれば，補題 5.11 の (f) によって $\{p^\beta\restriction\zeta:\beta<\kappa\}$ は $\mathbb{P}_\zeta$ の反鎖になる．□

補題 5.12 の逆を考えると，もしもすべての自然数 n について $\mathbb{1}\Vdash(\pi_n$ は c.c.c. をみたさない) とすると，$\mathbb{P}_\omega$ は単に c.c.c. をみたさないばかりでなく ω_1^M を潰してしまいます (演習問題 E1)．このことから，c.c.c. をみたさない半順序によって

基数を保存する反復強制を実現したければ，なにか有限サポート反復以外の方法を使わなければならないことがわかります．可算サポート反復でうまくいく場合がいくつかあります (第 7 節)．ここで $\kappa=\omega_2$ とし M で CH が成立していると仮定すれば，あたかも $\mathrm{Fn}(I,2,\omega_1)$ が ω_1-c.c. をもつのと同じように，補題 5.12 が成立するように見えるかもしれません．ところが，たとえ Δ-システム補題が補題 5.12 とまったく同じように適用できても，Δ-システムの根が ξ において共終であれば証明は破綻します．実際，$\xi=\omega$ の場合に反例があります (演習問題 E5 と E6)．

$i_{\xi\eta}$ が $\mathbb{P}_\eta$ への $\mathbb{P}_\xi$ の完備埋め込み写像であることから，$\langle\mathbb{P}_\xi:\xi\leq\alpha\rangle$ を $\subset_c$ に関する上昇鎖と同一視することも可能です．しかし，$i_{\xi\eta}$ を使う議論も十分にわかりやすいので，ここではそのような見方は採用しません．それでも，$\mathbb{P}_\alpha$ による拡大から π_ξ による拡大モデルの上昇鎖が得られることを主張する補題は必要です．

補題 5.13.

$$\langle\langle\mathbb{P}_\xi:\xi\leq\alpha\rangle,\langle\pi_\xi:\xi<\alpha\rangle\rangle$$

を M における α-段階の反復強制構造とし，G を M 上の $\mathbb{P}_\alpha$-ジェネリック集合とする．α 以下の順序数 ξ に対して $G_\xi=i_{\xi\alpha}^{-1}(G)$ とおく．すると，G_ξ は M 上 $\mathbb{P}_\xi$-ジェネリックで

$$\xi\leq\eta\rightarrow M[G_\xi]\subset M[G_\eta]$$

となる．$\mathbb{Q}_\xi=\mathrm{val}(\pi_\xi,G_\xi)$ とおき

$$H_\xi=\{\mathrm{val}(\rho,G_\xi):\rho\in\mathrm{dom}(\pi_\xi)\wedge\exists p\,((p^\frown\langle\rho\rangle)\in G_{\xi+1})\}$$

としよう．すると H_ξ は $M[G_{\xi+1}]$ に属する $M[G_\xi]$ 上の $\mathbb{Q}_\xi$-ジェネリック集合である．

【証明】$i_{\xi\alpha}$ が完備埋め込み写像であることから G_ξ は $\mathbb{P}_\xi$-ジェネリックである．$G_\xi=i_{\xi\eta}^{-1}(G_\eta)$ であるから (第 VII 章定理 7.5 により) $M[G_\xi]\subset M[G_\eta]$ である．H_ξ がジェネリックであることは，定理 5.5 と $\mathbb{P}_{\xi+1}$ が $\mathbb{P}_\xi*\pi_\xi$ に同型であることから導かれる．□

このとき $M[G_\xi]=M[\langle H_\mu:\mu<\xi\rangle]$ も成立します．演習問題 J10 を見てください．

$\mathbb{P}_\xi$ が上昇鎖をなすように解釈すると，有限サポート反復の場合には極限の段階 $\mathbb{P}_\eta$ は単にそれに先立つすべての段階の和集合をとっていることになります．私たちの採用している書き方に合わせれば $\mathbb{P}_\eta=\bigcup_{\xi<\eta}i''_{\xi\eta}\mathbb{P}_\eta$ です．いっぽう，非常に単純

な場合においてさえ

$$M[G_\eta] = \bigcup_{\xi<\eta} M[G_\xi]$$

とは言えないのですが，$M[G_\eta]$ に属する集合のうち《小さい》ものがもっと早い段階で登場しているとは言えます．正確には次の補題のとおりです．

補題 5.14. M において次のことが成立していると仮定する．α は極限順序数，

$$\langle \langle \mathbb{P}_\xi : \xi \leq \alpha \rangle, \langle \pi_\xi : \xi < \alpha \rangle \rangle$$

はイデアル $\mathcal{I}$ に属するサポートをもつ α-段階の反復強制構造とする．また，$\mathcal{I}$ に属する集合はどれも α の有界部分集合であるとする．G を M 上 $\mathbb{P}_\alpha$-ジェネリックで，S を M に属する集合，X を $M[G]$ に属する S の部分集合とし，$(|S| < \mathrm{cf}(\alpha))^{M[G]}$ が成り立っているとしよう．このとき α より小さいある順序数 η について $X \in M[i_{\eta\alpha}^{-1}(G)]$ が成立する．

【証明】σ を $X = \sigma_G$ となる $\mathbb{P}_\alpha$-名前としよう．S の要素 s が X に属するためには $\exists p \in G\, (p \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \check{s} \in \sigma)$ が必要かつ十分である．$\mathcal{I}$ に関する仮定によって，$\mathbb{P}_\alpha = \bigcup_{\xi<\eta} i''_{\xi\alpha}\mathbb{P}_\alpha$ かつ $G = \bigcup_{\xi<\eta} i''_{\xi\alpha} G_\xi$ となっている．ただしここで G_ξ とは $i_{\xi\alpha}^{-1}(G)$ のことだとする．

$M[G]$ において X の各要素 s について $\exists p \in G_\xi\, (i_{\xi\alpha}(p) \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \check{s} \in \sigma)$ となるような α 未満の順序数 ξ を選んで ξ_s とし，$\eta = \sup\{\xi_s : s \in X\}$ とおこう．このとき $M[G]$ において $|X| \leq |S| < \mathrm{cf}(\alpha)$ なので $\eta < \alpha$.

このとき $X = \{s \in S : \exists p \in G_\eta\, (i_{\eta\alpha}(p) \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \check{s} \in \sigma)\}$ であり，強制関係 $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ は M で定義されているので，X は $M[G_\eta]$ に属する．□

いくつか注意すべき点を指摘してこの節をしめくくりますが，これらはどれも第 6 節での MA に関連した証明には不要です．

反復強制法のいちばん簡単な例は，π_ξ が M に属する半順序 $\mathbb{Q}_\xi$ の名前 $\check{\mathbb{Q}}_\xi$ になっているものでしょう (ここで本当をいうとチェック演算子 ˇ は $\mathbb{P}_\xi$ の最大要素 $\mathbb{1}$ のとり方に依存するので，本当ならそこに添字をつけなければなりません)．この例は積半順序の理論で扱うのが簡単ですが，第 2 節から第 4 節までの積による構成が，この節で論じた枠組みにどのようにあてはまるものか見てみるのも面白いでしょう．たとえば，コーエンの半順序 $\mathrm{Fn}(\alpha, 2)$ は三つの要素からなる半順序 $\mathrm{Fn}(1, 2)$ を α 回有限サポート反復したもの (つまり $\mathbb{Q}_\xi = \mathrm{Fn}(1, 2)$) と同型です．普

通のレヴィ式潰し半順序 $\mathrm{Lv}(\alpha)$ (第 VII 章定義 8.6) は，$\mathbb{Q}_\xi$ として ξ を潰す通常の半順序 $\mathrm{Fn}(\omega,\xi)$ をとって有限サポート反復をしたものといえます．可算な条件によるレヴィ式潰し (定義 3.1) の場合は $\mathbb{Q}_\xi=(\mathrm{Fn}(\omega_1,\xi,\omega_1))^M$ として可算サポート反復をしたものになります．

イーストン式強制法 (第 4 節参照) について．E を索引関数とするとき，$\mathrm{dom}(E)$ の要素を昇順に数え上げて $\{\kappa_\xi:\xi<\alpha\}$ としましょう．このとき $\mathbb{P}(E)$ は M において $\mathbb{Q}_\xi=\mathrm{Fn}(E(\kappa_\xi),2,\kappa_\xi)$ と定義して，イデアル

$$\mathcal{I}=\{\,X\subset\alpha:\forall\lambda\,(\lambda\text{ が正則基数}\to|\lambda\cap\{\kappa_\xi:\xi\in X\}|<\lambda)\,\}$$

に属するサポートをもつ反復をした半順序と同型になります．ここでの π_ξ は $\check{\mathbb{Q}}_\xi$ だから M における $\mathrm{Fn}(E(\kappa_\xi),2,\kappa_\xi)$ の名前だということに注意しましょう．いわゆる**逆イーストン式強制**, 別名**うしろ向き**イーストン式強制とは，π_ξ として $\mathbb{P}_\xi$ による拡大モデルにおける $\mathrm{Fn}(E(\kappa_\xi),2,\kappa_\xi)$ の名前を用いることによって得られるものです．これに対して第 4 章で扱った $\mathbb{P}(E)$ を**前向き**イーストン式強制といいます (ただし，これらの用語は逆のほうが適切かもしれません)．前向きイーストン式強制と比較すると，逆イーストン式強制はこの節で述べた事項が本質的に必要であるためいくぶん扱いにくく，M が GCH をみたす場合でもしばしば基数を潰します．この強制法は，弱コンパクト基数やもっと大きな基数のところで GCH を破るためにシルヴァーによって用いられました．前向きイーストン式強制でこうした結果を得ることはできないことがわかっています．このことについて詳しくは，演習問題 I1 から I9 までを見てください．

次に，可算サポート反復やもっと複雑な反復よりも，有限サポート反復がいろいろな意味で《正統》であると思われる理由について論じます．ここで述べる注意事項は，有限サポート反復を理解する助けになるわけではありませんが，それ以外の反復を使うとき失敗しないための用心にはなるでしょう．

まず，同じ半順序が複数の名前をもつという点について．π と π' がいずれも半順序の $\mathbb{P}$-名前であるとき，$\mathbb{1}\Vdash\pi=\pi'$ と言えば $\mathbb{1}\Vdash(\mathbb{1}_\pi=\mathbb{1}_{\pi'}\wedge\leq_\pi=\leq_{\pi'})$ ということも含めて言っているとします．さて，たとえ $\mathbb{1}\Vdash\pi=\pi'$ であっても $\mathbb{P}*\pi$ と $\mathbb{P}*\pi'$ は同型でないことがあります (演習問題 K1)．ただし，両者の完備化は同型です．すなわち，両者を同じ一つの完備ブール代数に稠密に埋め込むことが可能です．半順序 $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ の完備化が同型になることを $\mathbb{P}\sim\mathbb{Q}$ と書くと，じつは $\mathbb{1}\Vdash\pi\sim\pi'$ から M において $\mathbb{P}*\pi\sim\mathbb{P}*\pi'$ となることが導かれます．無限段階の反復におい

ても，**有限サポートの場合**は同じことがいえます (演習問題 K8)．しかし，半順序の名前の列 π_n で，各々の π_n は $\mathrm{Fn}(\omega,2)$ に等しいことを $\mathbb{1}$ によって強制されるにもかかわらず，それらの可算サポート反復が $(\mathrm{Fn}(\omega,2))\check{}$ の ω 個のコピーの可算サポート反復と $\sim$ にならない実例を見つけることもできます (演習問題 K3)．

完備化への移行に際しても，有限サポート反復のふるまいは正統的です．いま，$\mathcal{B}_\xi$ を $\mathbb{P}_\xi$ の完備化とします．すると有限サポート反復の場合，極限 η に対する $\mathcal{B}_\eta$ は $\bigcup_{\xi<\eta}\mathcal{B}_\xi$ の完備化と一致します (演習問題 K2)．可算サポート反復の場合は，$\langle\mathcal{B}_n : n\in\omega\rangle$ を見ただけで $\mathcal{B}_\omega$ を定義することは全然できません．このときは，$\mathcal{B}_\omega$ は $\mathbb{P}_n$ がどのように構成されているかに本当に依存します (演習問題 K3)．

この節で論じたことが反復強制法のもっとも一般的な形というわけではありません．じつのところ，半順序の列 $\langle\mathbb{P}_\xi : \xi\leq\alpha\rangle$ と一緒に完備埋め込み写像 $i_{\xi\eta} : \mathbb{P}_\xi\to\mathbb{P}_\eta$ の可換な系列が M において与えられたら，それを反復強制構造と解釈することは可能です ($i_{\xi\eta}$ の系列が可換とは，$i_{\xi\zeta}=i_{\eta\zeta}\circ i_{\xi\eta}$ を意味します)．そして，G が M 上の $\mathbb{P}_\alpha$-ジェネリック集合であれば，$\langle M[i_{\xi\alpha}^{-1}(G)] : \xi\leq\alpha\rangle$ によってジェネリック拡大の上昇鎖が与えられます．ここまで一般化してしまうと，完備埋め込み写像の性質から明らかにわかること以外には，この反復について面白いことはなにも証明できなくなります．それでも，この形の反復の実例のなかに，私たちの論じてきた枠組みには収まりきらないけれど重要なものもたしかにあります．そのうちもっともよく知られているのはランダム実数強制の反復 (演習問題 K6) でしょう．また，すべての極限順序数 η について，$\bigcup_{\xi<\eta} i''_{\xi\eta}\mathbb{P}_\xi$ が $\mathbb{P}_\eta$ の中で稠密になるという性質をこの半順序の列がもっているなら，うまく π_ξ を定義することでこの反復を私たちの意味での有限サポート反復と同一視できます (演習問題 K5)．

§6　マーティンの公理の無矛盾性

κ が M における正則基数だったとして，$2^\omega=\kappa$ と MA をみたす M のジェネリック拡大を構成したかったとしましょう．細かいところを省略すると，強制法を κ 回反復してモデルの連鎖

$$M=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_\xi\subset\cdots\subset M_\kappa$$

を作ります．その際，M_ξ が得られたらそこに属する c.c.c. をみたす半順序 $\mathbb{Q}_\xi$ を選び，M_ξ 上の $\mathbb{Q}_\xi$-ジェネリック集合 G_ξ をとって $M_\xi[G_\xi]$ を $M_{\xi+1}$ とします．$\lambda<$

κ のとき MA(λ) は次のようにして確かめられます：M_κ において $\mathbb{Q}$ はサイズ λ 以下の c.c.c. をみたす半順序で，$\mathcal{D}$ はたかだか λ 個の $\mathbb{Q}$ の稠密部分集合からなる族だとします．$\mathcal{D}$ も $\mathcal{Q}$ も κ よりサイズの小さいオブジェクトだから，これらは κ 未満のある η に対応する M_η に属します．そこで，$\mathbb{Q}=\mathbb{Q}_\xi$ となる ξ が η より後のどこかに存在するように，全体の構成をあらかじめ工夫しておくことにします．そうすると，$\mathcal{D}$ は M_ξ に属するわけですから，G_ξ が $\mathcal{D}$ のすべての要素と交わる $\mathbb{Q}$ のフィルターになります．

厳密な取り扱いに際しては，このように簡単に述べたアプローチを第 5 節の結果に置き換えます．そこで，モデルの連鎖ではなく半順序の連鎖 $\langle \mathbb{P}_\xi : \xi \leq \kappa \rangle$ を M 内に構成します．$\mathbb{Q}_\xi$ のかわりに半順序の $\mathbb{P}_\xi$-名前 π_ξ を使います．このようにしてジェネリック拡大を反復する方法は，基本的な補題はすでに第 5 節で証明してあるので，あと必要なのは，適切な帳簿管理の仕組みによって π_ξ が必要なすべての c.c.c. 半順序の名前にわたって動くようにすることです．ただし，**すべての** c.c.c. 半順序はもちろん真のクラスになってしまうので，ある集合に属する c.c.c. 半順序の面倒だけをみていれば十分だと主張する補題を準備しておきます．

定義 6.1. pord(λ, W) は，W は集合 λ 上の c.c.c. をみたす半順序づけで最大要素として 0 をもつことを意味する．□

補題 6.2. 無限基数 λ に対して次の (1) と (2) は同値である．

(1) MA(λ).

(2) pord(λ, W) であり，$\mathcal{D}$ が λ 個以下の $\langle \lambda, W \rangle$ の稠密部分集合からなる族 (つまり $\mathcal{D}$ の要素はどれも λ の部分集合で W という順序の意味で稠密なもの) とするとき，$\mathcal{D}$ のすべての要素と交わる $\langle \lambda, W \rangle$ のフィルターが存在する．

【証明】 (1)→(2) は明らかだから，(2) を仮定して MA を証明したい．第 II 章の補題 3.1 によれば，MA(λ) はサイズが λ 以下の半順序に制限された MA(λ) と同値であることは証明済みである．そこで，$|\mathbb{Q}| \leq \lambda$ をみたす半順序 $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ と，そのたかだか λ 個の稠密部分集合からなる族 $\mathcal{D}$ を考えよう．$\mathcal{D}$ の全要素と交わる $\mathbb{Q}$ のフィルター G が存在することが示されればよい．

第 II 章では半順序に最大要素があるという仮定はしていなかった．また，$|\mathbb{Q}|$ が λ 未満という可能性もある．この二点を補正するために，サイズが λ の $\mathbb{Q}$ と交わらない集合 S をとってきて，順序づけ $\leq$ を集合 $\mathbb{Q} \cup S$ の上へ拡張して，$p \in \mathbb{Q}$ か

つ $s\in S$ ならいつでも $p<s$ とし，$s\in S$ かつ $t\in S$ ならいつでも $s\leq t$ とする．こうすれば，S の要素はすべて $\mathbb{Q}\cup S$ の最大要素となるし，$\mathcal{D}$ の要素はすべて $\mathbb{Q}\cup S$ の稠密部分集合でもある．そこで $\mathbb{1}$ を S の任意の要素とすれば，$\langle\mathbb{Q}\cup S,\leq,\mathbb{1}\rangle$ は $\langle\lambda,W,0\rangle$ という形の半順序と同型になって，(2) により $\mathcal{D}$ の全要素と交わる $\mathbb{Q}\cup S$ のフィルター G が得られる．このとき $G\cap\mathbb{Q}$ は $\mathcal{D}$ の全要素と交わる $\mathbb{Q}$ のフィルターとなる．□

M における基数 κ について，$2^\omega=\kappa$ と MA をみたす M の c.c.c. 拡大があることをこれから示したいと思います．第 II 章の系 2.19 によれば，MA から 2^ω が正則基数であることが導かれるので，ここでの κ は M において正則基数である必要があります．また第 II 章定理 2.18 によれば MA は $\forall\lambda<2^\omega\,(2^\lambda=2^\omega)$ を導くので，M において $2^{<\kappa}=\kappa$ である必要があります．そしてもちろん，κ は ω ではありません．

定理 6.3. M において κ は不可算な正則基数で $2^{<\kappa}=\kappa$ をみたすとする．このとき M には次の条件をみたす半順序 $\mathbb{P}$ が存在する：($\mathbb{P}$ は c.c.c. をみたし)^M，また M 上の任意の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合 G について $M[G]$ は MA と $2^\omega=\kappa$ をみたす．

【証明】 最初に，M に属する κ から $\kappa\times\kappa$ の上への関数 $f:\kappa\to\kappa\times\kappa$ で，条件

$$\forall\xi,\eta,\gamma<\kappa\,(f(\xi)=\langle\eta,\gamma\rangle\to\eta\leq\xi)$$

をみたすものを，一つ決めておこう (たとえば，κ から $\kappa\times\kappa\times\kappa$ の上への関数 g を用いて $g(\xi)=\langle\eta,\gamma,\delta\rangle$ とするとき，もしも $\eta\leq\xi$ なら $f(\xi)=\langle\eta,\gamma\rangle$, $\eta>\xi$ なら $f(\xi)=\langle 0,0\rangle$ としなさい)．あとで説明するとおり，この f は帳簿管理に用いられる．これから M において

$$\langle\,\langle\langle\mathbb{P}_\xi,\leq_{\mathbb{P}_\xi},\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi}\rangle:\xi\leq\kappa\rangle,\ \langle\langle\check{\lambda}_\xi,\sigma_\xi,\check{0}\rangle:\xi<\kappa\rangle\,\rangle$$

という形の有限サポート反復を構成する．ここでは定義 5.8 の書き方にしたがって半順序の順序づけと最大要素もくわしく書いておいた．ここから先，$\mathbb{P}_\xi$ についてはこれまでどおり $\leq_{\mathbb{P}_\xi}$ を $\leq$, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi}$ を $\mathbb{1}$, $\langle\mathbb{P}_\xi,\leq,\mathbb{1}\rangle$ を $\mathbb{P}_\xi$ と書く．しかし定義 5.8 でいう π_ξ は，ここではいつでも順序数 λ_ξ を定義域とした半順序であり，最大要素はいつでも 0 であるから，順序づけに与えられた名前が大切である．それをここでは $\leq_{\pi_\xi}$ ではなく σ_ξ と書く．

これからの構成では，κ より小さいすべての ξ について

(1) $\mathbb{1}\Vdash\mathrm{pord}(\check{\lambda}_\xi,\sigma_\xi)$ と

(2) $\lambda_\xi < \kappa$

が成立するようにする．(1) により，κ を含むすべての ξ について $\mathbb{P}_\xi$ は c.c.c. をみたす (補題 5.12 による)．(2) により，$\xi < \kappa$ ならば $|\mathbb{P}_\xi| < \kappa$ となることが ξ に関する簡単な帰納法で示され，したがって $|\mathbb{P}_\kappa| \leq \kappa$ となる．これらの不等式は，都合のよい $\mathbb{P}_\xi$-名前の個数を計算するときに重要になる．また，$2^{<\kappa} = \kappa$ という仮定をおくのもそのためである．

こうした計算の一例として，M 内にある $\check{\omega}$ の部分集合の都合のよい $\mathbb{P}_\kappa$-名前はたかだか $(\kappa^\omega)^\omega = \kappa$ 個である．したがって G が M 上の $\mathbb{P}_\kappa$-ジェネリック集合であるときには，$M[G]$ において $2^\omega \leq \kappa$ が成立する．

もう一つそうした計算の実例として，$\xi < \kappa$ かつ $\lambda < \kappa$ のとき，M 内にある $(\lambda \times \lambda)\check{}$ の部分集合の都合のよい $\mathbb{P}_\xi$-名前はたかだか $(\kappa^\omega)^\lambda = \kappa$ 個である．この事実を用いながら，実際の σ_ξ と λ_ξ の選び方をこれから述べていく．

$\mathbb{P}_\xi$ が与えられたら，まず M における κ より小さい基数 λ と $(\lambda \times \lambda)\check{}$ の部分集合の都合のよい $\mathbb{P}_\xi$-名前 σ のペア $\langle \lambda, \sigma \rangle$ をすべて数え上げる列 $\langle \langle \lambda_\gamma^\xi, \sigma_\gamma^\lambda \rangle : \gamma < \kappa \rangle$ を M 内で選ぼう．本当なら，この ξ 番目の段階ですべての σ_γ^ξ を扱ってしまいたいが，もちろん一回に使えるのは一個だけである．残りは後まわしにする．つまり，ξ 番目の段階では ξ 以下のどれかの番号 η に対する σ_γ^η を扱うことになる．最終的にはすべての名前の面倒を見られるように関数 f を用いて帳簿管理をする必要があるのは，このためである．

$f(\xi) = \langle \eta, \gamma \rangle$ だとする．$\eta \leq \xi$ だから σ_γ^η という $\mathbb{P}_\eta$-名前がすでに定義されている．これに対応する $\mathbb{P}_\xi$-名前 $i_{\eta\xi *}(\sigma_\gamma^\eta)$ を σ と書き，λ_γ^η を λ と書こう．λ_ξ としてはこの λ をとる．次には $\sigma_\xi = \sigma$ としたいが，σ は c.c.c. 半順序の名前とは限らないので，かわりに

$$\mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} (\mathrm{pord}(\check{\lambda}, \sigma_\xi) \wedge [\mathrm{pord}(\check{\lambda}, \sigma) \rightarrow \sigma_\xi = \sigma]) \qquad (*)$$

をみたす $\mathbb{P}_\xi$-名前を σ_ξ を選ぶ．そのような σ_ξ があることは次のようにしてわかる．まず $\exists W\, \mathrm{pord}(\lambda, W)$ は (たとえば $W = \lambda \times \lambda$ とすれば) ZFC で証明できるので，

$$\mathbb{1} \Vdash \exists W\, (\mathrm{pord}(\check{\lambda}) \wedge [\mathrm{pord}(\check{\lambda}, \sigma) \rightarrow W = \sigma])$$

であるから極大原理 (第 VII 章定理 8.2) によって σ_ξ がとれる．

これで反復強制構造の作り方はわかった．そこで $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\kappa$ とおき，G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合としよう．κ より小さいすべての基数 λ について MA が $M[G]$ において成立していることを証明しよう．そうすれば，$M[G]$ において $2^\omega \geq \kappa$ が

わかり，$2^\omega \leq \kappa$ はすでに証明済みなので，$M[G]$ において $2^\omega = \kappa$ が成立する．

$M[G]$ において次のことを仮定する：λ は κ 未満の基数，W は $\lambda\times\lambda$ の部分集合で，$\mathrm{pord}(\lambda, W)$ が成立していて，$\mathcal{D}$ はたかだか λ 個の $\langle\lambda, W\rangle$ の稠密部分集合からなる集合である．このとき，$\mathcal{D}$ の全要素と交わる $\langle\lambda, W\rangle$ のフィルターがあることを示そう．

κ 以下の順序数 ξ に対して $G_\xi = i_{\xi\kappa}^{-1}(G)$ とおく．このとき，W と $\mathcal{D}$ が κ より小さいある番号 η に対する $M[G_\eta]$ に属することにまず注意しよう．W については補題 5.14 からすぐわかる．$\mathcal{D}$ については，$\mathcal{D} = \{D_\mu : \mu < \lambda\}$ と書いてから集合 $\{\langle\mu,\nu\rangle : \nu \in D_\mu\}$ に補題 5.14 を適用すればよい．

そこで，$\eta < \kappa$ かつ $W, \mathcal{D} \in M[G_\eta]$ となる η をとる．次に $\gamma < \kappa$ かつ $W = \mathrm{val}(\sigma_\gamma^\eta, G_\eta)$ となる γ をとり，さらに $f(\xi) = \langle\eta,\gamma\rangle$ となるような ξ をとる．ここで $\sigma = i_{\eta\xi *}(\sigma_\gamma^\eta)$ とおけば，第 VII 補題 7.13 により $W = \mathrm{val}(\sigma, G_\xi)$ である．

次に，$M[G]$ 同様 $M[G_\xi]$ においても $\mathrm{pord}(\lambda, W)$ が成立することに注意．実際，pord のうちで ZFC のすべての推移的モデルに対して絶対的でないのは c.c.c. という性質だけだが，もしも W が $M[G_\xi]$ において c.c.c. をみたさないとしたら，順序づけ W に関する不可算な反鎖が $M[G_\xi]$ 内に存在するが，$M[G]$ と $M[G_\xi]$ とはいずれも M の基数を保存する拡大だったから，この反鎖は $M[G]$ においても不可算な反鎖になっているはずである．

先ほど述べた条件 $(*)$ によって

$$\mathbb{1} \Vdash [\mathrm{pord}(\check{\lambda}, \sigma) \to \sigma_\xi = \sigma]$$

であるから $W = \mathrm{val}(\sigma_\xi, G_\xi)$ となる．そこで $M[G_{\xi+1}]$ には $M[G_\xi]$ 上 $\langle\lambda, W\rangle$-ジェネリックなフィルター H_ξ が存在する．ここで $\mathcal{D} \in M[G_\eta] \subset M[G_\xi]$ なので，H_ξ は $\mathcal{D}$ の全要素と交わることになる．□

技術的に細かいことをいえば，たとえ M において AC が成立しているからといって，サイズ κ の集合すべてにその集合の順序型 κ をもつ整列順序づけを一意的に対応させる仕組みが M 上で定義できるわけではないのに，

$$\langle\langle\lambda_\gamma^\xi, \sigma_\gamma^\lambda\rangle : \gamma < \kappa\rangle$$

という特定の数え上げ方を一つ決めることは本当にできるのだろうかと，読者は不審に思ったかもしれません．この異議に答えるには，最初に集合 $R(\kappa^+)$ の整列順序づけ $\lhd$ を決めておき，$\mathbb{P}_\xi$ が与えられたら，条件をみたす $\langle\lambda, \sigma\rangle$ 全体の順序型

κ をもつ数え上げ方のうち $\triangleleft$-最小のものを $\langle\langle\lambda^{\xi}_{\gamma},\sigma^{\lambda}_{\gamma}\rangle:\gamma<\kappa\rangle$ とすればよいわけです．同様に，σ_{ξ} は (*) をみたす $\mathbb{P}_{\xi}$-名前のうち $\triangleleft$-最小のものをとってくればよいのです．すべての構成物が $R(\kappa^{+})$ という範囲内に収まっていることは，帰納法を使えば簡単にチェックできます．

系 6.4. $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})\rightarrow\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\mathrm{MA}+2^{\omega}=\omega_{83})$.

【証明】 GCH をみたすモデル M から出発すればよい．□

系 6.5. Con(ZFC＋弱到達不能基数の存在) から Con(ZFC＋MA＋2^{ω} は弱到達不能基数) が導かれる．

【証明】 κ が強到達不能基数であるモデル M から出発すればよい (第 VII 章系 5.16 を参照)．□

§7　可算サポート反復

有限サポート以外の反復強制法もいろいろな文献によく登場します．しかし，MA のような特筆すべき《よく引用される》公理も見当たらず，いろいろの論法も，どちらかというとその場しのぎといった性格のものになっています．一つの見本として，可算サポート反復について考えてみましょう．

訳注： 原書の刊行後に知られるようになった可算サポート反復に関する《特筆すべきよく引用される公理》として，マーティンの公理 MA(ω_1) を c.c.c. 半順序だけでなく ω_1-閉な半順序などを含むもっと広い半順序のクラスである**適正**半順序や**準適正**半順序にまで拡張した**適正強制の公理** (PFA) や**準適正強制の公理** (SPFA) などがあげられるでしょう．これらについては，シェラハの本 [Shelah 1998]，イェックの [Jech 1986]，あるいはイェックのテキストの第 3 版 [Jech 2002] などを見てください．

可算サポート反復が c.c.c. をみたすのは例外的なつまらない場合に限られるので，基数を保存させようとすればなにか他の特徴を探す必要があります．それはいくつかありますが，いちばん簡単な方法として，ω_1-閉で ω_2-c.c. をみたす半順序による強制があります．そこでこれらの特徴が反復に際して保存されるかどうか調べてみましょう．

まず ω_1-閉という性質について考えます．演習問題 E2 のところで述べるように，この性質は可算サポート反復に際して保存されない場合があります．しかし，用いる半順序の名前がもう一つ別の条件をみたせば，ω_1-閉性が保存されます．

定義 7.1. 半順序の $\mathbb{P}$-名前 π が **$\searrow\omega$-列について充足している**とは，次の性質をもつという意味である：もしも $\mathbb{P}$ の要素 p と (各自然数 n に対応した) $\mathrm{dom}(\pi)$ の要素 ρ_n が

$$p \Vdash ((\rho_n \in \pi) \wedge (\rho_{n+1} \leq \rho_n))$$

をすべての自然数 n についてみたしていれば，

$$p \Vdash ((\sigma \in \pi) \wedge (\sigma \leq \rho_n))$$

をすべての自然数 n についてみたす $\mathrm{dom}(\pi)$ の要素 σ が存在する．□

$\mathbb{P}$ が ω_1-閉で π が $\searrow\omega$-列について充足しているときは，$\mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{P}}$ (π は ω_1-閉である) ことが簡単にわかります．ω_1-閉な半順序の有限段階の反復によって得られる半順序がまた ω_1-閉であるということも，簡単にわかります (演習問題 E3)．しかし，無限段階の反復では，用いられる名前が $\searrow\omega$-列について充足しているというもっと厳しい条件をつけない場合，ω_1-閉性が保存されないこともあります (演習問題 E2)．

補題 7.2. $\langle\, \langle \mathbb{P}_\xi : \xi \leq \alpha \rangle, \langle \pi_\xi : \xi < \alpha \rangle \,\rangle$ を M における可算サポート反復強制構造 (第 5 節を参照) とし，各段階 ξ において $\mathbb{P}_\xi$-名前 π_ξ が $\searrow\omega$-列について充足していると仮定する．このとき $\mathbb{P}_\alpha$ は M において ω_1-閉である．

【証明】 M における $\mathbb{P}_\alpha$ の要素の列 p^n $(n \in \omega)$ が与えられていて，すべての自然数 n について $p^{n+1} \leq p^n$ となっていると仮定しよう．このとき，$p^\omega \leq p^n$ をすべての自然数 n についてみたす p^ω をみつけることにする．ここで $p^n = \langle \rho^n_\mu : \mu < \alpha \rangle$ とおこう．また，p^ω は $\langle \rho^\omega_\mu : \mu < \alpha \rangle$ という形になる．ρ^ω_μ を μ に関して再帰的に決めていく．その際，各段階 ξ において

$$p^\omega \restriction \xi = \langle \rho^\omega_\mu : \mu < \xi \rangle \in \mathbb{P}_\xi \quad \text{かつ} \quad \forall n \in \omega\, (p^\omega \restriction \xi \leq p^n \restriction \xi) \tag{$*$}$$

が成立していることを帰納法で確かめる．このほかにさらに

$$\mathrm{supt}(p^\omega) \subset \bigcup_n \mathrm{supt}(p^n)$$

となるようにする．これによって，ξ が極限順序数のときは $(*)$ がそれ以前の段階での $(*)$ から簡単に導かれることになる．

$\xi < \alpha$ とし，$p^\omega \restriction \xi$ が $(*)$ をみたすようにすでに定義されているとしよう．ρ^ω_ξ の決め方 (同じことだが $p^\omega \restriction (\xi+1)$ の決め方) を述べる．各自然 n について $p^{n+1} \restriction \xi \leq p^n \restriction \xi$ であるから，$\mathbb{P}_{\xi+1}$ 上の $\leq$ の定義によって

$$p^{n+1}\restriction\xi \Vdash (\rho_\xi^n \in \pi_\xi \wedge \rho_\xi^{n+1} \le \rho_\xi^n)$$

となる．そこで ξ 段階での (*) によって

$$p^\omega\restriction\xi \Vdash (\rho_\xi^n \in \pi_\xi \wedge \rho_\xi^{n+1} \le \rho_\xi^n)$$

である．π_ξ は $\searrow\omega$-列について充足しているので，$p^\omega \Vdash (\rho_\xi^\omega \in \pi_\xi)$ かつ $p^\omega \Vdash (\rho_\xi^\omega \le \rho_\xi^n)$ をすべての自然数 n に対してみたす ρ_ξ^ω を選べる．このように選べば (*) が $\xi+1$ 段階でも成立する．さらに，もしも $\xi \notin \bigcup_n \mathrm{supt}(p^n)$ だったら，すべての n について $\rho_\xi^n = \mathbb{1}$ だから ρ_ξ^ω も $\mathbb{1}$ にすることによって $\xi \notin \mathrm{supt}(p^\omega)$ にできる．□

ここで注意すべきなのは，$\searrow\omega$-列について充足していることは半順序の $\mathbb{P}$-名前の属性であって，その名前で呼ばれた半順序の属性ではないということです．もしも $\mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{P}} (\pi$ は ω_1-閉$)$ であれば，$\mathbb{1} \Vdash (\pi = \pi')$ をみたし $\searrow\omega$-列について充足している $\mathbb{P}$-名前 π' を作れる正統的な手続きが存在します (演習問題 D1 と D2).

GCH のモデルから出発して，ω_1-閉で ω_2-c.c. をみたす半順序の可算サポート反復を $\searrow\omega$-列について充足した名前を用いて構成し，それによって $\mathrm{CH} + 2^{\omega_1} > \omega_2 + \mathrm{MA}_1$ のモデルが得られるのではないかと期待したくなります．ここで MA_1 は次の命題です：$\mathbb{P}$ が ω_1-閉かつ ω_2-c.c. をみたす半順序で，$\mathcal{D}$ が 2^{ω_1} 個未満の $\mathbb{P}$ の稠密部分集合からなる族であるとき，$\mathcal{D}$ の全要素と交わる $\mathbb{P}$ のフィルターが存在する．その詳細は第 6 節で MA の無矛盾性を示すのに用いたものと非常によく似たものになるはずです．しかし残念なことに ω_2-c.c. がこの反復に際して保存されるとは限りません (演習問題 E6)．MA_1 は $\neg\mathrm{CH}$ や $2^{\omega_1} = \omega_2$ からは簡単に導かれる (演習問題 J2) のですが，$\mathrm{CH} + 2^{\omega_1} > \omega_2$ と MA_1 が両立するかどうかはわかりません．

原注：(校正時の追記) 最近のスタンリーとシェラハの研究によりこれらは両立しないことがわかりました．

扱う半順序にもっと条件をつけた MA_1 の弱いバージョンのいくつかについて，その無矛盾性がバウムガルトナーやレイヴァーやシェラハによって示されています．もっとも，《然るべき》公理 MA_1 の無矛盾性についてはなんともいえない状況なので，せめて MA_1 から導かれる結果の一つについてその無矛盾性を証明しておきましょう．演習問題ではこのタイプの他の論証を扱っています．どの論証においても，そのとき用いられる反復に際して ω_2-c.c. が保たれるかどうかを個別にチェックしています．

CH と $2^{\omega_1} > \omega_2$ を仮定して，ω_1 のほとんど交わりのない部分集合の極大族

(m.a.d.f., 第 II 章定義 1.1 を参照) のサイズがどうなっているか考えます．$\lambda \leq \omega$ のとき，ω_1 を互いに交わりのない λ 個の不可算集合に分割したものは m.a.d.f. になります．また，CH のおかげで，サイズ 2^{ω_1} の m.a.d.f. も存在します (第 II 章定理 1.3)．サイズが ω_1 の m.a.d.f. は存在しません (第 II 章定理 1.2)．こうして，$\omega_1 < \lambda < 2^{\omega_1}$ のときに，サイズが λ の m.a.d.f. があるかどうかという問題が残ります．

$\mathrm{CH} + 2^{\omega_1} > \omega_2$ とサイズ ω_2 の m.a.d.f. の存在とが両立しうることの証明は，ω の部分集合のサイズ ω_1 の m.a.d.f. の存在が $\neg\mathrm{CH}$ と矛盾しないことを述べたこの章の定理 2.3 の証明を手直しすれば簡単に得られます (演習問題 A8 を見てください)．また，$\mathrm{CH} + \mathrm{MA}_1$ からは，ω_1 の部分集合の m.a.d.f. で，ω_1 でも 2^{ω_1} でもないその中間のサイズをもつものは存在しないことが導かれます．これは ω の部分集合に関する類似の結果を MA から導いた第 II 章系 2.16 の証明のごく当たり前な焼き直しでできます．残念ながら $\mathrm{CH} + \mathrm{MA}_1 + 2^{\omega_1} > \omega_2$ の無矛盾性を確立することはできませんが，そのかわり ω_1 でも 2^{ω_1} でもないその中間のサイズをもつ m.a.d.f. の不存在が $\mathrm{CH} + 2^{\omega_1} > \omega_2$ と矛盾しないことを，ほとんど交わりのない集合をつけ加える半順序の反復によって示します．

第 II 章の定義 2.7 と類似した次の定義を与えます．

定義 7.3. $\mathcal{A}$ を $\mathcal{P}(\omega_1)$ の部分集合とする．ほとんど交わりのない集合をつけ加える半順序 $\mathbb{Q}_{\mathcal{A}}$ とは，集合

$$\{\langle s, F\rangle : s \subset \omega_1 \wedge |s| < \omega_1 \wedge F \subset \mathcal{A} \wedge |F| < \omega_1\}$$

を次のように順序づけしたものである：$\langle s', F'\rangle \leq \langle s, F\rangle$ は

$$s \subset s' \wedge F \subset F' \wedge \forall x \in F\,(x \cap s' \subset s)$$

を意味する．また，$\mathbb{1} = \langle 0, 0\rangle$ とする．□

補題 7.4. $\mathbb{Q}_{\mathcal{A}}$ の二つの要素 $\langle s_1, F_1\rangle$ と $\langle s_2, F_2\rangle$ が両立可能なのは

$$\forall x \in F_1\,(x \cap x_2 \subset s_1) \wedge \forall x \in F_2\,(x \cap x_1 \subset s_2)$$

となるちょうどその場合であり，このとき $\langle s_1 \cup s_2, F_1 \cup F_2\rangle$ は両者に共通の拡大の一つとなる．□

補題 7.5. $\mathbb{Q}_{\mathcal{A}}$ は ω_1-閉である．また CH のもとでは ω_2-c.c. をみたす．□

補題 7.6. M において次のことを仮定する：$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\omega_1)$, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{\mathcal{A}}$，また $\mathcal{A}$ は

$$\forall F \subset \mathcal{A}\,(|F| < \omega_1 \to |\omega_1 \setminus \bigcup F| = \omega_1) \tag{$*$}$$

をみたす．G を M 上の一つの $\mathbb{Q}$-ジェネリック集合として，

$$d = \bigcup \{\, s : \exists F\,(\langle s, F\rangle \in G)\,\}$$

とおく．このとき，$M[G]$ において $|d| = \omega_1$ と $\forall x \in \mathcal{A}\,(|d \cap x| < \omega_1)$ が成立する．

【証明】 $\mathbb{Q}$ は M において ω_1-閉なので，$\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$ が成立する．また，$(*)$ を用いると，ω_1^M 未満のすべての順序数 δ について集合

$$\{\, \langle s, F\rangle : \sup(s) > \delta \,\}$$

が稠密となることが示され，このことから d が ω_1^M の中で非有界であることが導かれる．□

特に，M において $\mathcal{A}$ が互いにほとんど交わりのない集合からなるサイズ ω_1 以上の集合族である場合は $(*)$ が成立し，したがって $\mathcal{A}$ が $M[G]$ において m.a.d.f. にならないことがわかります．そこで，$\mathbb{Q}_{\mathcal{A}}$ の形の半順序を反復すれば，小さいサイズの m.a.d.f. のないモデルを作れると期待できそうです．可算サポート反復の性質は用いられる半順序の名前に鋭敏に依存するので，次にはそれを指定しておきます．

定義 7.7. M の要素 $\mathbb{P}$ は (ω_1-閉な半順序である)^M とし，

$$\mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{P}} (\tau \subset \mathcal{P}(\omega_1))$$

とする．$\mathbb{Q}_\tau$ の**標準の** $\mathbb{P}$-名前とは，次のような三つ組 $\langle \pi, \leq_\pi, \mathbb{1}_\pi\rangle$ である．π は

$$\pi = \{\, \langle \mathrm{op}(\check{s}, \sigma), \mathbb{1}_{\mathbb{P}}\rangle : s \subset \omega_1 \wedge |s| < \omega_1 \wedge \mathbb{1} \Vdash (\sigma \subset \tau \wedge |\sigma| < \omega_1)$$
$$\wedge\, \sigma \text{ は } \tau \text{ の部分集合の都合のよい } \mathbb{P}\text{-名前である} \,\}$$

によって定義される．また $\mathbb{1}_\pi = \mathrm{op}(\check{0}, \check{0})$ とする．□

ここで op と書いたのは，(第 VII 章の 2.16 で定義した) 順序対の解釈に依存しない名前のことです．ここでは $\leq_\pi$ を指定しませんでしたが，これは名前そのものはどんなものでもあまり関係ないからです．$\leq_\pi$ は $\mathbb{Q}_\tau$ 上の定義 7.3 のとおりの順序であることを $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ によって強制されるような $\mathbb{P}$-名前でありさえすればよいのです．

補題 7.8. M において $\mathbb{P}$ と τ と π が定義 7.7 のとおりに与えられたとする．G を M 上の一つの $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とし，また $\mathcal{A} = \tau_G$ とする．このとき $M[G]$ に

おいて $\pi_G = \mathbb{Q}_A$ となる．

【証明】明らかに $\pi_G \subset \mathbb{Q}_A$．$\langle s, F\rangle \in \mathbb{Q}_A$ だったとしよう．M において $\mathbb{P}$ が ω_1-閉であることから $s \in M$ となる．$F = \sigma_G$ となる $\mathbb{P}$-名前 σ を考える．これが $\mathbb{1} \Vdash (\sigma \subset \tau \wedge |\sigma| < \omega_1)$ となればよいがそうとは限らない．しかし極大原理によって

$$\mathbb{1} \Vdash [[(\sigma \subset \tau \wedge |\sigma| < \omega_1) \to \sigma' = \sigma] \wedge [\neg(\sigma \subset \tau \wedge |\sigma| < \omega_1) \to \sigma' = 0]]$$

をみたす σ' は存在する．またこれに対して $\mathbb{1} \Vdash \sigma'' = \sigma'$ をみたす τ の部分集合の都合のよい $\mathbb{P}$-名前 σ'' をとれる．このとき $\langle s, F\rangle = \mathrm{val}(\mathrm{op}(\check{s}, \sigma''), G)$ かつ $\langle \mathrm{op}(\check{s}, \sigma''), \mathbb{1}\rangle \in \pi$．したがって $\mathbb{Q}_A \subset \pi_G$ となる．□

補題 7.9. M において $\mathbb{P}$ と τ と π が定義 7.7 のとおりに与えられたとする．このとき π は $\searrow\omega$-列について充足している．

【証明】すべての自然数 n について

$$p \Vdash \langle \check{s}_{n+1}, \sigma_{n+1}\rangle \leq \langle \check{s}_n, \sigma_n\rangle$$

としよう．このとき $s_n \subset s_{n+1}$ である．$s = \bigcup_n s_n$ とおき，σ を $\mathbb{1} \Vdash \sigma = \bigcup_n \sigma_n$ となるように (より正確には，$\rho = \{\langle \sigma_n, \mathbb{1}\rangle : n \in \omega\}$ とおいたとき $\mathbb{1} \Vdash \sigma = \bigcup \rho$ となるように) 選ぶ．するとすべての自然数 n について $p \Vdash \langle \check{s}, \sigma\rangle \leq \langle \check{s}_n, \sigma_n\rangle$ となる．□

この π の定義に，$\check{s}$ の形の名前だけでなく ω_1 の可算部分集合の都合のよい $\mathbb{P}$-名前をすべて含めておくほうがより妥当だったのではないかと思うかもしれません．じつは補題 7.8 と補題 7.9 はこのように変更した定義のもとでも通用し，その場合 $\mathbb{P}$ が ω_1-閉であるという条件も不要になります．しかし，名前を $\check{s}$ の形に制限しておいたことは，超限回の反復に際して ω_2-c.c. が保存されることを検証するとき効果を発揮します．変更された定義を用いても同じく ω_2-c.c. が保存されるのも本当ですが，それを示すには，標準的な反復が変更後の反復に稠密に埋め込めることを先に証明する必要があるのです (演習問題 D5)．

補題 7.10. M において CH が成立しているとし，$\langle \langle \mathbb{P}_\xi : \xi \leq \alpha\rangle, \langle \pi_\xi : \xi < \alpha\rangle\rangle$ を M における可算サポート反復強制構造とする．各 ξ について $\mathbb{1} \Vdash (\tau_\xi \subset \mathcal{P}(\omega_1))$ をみたす $\mathbb{P}_\xi$-名前 τ_ξ が対応していて，π_ξ が $\mathbb{Q}_{\tau_\xi}$ の標準の $\mathbb{P}_\xi$-名前になっていると仮定する．このとき，$\mathbb{P}_\alpha$ は ω_2-c.c. をみたす．

【証明】M において ω_2 未満の各 γ に対応する $\mathbb{P}_\alpha$ の要素 p^γ が与えられたとする．

CH によって Δ-システム補題を使うことができて，ω_2 のサイズ ω_2 のある部分集合 X について，$\{\mathrm{supt}(p^\gamma) : \gamma \in X\}$ が Δ-システムをなすことが導かれる．この Δ-システムの根を r としよう．$p^\gamma = \langle \rho^\gamma_\xi : \xi < \alpha \rangle$ とおき，さらに $\rho^\gamma_\xi = \mathrm{op}(\check{s}^\gamma_\xi, \sigma^\gamma_\xi)$ だったとする．CH によって，次のような X の部分集合 Y が存在する：$|Y| = \omega_2$ であり，かつ，s^γ_ξ の値が r の各要素 ξ ごとに Y の全要素 γ について同じになる．そこで $\xi \in r$ かつ $\gamma \in Y$ のとき $s^\gamma_\xi = s_\xi$ となるとしよう．すると，Y に属する γ に対応する p^γ どうしは互いに両立可能となる．このことは次のようにすればわかる．γ と δ を Y の要素とすれば，以下のように定義した $\langle \rho_\xi : \xi, \alpha \rangle$ は p^γ と p^δ に共通の拡大である：

(a) $\xi \notin \mathrm{supt}(p^\delta)$ のときには $\rho_\xi = \rho^\gamma_\xi$ とする．

(b) $\xi \notin \mathrm{supt}(p^\gamma)$ のときには $\rho_\xi = \rho^\delta_\xi$ とする．

(c) $\xi \in r$ のときには $\rho_\xi = \mathrm{op}(\check{s}_\xi, \sigma_\xi)$, ただし σ_ξ は $\mathbb{1} \Vdash \sigma_\xi = \sigma^\gamma_\xi \cup \sigma^\delta_\xi$ をみたす都合のよい名前とする．□

ここからは一直線に，m.a.d.f. に関する望みどおりの結果を得ることができます．ここで，これから無矛盾性を証明する命題をきちんと述べておきます．

定義 7.11. P_1 とは次の命題のことである：$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\omega_1)$ かつ $|\mathcal{A}| < 2^{\omega_1}$ かつ

$$\forall F \subset \mathcal{A} \, (|F| < \omega_1 \rightarrow |\omega_1 \setminus \bigcup F| = \omega_1)$$

のときは必ず

$$\exists d \subset \omega_1 \, (|d| = \omega_1 \wedge \forall x \in \mathcal{A} \, (|d \cap x| < \omega_1))$$

となる．□

補題 7.12. 命題 P_1 から，$\mathcal{A}$ が $|\mathcal{A}| \geq \omega_1$ をみたす m.a.d.f. のときは必ず $|\mathcal{A}| = 2^{\omega_1}$ となることが導かれる．□

定理 7.13. M において次のことが成立しているとする：CH が成立しており，また，κ は $2^{<\kappa} = \kappa$ をみたし ω_1 より大きな正則基数である．このとき，次の条件をみたす半順序 $\mathbb{P}$ が M 内に存在する．すなわち，$\mathbb{P}$ は M において ω_1-閉で ω_2-c.c. をみたし，また G を M 上の任意の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とするとき，$M[G]$ において $2^{\omega_1} = \kappa$ と命題 P_1 が成立する．

【証明】 第 6 節で MA のモデルを構成したときと同様に，M 内に反復強制構造

$\langle\langle \mathbb{P}_\xi : \xi \leq \alpha\rangle, \langle \pi_\xi : \xi < \alpha\rangle\rangle$ を構築する．ただし，今回は可算サポートを用いる．$\mathbb{P}_\xi$ が与えられたとしよう．議論に必要な $\mathcal{P}(\omega_1)$ の部分集合の $\mathbb{P}_\xi$-名前をすべてリストアップする．そのためには，たとえば，λ を κ 未満の適当な基数として $(\lambda\times\omega_1)\check{}$ の部分集合の都合のよい名前をすべて数え上げて $\langle \sigma^\xi_\gamma : \gamma < \kappa\rangle$ とし，τ^ξ_γ を

$$\mathbb{1} \Vdash \tau^\xi_\gamma = \{x \subset \omega_1 : \exists \mu < \kappa\,(x = \{\nu : \langle \mu, \nu\rangle \in \sigma^\xi_\gamma\})\}$$

をみたす名前にすればよい．第 6 章で考えたのと同様の帳簿関数 $f:\kappa\to\kappa\times\kappa$ を考え，$f(\xi) = \langle \eta, \gamma\rangle$ のとき $\tau_\xi = i_{\eta\xi *}(\tau^\eta_\gamma)$ とおいて，π_ξ を $\mathbb{Q}_{\tau_\xi}$ の標準の $\mathbb{P}_\xi$-名前とする．$\mathbb{P} = \mathbb{P}_\alpha$ としよう．このとき補題 7.10 により $\mathbb{P}$ は ω_2-c.c. をみたす．

MA に関する議論のときと同様にして，$\mathbb{P}$ は基数を保存し，$M[G]$ において $2^{\omega_1} \leq \kappa$ となる．さらに，$M[G]$ において $|\mathcal{A}| < \kappa$ をみたす $\mathcal{P}(\omega_1)$ の任意の部分集合 $\mathcal{A}$ について命題 P_1 の結果が成立することから，$M[G]$ において $2^{\omega_1} \geq \kappa$ となる．したがって $2^{\omega_1} = \kappa$ と P_1 が $M[G]$ において成立する．□

命題 P_1 を強めた SL_1 (ソロヴェイの補題) と呼ばれる命題は，$\mathcal{A}$ のほかにもう一つ $\mathcal{P}(\omega_1)$ の部分集合 $\mathcal{C}$ を考え，$|\mathcal{C}| < 2^{\omega_1}$ かつ

$$\forall y \in \mathcal{C}\, \forall F \subset \mathcal{A}\,(|F| < \omega_1 \to |y \setminus F| = \omega_1)$$

となっていれば，$|d| = \omega_1$ かつ $\forall x \in \mathcal{A}\,(|d \cap x| < \omega)$ かつ $\forall y \in \mathcal{C}\,(|d \cap y| = \omega_1)$ をみたす ω_1 の部分集合 d が存在する，という主張です．これと同様の ω の部分集合に関する主張 SL_0 は MA のもとで成立します (第 II 章定理 2.15)．定理 7.13 で得られた $M[G]$ が SL_1 をみたすことを直接検証することは可能です．しかし，それをここで実行するには及びません．なぜなら，CH のもとで $P_1 \leftrightarrow \mathrm{SL}_1$ となる，というヴァン・ダウエンの結果があるからです (演習問題 A2)．

第 VIII 章の演習問題

A. ほとんど交わりのない集合族，その他

次の命題のことをソロヴェイの補題 SL_θ といいます：$\mathcal{A}$ と $\mathcal{C}$ が $\mathcal{P}(\theta)$ の部分集合で，$|\mathcal{A}|$ も $|\mathcal{C}|$ も 2^θ 未満であって，さらに

$$\forall y \in \mathcal{C}\, \forall F \subset \mathcal{A}\,(|F| < \theta \to |y \setminus \bigcup F| = \theta)$$

となっているとするとき，

$$\forall x \in \mathcal{A}\,(|d \cap x| < \theta) \wedge \forall y \in \mathcal{C}\,(|d \cap y| = \theta)$$

をみたす θ の部分集合 d が存在する．特に $\mathcal{C}=\{\theta\}$ とおいた SL_θ の特別の場合を P_θ と書きます．このとき (第 II 章定理 2.15 によって) $\mathrm{MA}\to\mathrm{SL}_\omega$ であり，また (この章の定理 7.13 によって) P_{ω_1} と $\mathrm{CH}+2^{\omega_1}>\omega_2$ は両立可能です．

[A1]　θ が正則基数であり $2^\theta=\theta^+$ であれば，SL_θ が成立する．このことを示しなさい．

[A2]　(ヴァン・ダウエンの結果)　θ が $2^{<\theta}=\theta$ をみたす正則基数だとして $\mathrm{SL}_\theta\leftrightarrow P_\theta$ を示しなさい．［ヒント］$S=\{s\subset\theta:|s|<\theta\}$ とおきなさい．$a\in\mathcal{A}$ のとき $a'=\{s\in S:s\cap a\neq 0\}$, $c\in\mathcal{C}$ のとき $c'=\{s\in S:s\cap c=0\}$, $\alpha<\theta$ のとき $e'_\alpha=\{s\in S:s\cap\alpha\neq 0\}$ としなさい．P_θ を (θ 上で使うかわりに) S 上で a' と c' と e'_α に対して適用して S のサイズ θ の部分集合 d' を得たら，$d=\bigcup d'$ とおきなさい．

次の命題のことを優関数仮説 DF_θ といいます：$\mathcal{F}\subset{}^\theta\theta$ かつ $|\mathcal{F}|<2^\theta$ のとき，

$$\forall f\in\mathcal{F}\,(|\{\alpha<\theta:g(\alpha)\leq f(\alpha)\}|<\theta)$$

をみたす ${}^\theta\theta$ の要素 g がある．

[A3]　θ が正則基数であるとき $P_\theta\to\mathrm{DF}_\theta$ を示しなさい．［ヒント］集合 $\theta\times\theta$ 上で P_θ を $\{\langle\alpha,\beta\rangle:\beta\leq f(\alpha)\}$ および $\alpha\times\theta$ の形の集合に適用しなさい．まず，$\mathcal{F}$ の要素がすべて単調増加関数だと仮定できることに注意するとよいでしょう．

[A4]　$\mathrm{DF}_\omega\wedge\neg P_\omega$ が矛盾しないことを証明しなさい．［ヒント］M が CH と $2^{\omega_1}=\omega_3$ をみたすとして，c.c.c. をみたす半順序を用いた ω_2-段階の有限サポート反復を行ないます．各段階で前の段階までに得られたモデルに属するすべての関数に対して優越する関数を (第 II 章演習問題 8 で用いた半順序によって) つけ加えなさい．最終的に得られるモデルでは $\mathrm{DF}_\omega\wedge 2^\omega=\omega_2\wedge 2^{\omega_1}=\omega_3$ が成立します．いっぽう，$P_\omega\to\mathrm{SL}_\omega\to\forall\kappa<2^\omega(2^\kappa=2^\omega)$ となります．これについては第 II 章の定理 2.18 を見てください．

[A5]　問題 A4 をより大きな基数に拡張しなさい．すなわち，M において θ は $2^{<\theta}=\theta$ をみたす正則基数だとする．M において θ-閉かつ θ^+-c.c. をみたす半順序を見つけて，ジェネリック拡大において $\mathrm{DF}_\theta\wedge\neg P_\theta$ が成立するようにしなさい．［ヒント］最初に $2^\theta=\theta^+$ と $2^{(\theta^+)}=\theta^{+++}$ を強制し，それから θ より小さいサポートをもつ反復を行ないなさい．

$\mathcal{P}(\theta)$ の部分集合 $\mathcal{A}$ が独立集合族であるとは，自然数 m,n と $\mathcal{A}$ の異なる要素 $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n$ が与えられたとき，必ず

$$|a_1 \cap \cdots \cap a_m \cap (\theta \setminus b_1) \cap \cdots \cap (\theta \setminus b_n)| = \theta$$

となることをいいます．この性質をもつ集合族のうちで極大であるものを極大独立集合族，略して m.i.f. といいます．

[A6] (ハウスドルフの結果)　サイズ 2^θ の独立集合族が存在することを証明しなさい．［コメント］ほとんど交わりのない集合族についての対応する命題とちがって，基数の算術についての仮定は必要ありません．演習問題 B4 も参照しなさい．［ヒント］$I = \{\langle s, \mathcal{A} \rangle : s \subset \theta \wedge |s| < \omega \wedge \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(s)\}$ とおきましょう．θ の部分集合 X に対して $X' = \{\langle s, \mathcal{A} \rangle \in I : X \cap s \in \mathcal{A}\}$ とおくと，$\{X' : X \in \mathcal{P}(\theta)\}$ が I の部分集合からなる独立集合族となります．［コメント］$\theta = \omega$ のときと $\theta = 2^\omega$ のときのこの結果は，フィヒテンホルツとカントロヴィッツに負います．

[A7] (プライスの結果)　θ は $2^{<\theta} = \theta$ と P_θ が成立する正則基数だとする．このとき m.i.f. はすべてサイズ 2^θ となることを証明しなさい．［ヒント］演習問題 A2 と同様に考えなさい．$a \in \mathcal{A}$ のとき $a' = \{s \in S : s \cap a = 0\}$ とおきなさい．d' から互いに交わりのない θ 個の要素 s_β $(\beta < \theta)$ をとりなさい．$d = \bigcup \{s_{\beta+1} : \beta < \theta\}$ とおけば，$\mathcal{A} \cup \{d\}$ も独立集合族になります．

[A8] M において θ と κ は $2^{<\theta} = \theta$ かつ $2^\theta = \theta^+ < \kappa$ かつ $\kappa^\theta = \kappa$ となるとし，$M[G]$ を $\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \theta)$ を用いた M の拡大とする．このとき，$M[G]$ において次が成立することを示しなさい：$2^\theta = \kappa$ であって m.i.f. はすべてサイズ κ となるが，サイズ θ^+ の m.a.d.f. も存在する (したがって P_θ は成立しない)．［ヒント］定理 2.3 と 2.6 を見なさい．

$\mathcal{U}$ を ω 上の超フィルターとしなさい．$\mathcal{U}$ の部分集合 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{U}$ を**生成する**とは，$\mathcal{U}$ の他には $\mathcal{A}$ を含む超フィルターが存在しないことをいいます．基数

$$\chi(\mathcal{U}) = \min(\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subset \mathcal{U} \wedge \mathcal{A} \text{ が } \mathcal{U} \text{ を生成する}\})$$

を $\mathcal{U}$ の**指標**と呼びます．

[A9] $\mathcal{U}$ が非単項超フィルターであれば $\omega_1 \le \chi(\mathcal{U}) \le 2^\omega$ となることを証明しなさい．次に P_ω を仮定して $\chi(\mathcal{U}) = 2^\omega$ を示しなさい．［ヒント］$\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ のとき集合 $\{\omega \setminus a : a \in \mathcal{A}\}$ に P_ω を適用しなさい．

[A10] $\chi(\mathcal{U}) = \omega_1$ をみたす非単項超フィルター $\mathcal{U}$ の存在が $2^\omega > \omega_1$ と矛盾しないことを示しなさい．［ヒント］$2^\omega > \omega_1$ をみたす M から出発します．c.c.c. をみた

す半順序を ω_1 回反復してモデルの連鎖 M_α $(\alpha \leq \omega_1)$ を作りなさい．M_α に属する $\mathcal{P}(\omega)$ 上の超フィルター $\mathcal{U}_\alpha$ を作って，$\alpha<\beta \to \mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}_\beta$ となるようにしなさい．$M_{\alpha+1}$ は M_α に

$$\forall x \in \mathcal{U}_\alpha \, (|a_\alpha \setminus x| < \omega)$$

をみたす ω の部分集合 a_α をつけ加えることによって得られるとしましょう．$\mathcal{U}_{\alpha+1}$ は $M_{\alpha+1}$ において $\mathcal{U}_\alpha \cup \{a_\alpha\}$ を拡大する任意の超フィルターとします．このとき $\mathcal{U}_{\omega_1}$ は M_{ω_1} に属する超フィルターで，$\{a_\alpha : \alpha<\omega_1\}$ によって生成されます．

[A11] (ポスピシュの結果)　$\chi(\mathcal{U})=2^\omega$ をみたす ω 上の超フィルター $\mathcal{U}$ が存在することを示しなさい．　[ヒント] (ハイナルとジュハツによる) $\mathcal{A}$ をサイズが 2^ω である独立集合族とし，$\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ かつ

$$\forall \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \, (|\mathcal{B}| \geq \omega \to (\bigcap \mathcal{B}) \notin \mathcal{U})$$

となるような $\mathcal{U}$ を見つけなさい．

***[A12]**　M において I を無限集合として $\mathcal{A}=\{a_i : i \in I\}$ とおきこれが独立集合族になっていたとします．このときある c.c.c. 半順序による拡大において次の性質をもつ ω の部分集合 d を付け加えられることを示しなさい：$\mathcal{A} \cup \{d\}$ は独立集合族だが，$\mathcal{P}(\omega) \cap M \setminus \mathcal{A}$ のいかなる要素 x についても $\mathcal{A} \cup \{x, d\}$ は決して独立集合族にならない．　[ヒント] M において $\mathcal{B}$ を 2^I の正則開集合代数とし，b_i を基本開集合 $\{f \in 2^I : f(i)=1\}$ としなさい．また，$h : \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{B}$ を M において $h(a_i)=b_i$ によって定められるブール代数の準同型写像としなさい．つけ加えられるべき集合 d として，h の核に属するすべての集合とほとんど交わりのない集合を考えなさい．

[A13]　サイズが ω_1 の m.i.f. の存在が $2^\omega > \omega_1$ と矛盾しないことを示しなさい．[ヒント] 演習問題 A10 と同様に考えますが，こんどは M_α と一緒にサイズが ω_1 の独立集合族を作ります．$M_{\alpha+1}$ は M_α から演習問題 A12 の結果を用いて得られるものです．

[A14]　M における ω の部分集合の m.a.d.f. で，$M \subset N$ かつ $\mathcal{P}(\omega) \cap M \neq \mathcal{P}(\omega) \cap N$ をみたすいかなるモデル N においても極大でないという性質をもつものが存在することを示しなさい．　[コメント] 定理 2.3 の $\mathcal{A}$ を選ぶにあたってなんらかの注意が必要であることをこの例は示しています．　[ヒント] ほとんど交わりのない集合からなる $\mathcal{P}(\omega)$ の完全部分集合を拡大して $\mathcal{A}$ を作ってみなさい．

[A15] $\mathcal{A}$ を ω の部分集合からなる m.i.f. とする．このとき $|\mathcal{A}| \geq \omega_1$ を示しなさい．また MA を仮定すると $|\mathcal{A}| = 2^\omega$ となることを示しなさい．

B. エルデシュとラドーの定理とその応用

[B1] 集合 $\{s \subset I : |s| = 2\}$ のことを $[I]^2$ と書く．いま，$|I| \geq (2^\kappa)^+$ として関数 $f : [I]^2 \to \kappa$ を考える．このとき I の部分集合 H で，$|H| \geq \kappa^+$ かつ f が $[H]^2$ 上で定数値をとるものが存在することを示しなさい． [ヒント] そのような H が存在しなかったと仮定しなさい．κ-項演算について閉包をとることにより，I の部分集合 J で，$|J| \leq 2^\kappa$ かつ

$$\forall X \subset J \forall i \in I \setminus J [|X| \leq \kappa \to \exists j \in J \setminus X \forall x \in X [f(\{x,j\}) = f(\{x,i\})]] \qquad (*)$$

をみたすものを見つけなさい．$I \setminus J$ の要素 i をとりましょう．$\alpha < \kappa$ のとき $K_\alpha = \{x \in J : f(\{x,j\}) = \alpha\}$ とおきなさい．M_α を，f が $[M_\alpha]^2$ 上で定数値をとるような K_α の部分集合とし，特にその性質をもつもののうち極大なものとする．$X = \bigcup_\alpha M_\alpha$ とおいて，この X に $(*)$ を適用してそこに述べられた $J \setminus X$ の要素 j が得られたとしなさい．いま $f(\{i,j\}) = \alpha$ とおけば，$M_\alpha \cup \{j\}$ が M_α の極大性に矛盾するものとなります． [コメント] このような H は f に関して**均質**な集合と呼ばれます．ここで述べた結果はエルデシュとラドーの定理の一つの特別な場合です．集合の分割に関するいろいろな結果について詳しくは，[Erdös–Hajnal–Máté–Rado 1984] や [Kunen 1977] を見なさい．ここで与えた証明はシンプソンによるものです．

[B2] (シルピンスキの結果)　演習問題 B1 の状況で $|I|$ がたかだか 2^κ であれば，サイズ κ^+ の均質集合が存在しない関数 $f : [I]^2 \to 2$ が存在することを示しなさい．[ヒント] $I = {}^\kappa 2$ だったとして，あらかじめ決めておいた I の整列順序づけ W と自然な辞書式順序づけ $<$ が $\{i,j\}$ 上で一致するとき $f(\{i,j\}) = 1$，一致しないとき $f(\{i,j\}) = 0$ と定義します．

[B3] 演習問題 B1 の状況で $|I|$ がたかだか 2^κ であれば，サイズ 3 の均質集合が存在しない関数 $f : [I]^2 \to \kappa$ が存在することを示しなさい． [ヒント] $I = {}^\kappa 2$ だったとして，$i(\alpha) \neq j(\alpha)$ となる最小の α を $f(\{i,j\})$ としなさい．

[B4] (バウムガルトナーの結果)　2^{ω_1} 個の互いにほとんど交わりのない ω_1 の部分集合からなる族の存在は，ZFC において証明できないことを示しなさい． [コメント]

CH のもとでそうした集合族は(第 II 章定理 1.3 より)必ずあります．［ヒント］GCH をみたすモデル M から出発し，M において $\mathbb{P}$ が c.c.c. をみたす半順序だったとしましょう．$\tau:\omega_3\to\mathcal{P}(\omega_1)$ がなんらかのほとんど交わりのない集合族の要素の数え上げになることを p が強制しているという状況を考え，M における関数 $f:[\omega_3]^2\to\omega_1$ を，すべての $[\omega_3]^2$ の要素 $\{i,j\}$ について p が $\tau(i)\cap\tau(j)\subset f(\{i,j\})$ を強制するものとして定義しなさい(これが可能であることは補題 5.6 によってわかります)．ここで $\kappa=\omega_1$ とおいて演習問題 B1 の結果を用いると矛盾が起こります．

[B5]　2^{ω_1} 個の互いにほとんど交わりのない ω_1 の部分集合からなる族の存在は，$\mathrm{ZFC}+2^{\omega}=2^{\omega_1}=2^{\omega_2}=\omega_3$ において証明も反証もできないことを示しなさい．［ヒント］半分は演習問題 B4 のとおりです．もう半分については，CH と $2^{\omega_1}=2^{\omega_2}=\omega_3$ をみたす M において $\mathrm{Fn}(\omega_3,2)$ を用いて強制しなさい．

[B6]　$\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ が c.c.c. をみたす半順序ならば，$\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ は $(2^{\omega})^+$-c.c. をみたすことを示しなさい．二つの c.c.c. をみたす位相空間の積空間が $(2^{\omega})^+$-c.c. をみたすことを示しなさい．［ヒント］$\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ の反鎖 I があったとき，関数 $f:[I]^2\to 2$ を $p\perp p'$ のとき $f(\{\langle p,q\rangle,\langle p',q'\rangle\})=0$, そうでないとき $=1$ と定義しなさい．［コメント］ここで $(2^{\omega})^+$ を 2^{ω} に変えることはできるでしょうか．演習問題 C1, C6, C8 を見てください．

[B7]　κ 個の半順序 $\mathbb{P}_\alpha$ $(\alpha<\kappa)$ があったとする．それらの**可算サポート積**とは，$\prod_\alpha \mathbb{P}_\alpha$ の要素 q のうち集合 $\{\alpha<\kappa:q(\alpha)\neq\mathbb{1}\}$ がたかだか可算であるもの全体の集合 $\mathbb{Q}$ のことだとします．各々の $\mathbb{P}_\alpha$ が c.c.c. をみたしていれば，可算サポート積 $\mathbb{Q}$ は $(2^{\omega})^+$-c.c. をみたすことを示しなさい．［ヒント］最初に Δ-システム補題を使い，次にエルデシュとラドーの定理を使いなさい．［コメント］$\langle\mathbb{P}_n:n\leq\omega\rangle$ が可算サポート反復強制構造(第 5 章参照)であるときは，各 $\mathbb{P}_n$ が c.c.c. をみたしたとしても，$\mathbb{P}_\omega$ がみたす鎖条件についての上限は**ありません**．演習問題 E5, E6 を見てください．

C. 積半順序のみたす鎖条件

[C1]　次の (a) から (c) までが同値であることを示しなさい．

(a) 積半順序 $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ が κ-c.c. をみたさないような，c.c.c. をみたす半順序 $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ の存在．

(b) 積空間 $X\times Y$ が κ-c.c. をみたさないような，c.c.c. をみたす位相空間 X と Y の存在．

(c) 積空間 $X\times Y$ が κ-c.c. をみたさないような，コンパクトで c.c.c. をみたすハウスドルフ位相空間 X と Y の存在.

[ヒント] 第 II 章第 3 節を見なさい．[コメント] したがって，第 II 章の定理 2.24 によれば，MA＋¬CH から，c.c.c. をみたす二つの半順序の積がまた c.c.c. をみたすことが導かれます.

[C2] $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ を c.c.c. をみたす半順序とする．積 $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ が c.c.c. をみたすためには $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}\Vdash(\check{\mathbb{Q}}$ が c.c.c. をみたす) が必要かつ十分であることを示しなさい.

[C3] 演習問題 C2 をさらに拡張して，$\mathbb{1}\Vdash(\pi$ が κ-c.c. をみたす) と $\mathbb{P}*\pi$ が κ-c.c. をみたすことが同値であることを示しなさい.

[C4] ススリンの仮説の否定 ¬SH から，積半順序 $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ が c.c.c. をみたさない二つの c.c.c. 半順序 $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ の存在を導く証明を，二通りの違ったやり方で与えなさい．[ヒント] (その 1) $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ を，ω_1-ススリン木 T をひっくり返して得られる同じ一つの半順序としましょう．すると，$\mathbb{1}\Vdash(\check{T}$ はススリン木ではない) となるので $\mathbb{1}\Vdash(\check{\mathbb{P}}$ は c.c.c. をみたさない) となります．これに演習問題 C2 の結果を適用しなさい．[ヒント] (その 2) 演習問題 C1 の結果と第 II 章の補題 4.3 を使いなさい.

[C5] C を $[I]^2$ (これの意味については演習問題 B1 参照) の部分集合としよう．このような C は I 上の**グラフ**と呼ばれる (I の要素を《点》と考え，$\{i,j\}\in C$ を《i と j を結ぶ線がある》という意味に取っている)．このとき $\mathbb{P}(C)$ あるいは $\mathbb{P}(C,I)$ を

$$\{s\subset I:[s]^2\subset C\wedge|s|<\omega\}$$

と定義し，包含関係の逆の順序を与えておく．このとき，$\mathbb{P}(C,I)\times\mathbb{P}([I]^2\setminus C,I)$ が $|I|$-c.c. をみたさないことを示しなさい．[ヒント] $\langle\{i\},\{i\}\rangle$ の全体が反鎖をなします.

[C6] (フライスナーの結果)　κ を M における無限基数，G を M 上の $\mathrm{Fn}(\kappa,2)$-ジェネリック集合とする．このとき，$M[G]$ には $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ が κ-c.c. をみたさない c.c.c. 半順序 $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ が存在することを示しなさい．[ヒント] G が M 上の $\mathrm{Fn}([I]^2,2)$-ジェネリック集合だったと考えて，$C=\{\{i,j\}:\bigcup G(\{i,j\})=0\}$ とおきなさい．τ: $\check{\omega}_1\to\mathbb{P}(C)$ がある反鎖の要素の数え上げであることを p が強制していると仮定しなさい．p の拡大 p_ξ を $p_\xi\Vdash\tau(\check{\xi})=\check{s}_\xi$ となるようにとりなさい．ここで (必要なら p_ξ をさらに拡大することにより) p_ξ の定義域は s_ξ を含むある集合 t_ξ に対応する

$[t_\xi]^2$ であると仮定できます．この状況で t_ξ の全体に Δ-システム補題を適用しなさい．［コメント］この結果は演習問題 C7 の結果に触発されて得られたものです．

[C7] (ロイトマンの結果)　G を M 上の $\mathrm{Fn}(\omega,2)$-ジェネリック集合としよう．このとき，$M[G]$ には $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ が c.c.c. をみたさない c.c.c. 半順序 $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ が存在することを示しなさい．［ヒント］M において，各可算順序数 ξ から ω への 1 対 1 写像 f_ξ を選びなさい．$M[G]$ において，$\eta<\xi$ であるような対 $\{\eta,\xi\}$ が集合 C に属するのは $(\bigcup G)(f_\xi(\eta))=1$ となるちょうどそのときだとして，$[\omega_1]^2$ の部分集合 C を定義します．［コメント］この結果は演習問題 C8 の結果に触発されて得られたもので，M において CH が成立している場合を別にすれば，$M[G]$ において MA が成立することはないということを示しています．

***[C8]** (レイヴァーの結果)　CH から $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ が c.c.c. をみたさない c.c.c. 半順序 $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ の存在が導かれることを示しなさい．［ヒント］([Galvin 1980] による) $\mathbb{P}(C)$ と $\mathbb{P}([\omega_1]^2\setminus C)$ がいずれも c.c.c. をみたす $[\omega_1]^2$ の部分集合 C をみつけなさい．

[C9] 次の性質をもつ半順序の列 $\mathbb{Q}_m$ があることを示しなさい：すべての自然数 n について $\prod_{m<n}\mathbb{Q}_m$ は c.c.c. をみたすが，$\prod_{m<\omega}\mathbb{Q}_m$ は 2^ω-c.c. をみたさない．［コメント］演習問題 B7 により，$\prod_{m<\omega}\mathbb{Q}_m$ は $(2^\omega)^+$-c.c. をみたします．また，これらの半順序の有限サポート積 (これが位相空間論でいうティコノフの積位相に対応します) が c.c.c. をみたすことが，Δ-システム補題を使えばわかります．第 II 章の定理 1.9 を見てください．

[C10] M が CH をみたすとし，κ を M における無限基数の一つとしましょう．G を M 上の $\mathrm{Fn}(\kappa,2,\omega_2)$-ジェネリック集合とします．このとき，$M[G]$ において次の性質をもつ ω_1-閉な半順序の列 $\mathbb{Q}_m$ があることを示しなさい：すべての自然数 n について $\prod_{m<n}\mathbb{Q}_m$ は ω_2-c.c. をみたすが，$\prod_{m<\omega}\mathbb{Q}_m$ は κ-c.c. をみたさない．［ヒント］G を $\mathrm{Fn}([\kappa]^2,\omega,\omega_1)$-ジェネリックとみなして，$C_n=\{\{i,j\}:\bigcup G(\{i,j\})\neq n\}$ とおきます．$\mathbb{Q}_n=\{s\subset\kappa:[s]^2\subset C_n\wedge|s|\leq\omega\}$ とおいてあとは演習問題 C6 と同様に考えなさい．

D. 充足した名前

[D1] $\langle\pi,\leq_\pi,\mathbb{1}_\pi\rangle$ を半順序の $\mathbb{P}$-名前とします．次のことが成立しているとき，π は**充足している**といいます：まず $\pi=\mathrm{dom}(\pi)\times\{\mathbb{1}_\mathbb{P}\}$ であり，さらに，p を $\mathbb{P}$ の

任意の要素，τ を $M^{\mathbb{P}}$ の任意の要素とするとき $p \Vdash (\tau \in \pi)$ ならば $\mathrm{dom}(\pi)$ のある要素 σ について $p \Vdash (\tau = \sigma)$ となる．いま $\langle \pi, \leq_\pi, \mathbb{1}_\pi \rangle$ を任意の半順序の $\mathbb{P}$-名前として，$\mathbb{1} \Vdash (\pi = \pi')$ をみたす充足した $\mathbb{P}$-名前 $\langle \pi', \leq_\pi, \mathbb{1}_\pi \rangle$ が存在することを示しなさい．［ヒント］ $\mathrm{dom}(\pi)$ としてはクラス $\{\tau \in M^{\mathbb{P}} : \mathbb{1} \Vdash (\tau \in \pi)\}$ の十分大きな部分集合をとることになります．この演習問題では $\leq_\pi$ と $\mathbb{1}_\pi$ は関係がないので，変更する必要はありません．半順序に限らず，$\mathbb{1} \Vdash (\pi \neq 0)$ をみたす任意の $\mathbb{P}$-名前 π について同じことがいえます．［コメント］ 充足した名前を使うことによって，反復強制の議論にともなういろいろな構成を単純化できます．たとえば，π が半順序の充足した名前であれば，$\mathbb{P} * \pi$ は集合としては $\mathbb{P} \times \mathrm{dom}(\pi)$ に一致します．

[D2] $\langle \pi, \leq_\pi, \mathbb{1}_\pi \rangle$ を半順序の $\mathbb{P}$-名前とする．このとき π が充足した名前で $\mathbb{1} \Vdash$(π は ω_1-閉) であるなら，π は ${}_{\searrow}\omega$-列について充足しています．このことを示しなさい．

***[D3]** (レイヴァーとミラーの結果)　$\langle \langle \mathbb{P}_\xi : \xi \leq \alpha \rangle, \langle \pi_\xi : \xi < \alpha \rangle \rangle$ を可算サポート反復とする．いま，すべての ξ について $\mathbb{1} \Vdash$(π_ξ は c.c.c. をみたす) が成立し，またすべての π_ξ が充足した名前であれば，$\mathbb{P}_\alpha$ が ω_1 を潰さないことを示しなさい．［ヒント］ α より小さいすべての順序数 β についてこのことが正しかったとしなさい．$s \subset \alpha$ かつ $p, p' \in \mathbb{P}_\alpha$ とするとき $p' \leq_s p$ は，$p' \leq p$ であるとともに $\forall \mu \in s\, (\rho'_\mu = \rho_\mu)$ となることを意味します．$|s|$ に関する帰納法で次のことを示しなさい：任意の有限な s について，$p \Vdash (\tau \in \omega_1)$ であれば，ある可算順序数 β と $p' \leq_s p$ をみたすある p' について $p' \Vdash (\tau \in \beta)$ となる．もしも

$$p_0 \geq_{s_0} p_1 \geq_{s_1} p_2 \geq_{s_2} \cdots,$$

$$s_0 \subseteq s_1 \subseteq s_2 \subseteq \cdots$$

かつ $\bigcup_n s_n = \bigcup_n \mathrm{supt}(s_n)$ であれば，$\forall n\, (p_\omega \leq p_n)$ をみたす p_ω が存在します．［コメント］ 演習問題 E4 の結果によれば，π_ξ が充足しているという仮定を落とすことはできません．

[D4] 演習問題 D3 においてさらに α が強到達不能基数であり，各 π_ξ が $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$ の充足した $\mathbb{P}_\xi$-名前になっているとしよう．G を M 上の $\mathbb{P}_\alpha$-ジェネリック集合とするとき，$M[G]$ において $\omega_2 = \alpha = 2^\omega$ となっていることを示しなさい．［ヒント］ 各 ξ について π_ξ が関数 $f_\xi : \omega \to 2$ を《つけ加える》ので $2^\omega \geq \alpha$ です．$f(\xi, n) = f_\xi(n)$

とおきましょう．α より小さな η を固定して考えます．$\xi<\eta$ であれば，ある可算順序数 μ について

$$\forall n\in\omega\,(f_\xi(n)=f(\eta+\mu+n,0))$$

となります．これは π_ξ が充足しているので，$\mathbb{1}$ によって $\rho(0)$ が $f_\xi(n)$ であることを強制されるような $\mathrm{dom}(\pi_\mu)$ の要素 ρ が存在することによります．そこで，ξ をこの条件をみたす μ のうち最小のものに対応させることによって η から ω_1 の中への 1 対 1 写像が得られます．

[D5] 補題 7.10 において (標準の名前のかわりに) 充足した名前を用いた場合でも，同じジェネリック拡大が得られることを示しなさい．

E. 奇妙な例

E グループの問題全体を通じて，$\langle\langle\mathbb{P}_\xi:\xi\leq\omega\rangle,\langle\pi_\xi:\xi<\omega\rangle\rangle$ は M に属するある反復強制構造をあらわすとします．

[E1] $\mathbb{P}_\omega$ が有限サポートによって定義されており，すべての自然数 n について $\mathbb{1}\Vdash_{\mathbb{P}_n}(\pi_n$ は c.c.c. をみたさない$)$ となっているとしよう．このとき $\mathbb{P}_\omega$ が ω_1 を潰すことを示しなさい．［ヒント］$\mathbb{P}_n$-名前 τ_n と σ_n を

$$\mathbb{1}\Vdash(\sigma_n \text{ は } \pi_n \text{ の極大反鎖であり } \tau_n \text{ は } \sigma_n \text{ から } \omega_1 \text{ の上への写像である})$$

のようにとったとします．G を M 上の $\mathbb{P}_\omega$-ジェネリック集合とし，G_n と H_n を補題 5.13 のとおりとします．$M[G]$ において，$H_n\cap\mathrm{val}(\sigma_n,G_n)=\{q_n\}$ として $f(n)=(\mathrm{val}(\tau_n,G_n))(q_n)$ によって f を作れば，ω から ω_1^M の上への写像となります．

[E2] 次のような例を見つけなさい：$\mathbb{P}_\omega$ は可算サポートによって定義されており，すべての自然数 n について $\mathbb{1}\Vdash(\sigma_n$ は ω_1-閉である$)$ となっているが，$\mathbb{P}_\omega$ は ω_1 を潰す．［ヒント］各 π_n が $\mathrm{Fn}(\omega_1,\omega,\omega_1)$ において稠密であることが $\mathbb{1}$ によって強制されるようにし，さらに

$$\mathrm{dom}(\pi_n)\subset\{\check{s}:s\in\mathrm{Fn}(\omega_1,\omega,\omega_1)\wedge\mathrm{dom}(s)\in\omega_1\}$$

となるようにしなさい．π_n は ω_1 から ω の上への写像 f_n をつけ加えるとみなすことにします．極限順序数 γ について $\mathrm{dom}(s)=\gamma+k>0$ である場合には，$f_n(\gamma+\omega)=k$ のときに限って s が $\mathrm{val}(\pi_{n+1},G_{n+1})$ に入るようにし，0 はつねに $\mathrm{val}(\pi_{n+1},G_{n+1})$ に (最大要素として) 入れることにします．このようにすると，この反復強制は実質上は有限サポート反復であって，演習問題 E1 の結果を適用できます．［コメント］

補題 7.2 によれば，充足した名前を用いたときこのようなことは決して起こりません．

[E3]　もしもすべての自然数 n について $\mathbb{1} \Vdash (\pi_n$ が ω_1-閉) であるなら，すべての $\mathbb{P}_n$ が ω_1-閉になる．このことを証明しなさい．

[E4]　$\mathbb{P}_\omega$ を可算サポートによって定義したい．各 π_n として $(\mathrm{Fn}(\omega,2))\check{}$ をとったとしよう．このとき $\mathbb{P}_\omega$ が ω_1 を潰すことを示しなさい．［コメント］演習問題 D3 によると，充足した名前を用いればこのようなことは起こりません．［ヒント］$\mathbb{P}_\omega$ は M において $(\mathrm{Fn}(\omega,2))^\omega$ と同型になります．そこで $\mathbb{P}_\omega$ は $f:\omega\times\omega\to 2$ をつけ加えると考えられます．$({}^\omega 2)^M$ の各要素は f によってコード化されています (いいかえれば，$({}^\omega 2)^M$ のすべての要素が f に相対的に再帰的です)．

[E5]　κ を M における基数として，次のような例を見つけなさい：各自然数 n について $\mathbb{P}_n$ は c.c.c. をみたすが，可算サポートによって $\mathbb{P}_\omega$ を定義するとそれは κ-c.c. をみたさない．［ヒント］演習問題 C9 を見なさい．π_0 として $\mathrm{Fn}(\kappa,2)$ の名前をとり，π_{n+1} としては $\mathrm{Fn}(1,2)$ の名前を用いなさい．［コメント］今度の例は演習問題 E2 と E4 に述べた現象と違って，充足した名前を用いても消え去りません．

[E6]　M において CH が成立しているとしよう．演習問題 E5 を手直しして，各 $\mathbb{P}_n$ を ω_1-閉で ω_2-c.c. をみたすとしなさい．［ヒント］演習問題 C10 を見なさい．

F. クレパ木

[F1]　θ を正則基数，κ を θ より大きい強到達不能基数としよう．$\mathrm{Lv}(\kappa,\theta)$ とは，θ から κ 未満の各順序数の上への写像をつけ加える，サイズ θ 未満の部分関数からなる半順序のことだとする．たとえば，定義 3.1 の $\mathrm{Lv}'(\kappa)$ は $\mathrm{Lv}(\kappa,\omega_1)$ になる．$\mathrm{Lv}(\kappa,\theta)$ が θ-閉で κ-c.c. をみたすことを示しなさい．

[F2]　M において θ は強到達不能基数ではない不可算基数だとし，G を M 上の $\mathrm{Lv}(\kappa,\theta)^M$-ジェネリック集合とする．$M[G]$ において $\neg(\theta\text{-KH})$，すなわち θ-クレパ木が存在しないことを示しなさい．

[F3]　M において次のことを仮定しよう：基数の列 $\kappa_1<\kappa_2<\kappa_3<\cdots$ が与えられていて，$\kappa_1=\omega_1$ であり，$n>1$ なら κ_n は M において強到達不能基数である．$\mathbb{P}=\prod_n \mathrm{Lv}(\kappa_{n+1},\kappa_n)$ とおき，G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とする．このとき $M[G]$ において $\omega_n=\kappa_n$ であり，$\neg(\omega_1\text{-KH})$ である．いっぽう，$n>1$ のときは ω_n-KH

が成立する．このことを示しなさい．［ヒント］M における完全二分 κ_n-木は $M[G]$ におけるクレパ木になっています．

[F4] 演習問題 F3 において，積のかわりに ω 回の可算サポート反復によって $\mathbb{P}$ を定義しよう．それには π_n を $\mathbb{P}_n$-拡大における $\mathrm{Lv}(\kappa_{n+1},\kappa_n)$ の名前とすることになる．G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合としよう．このとき $M[G]$ において，$\omega_n = \kappa_n$ であり，1 以上のすべての自然数 n について $\neg(\omega_n\text{-KH})$ が成立する．このことを示しなさい．

[F5] 無限個の強到達不能基数の存在の無矛盾性を仮定して，GCH と

$$\forall n \geq 1\,(\omega_n\text{-KH} \leftrightarrow n \text{ が偶数})$$

とが矛盾しないことを示しなさい．［ヒント］第 VII 章演習問題 H19 の方法によれば，クレパ木をモデルにつけ加えることが簡単にできます．［コメント］強到達不能基数の存在の仮定は不可欠です (第 VII 章演習問題 B9)．

[F6] $\mathrm{CH} \wedge 2^{\omega} = \omega_3$ と，ちょうど ω_2 本の道をもつ ω_1-木の存在とが矛盾しないことを示しなさい．

G. 真のクラスを用いた強制

M の**クラス**とは (第 VI 章定義 1.1 の意味での) $\mathcal{D}(M)$ に属する集合のことをいいます．$\mathbb{P}$ と $\leq$ が M のクラスであるとき，フィルター G が M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックであるとは，$\mathbb{P}$ において稠密な D のうち M のクラスであるものすべてについて $G \cap D \neq 0$ となることだとします．$M^{\mathbb{P}}$ と $M[G]$ の定義は第 VII 章の定義 2.6 と定義 2.8 をそのまま使います．したがって，M における $\mathbb{P}$-名前はすべて M に属する集合です．

[G1] 真のクラスを用いた強制においても第 VII 章第 2 節と第 3 節で述べた結果が成立することを確かめなさい．

[G2] $M[G]$ が ZF のモデルになるとは限らないことを示しなさい．［ヒント］$\mathrm{Fn}(\omega, \mathrm{o}(M))$ を使ってみなさい．

[G3] E は M のクラスで，定義 4.1 の意味において (索引関数である)^M とする．定義 4.1 の (3)(a) を手直しして $\mathbb{P}(E)$ が M のクラスになるようにしよう：($p \in \mathbb{P}(E)$ となるのは $p \in M$ かつ $\mathrm{dom}(p) \subset \mathrm{dom}(E)$ となるときで，$\kappa \notin \mathrm{dom}(p)$ のときの $p(\kappa)$ の値は 0 とみなす) G を M 上の $\mathbb{P}(E)$-ジェネリック集合とする．$M[G]$ が

ZFC をみたすことを示しなさい．［ヒント］これには $\mathbb{P}(E)$ をいろいろな λ に関する $\mathbb{P}(E_\lambda^+)\times\mathbb{P}(E_\lambda^-)$ と同一視することが必要になります．

[G4] $\forall\kappa(\kappa$ が正則基数 $\to 2^\kappa=\kappa^{+++})$ の無矛盾性を証明しなさい．

[G5] $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})\to\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\mathrm{GCH})$ を強制法を用いて証明しなさい．［ヒント］$\mathrm{Fn}(\omega_1,2,\omega_1)$ を用いた強制によって CH が成立するようになったことを思い出しましょう．

H. 特異基数の指数

λ をある特異基数とします．$f(\lambda)$, (CL) と $(*)$ は系 4.8 のあとの議論で定義されたものとします．

[H1] $\mathrm{cf}(f(\lambda))=\mathrm{cf}(\lambda)$ であるかまたは $\mathrm{cf}(f(\lambda))>\lambda$ であることを示しなさい．$\mathrm{cf}(f(\lambda))>\lambda$ のときは $2^\lambda=f(\lambda)$ となることを示しなさい．

[H2] (CL) から $(*)$ が導かれることを示しなさい．

以後この H グループの終わりまで $\lambda=\omega_{\omega_1}$ とし，$\forall\kappa<\lambda(2^\kappa=\kappa^+)$ を仮定します．以上の仮定のもとで $2^\lambda=\lambda^+$ が成立するというシルヴァーの結果を導きます．ここでの証明はバウムガルトナーとイェンセンとプリクリに負います．より詳しくは [Galvin–Hajnal 1975] を見てください．演習問題 H3 は第 II 章の定理 1.3 を拡張するもので，H4 と H5 は [Erdös–Hajnal-Miller 1968] から取ったものです．

${}^{\omega_1}\lambda$ の部分集合 $\mathcal{F}$ が条件

$$\forall f,g\in\mathcal{F}(f\neq g\to|\{\alpha:f(\alpha)=g(\alpha)\}|\leq\omega)$$

をみたすとき，$\mathcal{F}$ は**遠方で出会わない関数の族** (略して e.d. 族) であるといいます．

[H3] 条件 $|\mathcal{F}|=2^\lambda$ および

$$\forall f\in\mathcal{F}\forall\alpha<\omega_1(f(\alpha)<\omega_{\alpha+1})$$

をみたす e.d. 族 $\mathcal{F}$ があることを示しなさい．［ヒント］$X\subset\lambda$ のとき $f_X(\alpha)=X\cap\omega_\alpha$ として写像 $f_X:\omega_1\to\mathcal{P}(\omega_\alpha)$ を定義しなさい．

[H4] $\mathcal{F}$ が e.d. 族で

$$\forall f\in\mathcal{F}[\{\alpha:f(\alpha)<\omega_\alpha\}\text{ は定常集合}]$$

をみたすなら，$|\mathcal{F}|\leq\lambda$ となることを示しなさい．［ヒント］“押し下げ” 補題 (第 II 章補題 6.15) を使いなさい．

[H5] $\mathcal{F}$ を e.d. 族，g を ω_1 から ω_{ω_1} への関数で $\forall\alpha\,(g(\alpha)<\omega_{\alpha+1})$ をみたすものとする．さらに

$$\forall f\in\mathcal{F}\,[\{\alpha : f(\alpha)<g(\alpha)\}\text{ は定常集合}]$$

が成立していると仮定する．このとき $|\mathcal{F}|\leq\lambda$ を示しなさい．

[H6] $2^\lambda=\lambda^+$ を示しなさい．演習問題 H3 で得た $\mathcal{F}$ を条件

$$f<g\leftrightarrow\{\alpha : g(\alpha)\leq f(\alpha)\}\text{ は非定常集合.}$$

によって半順序づけし，さらにそれを拡張した $\mathcal{F}$ 上の全順序づけ $\lhd$ を考える．演習問題 H5 によれば，$\mathcal{F}$ の各要素に $\lhd$ の意味で先立つ要素はたかだか λ 個である．

I. 弱コンパクト基数

この節の問題では (I8 を除くと)，弱コンパクト基数の以下のような特徴づけに読者が慣れていることを仮定しています．κ が弱コンパクト基数であるためには，κ が強到達不能基数であるとともに Π^1_1-記述不能であることが必要十分です．[Barwise 1975] あるいは [Drake 1974] を見てください．これはつまり，κ を弱コンパクト基数，A を $R(\kappa)$ の部分集合，ϕ を Π^1_1 文とするとき，もしも

$$\langle R(\kappa),\in,A\rangle\models\phi$$

であれば，ある κ より小さい強到達不能基数 λ について

$$\langle R(\lambda),\in A\cap R(\lambda)\rangle\models\phi$$

が成立するということです．

訳注：[Kanamori 2003] の第 6 節，特に定理 6.4 を見ましょう．

[I1] κ が弱コンパクト基数であるとき (κ が弱コンパクト基数である)$^{\mathbf{L}}$ ことを示しなさい．［ヒント］Π^1_1 文 ϕ に対して，

$$R(\kappa)\models\psi\leftrightarrow(R(\kappa)\models\phi)^{\mathbf{L}}$$

をみたすもう一つの Π^1_1 文 ψ が存在します．ψ の非有界全称量化子は，$\kappa<\alpha<\kappa^+$ をみたす α に対応する $L(\alpha)$ のコードを量化するために用いられます．［コメント］このことから，Con(ZFC＋弱コンパクト基数の存在) から Con(ZFC＋GCH＋弱コンパクト基数の存在) が導かれます．この結果は強制法によって証明することもできます (演習問題 I3)．

[I2] M で以下のことが成立しているとする：κ が弱コンパクト基数，E は索引関

数であって，κ は E の定義域には属しておらず，$\mathrm{dom}(E)\cap\kappa$ の要素 α はすべて後続型基数で，$|E(\alpha)|<\kappa$ をみたす．G を M 上の $\mathbb{P}(E)$-ジェネリック集合とする．このとき $M[G]$ においても κ はやはり弱コンパクト基数であることを示しなさい．[コメント] 演習問題 I5 によると，$\kappa\in\mathrm{dom}(E)$ のときこのことは必ずしも成立しません．[ヒント] $\mathrm{dom}(E)\subset\kappa$ だったと仮定しましょう．ϕ を Π^1_1 文とします．$\mathbb{1}\Vdash_{\mathbb{P}(E)}(R(\kappa)\models\phi)$ のとき，M における κ の Π^1_1 記述不能性によって，$\mathbb{1}\Vdash_{\mathbb{P}(E\restriction\lambda)}(R(\lambda)\models\phi)$ をみたす κ より小さな到達不能基数 λ が存在します．仮定から $\lambda\notin\mathrm{dom}(E)$ なので，このことから $\mathbb{1}\Vdash_{\mathbb{P}(E)}(R(\lambda)\models\phi)$ が導かれます．

[I3]　強制法を用いて Con(ZFC＋弱コンパクト基数の存在) から Con(ZFC＋GCH＋弱コンパクト基数の存在) を導きなさい．[ヒント] 演習問題 I2 と G5 を組み合わせましょう．

[I4]　κ を M における弱コンパクト基数とし，また M において $|\mathbb{P}|<\kappa$ だとする．このとき $M[G]$ においても κ は弱コンパクト基数であることを示しなさい．[コメント] したがって，κ より下では GCH がいろいろな形で破れる可能性があります．

[I5]　κ を弱コンパクト基数，X をその部分集合とする．$\forall\alpha<\kappa(X\cap\alpha\in\mathbf{L})$ を仮定して $X\in\mathbf{L}$ を示しなさい．[ヒント] 演習問題 I1 と類似の問題です．[コメント] 基礎モデルにおいて $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ であった場合，$\mathrm{Fn}(I,2,\kappa)$ は弱コンパクト性を壊すことになりますが，いっぽうでマーロ性は保存します (第 VII 章演習問題 H4)．このため，$\exists\kappa(\kappa$ は弱コンパクト基数$\wedge 2^\kappa>\kappa^+)$ の無矛盾性証明にはなにか新しいアイディアが必要です (演習問題 I10 を見てください)．

[I6]　κ を M における不可算正則基数とし，M において $\mathbb{P}$ は κ-閉だとする．ϕ を Π^1_1 文とし，A を κ の部分集合とする．G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合とするとき

$$(\langle\kappa,<,A\rangle\models\phi)^M\leftrightarrow(\langle\kappa,<,A\rangle\models\phi)^{M[G]}$$

を示しなさい．[ヒント] 難しいほうの向きについて．ψ が 1 階の論理式で

$$\mathbb{1}\Vdash(\tau\subset\check{\kappa}\wedge\langle\check{\kappa},<,\check{A},\tau\models\psi)$$

となっているとしましょう．M において，$\mathbb{P}$ の要素 p_ξ と κ の要素 γ_ξ と γ_ξ の部分集合 t_ξ を帰納的に選んで

$$\xi < \eta \rightarrow (p_\eta \le p_\xi \wedge \gamma_\xi < \gamma_\eta \wedge t_\xi = t_\eta \cap \gamma_\xi)$$

および

$$p_\xi \Vdash (\tau \cap \check{\gamma}_\xi = \check{t}_\xi \wedge \langle \check{\gamma}_\xi, <\check{A} \cap \check{\gamma}_\xi, \check{t}_\xi \rangle \prec \langle \check{\kappa}, <\check{A}, \tau \rangle)$$

をみたすようにします．$T = \bigcup_\xi t_\xi$ とおけば M において

$$\langle \kappa, <, A, T \rangle \models \psi$$

となります． **[コメント]** (1) $\kappa = \omega$ の場合にもこれは成立します．それはクリーネによる Π^1_1 述語の分析の結果としてわかります．また，シェーンフィールドの絶対性定理 ([Barwise 1975] にあります) によれば，同じことが ϕ が Π^1_2 の場合も成立します．(2) κ が強到達不能基数の場合には，$\langle \kappa, < \rangle$ の部分を $\langle R(\kappa), \in \rangle$ に置き換えることができます．(3) この結果の特別なケースとして，T が M における κ-ススリン木であれば $M[G]$ においても T はやはりススリン木です．

訳注：[Kanamori 2003] の第 13 章，特に定理 13.15 を見ましょう．

[I7] 演習問題 I6 の結果を使い，通常のイーストン式強制の方法で，κ 未満のすべての正則基数 λ について $2^\lambda > \lambda^+$ となる弱コンパクト基数 κ の存在の無矛盾性を示しなさい． **[ヒント]** 演習問題 I6 の結果を使うと，演習問題 I2 で必要だった $\mathrm{dom}(E) \cap \kappa$ の要素がすべて後続型基数であるという仮定を除去できます．

[I8] E は M における一つの索引関数として，$\mathrm{dom}(E)$ の昇順の数え上げを $\{\lambda_\xi : \xi < \alpha\}$ とする．逆イーストン式拡大とは，π_ξ を $\mathbb{P}_\xi$-拡大における $\mathrm{Fn}(E(\lambda_\xi), 2, \lambda_\xi)$ の充足した $\mathbb{P}_\xi$-名前とすることによって得られるものである．ただし，サポートの属するイデアルとしては，普通のイーストン式強制と同じ

$$\{X \subset \alpha : \forall \theta (\theta \text{ は正則基数} \rightarrow |\theta \cap \{\lambda : \xi \in X\}| < \theta\}$$

を採用する．M が GCH をみたしていて $\mathbb{P}_\alpha$ が ω_2 を潰す例を見つけなさい．すべての λ_ξ が M における強到達不能基数で $|E(\lambda_\xi)| < \lambda_{\xi+1}$ であれば $\mathbb{P}_\alpha$ は基数を保存する．このことを示しなさい．

[I9] (シルヴァーの結果)　演習問題 I8 において，さらに κ が M の弱コンパクト基数で，$\mathrm{dom}(E)$ が κ 以下の強到達不能基数の全体に一致し，定義域に属するすべての λ について $E(\lambda) = \lambda$ だとしよう．G を M 上の $\mathbb{P}_\kappa$-ジェネリックとする．このとき κ は $M[G]$ においてもやはり弱コンパクト基数であることを示しなさい．

[ヒント] λ から 2 へのジェネリックな関数に対する名前を Γ_λ と書きましょう．ϕ を Π^1_1 文だとして

$$\mathbb{1} \Vdash (\langle R(\kappa), \in, \Gamma_\kappa \rangle \models \phi)$$

が成立したとすれば，ある κ より小さな強到達不能基数 λ について

$$\mathbb{1} \Vdash (\langle R(\lambda), \in, \Gamma_\lambda \rangle \models \phi)$$

となりますが，逆イーストン式強制では，$p \Vdash (\Gamma_\kappa \restriction \lambda = \Gamma_\lambda)$ をみたす強制条件 p が存在するので

$$\mathbb{1} \Vdash (\langle R(\lambda), \in, \Gamma_\kappa \cap R(\lambda) \rangle \models \phi)$$

が成立します．

[I10] (シルヴァーの結果)　弱コンパクト基数の存在の無矛盾性から，

$$\exists\kappa (\kappa \text{ は弱コンパクト} \wedge 2^\kappa > \kappa^+) \qquad (*)$$

の無矛盾性を導きなさい． [ヒント] 演習問題 I9 を手直しして，$\lambda < \kappa$ のときは $E(\lambda) = \lambda$ だけれども $E(\kappa) = \kappa^{++}$ だとしてみましょう．このとき $M[G]$ における κ の部分集合の一つ一つは，演習問題 I9 で与えた形のなんらかの拡大モデルに属するので，演習問題 I9 の結果はここでも成立します． [コメント] シルヴァーは，《弱コンパクト》を《超コンパクト》に置き換えたものについても，(*) の相対的無矛盾性を確立しました．これについては [Menas 1973] を見てください．ところが，$2^\kappa > \kappa^+$ が成立するような可測基数 κ の存在は，無矛盾性の強さという観点から見て，二つの (あるいはもっと多くの) 可測基数の存在よりも強いのです．この結果については [Kunen 1971] で述べられています．

訳注：[Kanamori 2003] の定理 21.25 にあります．ただし日本語版 (331 ページ) の「λ が可測基数である」は,「λ 個の可測基数がある」の間違いです．

J. 雑多な結果

[J1] $\mathbb{P}$ が M に属するアトムのない半順序だとして，G をその任意の部分集合とするとき，$G \times G$ が M 上 $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$-ジェネリックにならないことを示しなさい．

[J2] 補題 7.2 のあとで論じた仮説 MA_1 が $\neg\mathrm{CH} \vee 2^{\omega_1} = \omega_2$ から導かれることを示しなさい． [ヒント] $\neg$CH のもとでは，問題になりそうな半順序はアトムをもつものに限ります．

[J3] $\langle\langle\mathbb{P}_\xi : \xi \leq \alpha\rangle, \langle\pi_\xi : \xi < \alpha\rangle\rangle$ を M における有限サポート反復強制構造とし，G を M 上の $\mathbb{P}_\alpha$-ジェネリック集合とする．いま，$\alpha \geq \omega$ であり，すべての ξ について $\mathbb{1} \Vdash (\pi_\xi$ はアトムをもたない$)$ とする．このとき $M[G]$ 内に M 上の $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$-ジェネリックなフィルター H が存在することを示しなさい．［ヒント］π_n がどれも充足した名前だったと仮定して

$$\mathbb{1} \Vdash (\tau_n \in \pi_n \wedge \sigma_n \in \pi_n \wedge \tau_n \perp \sigma_n)$$

をみたす τ_n と σ_n を選び，$p \in H$ となるのは $\mathrm{dom}(p)$ に属するすべての n について $\mathbb{1}^\frown\langle(\tau_n)_{G_n}\rangle \in G_{n+1}$ となる場合だとして H を定義しなさい．

[J4] λ を強到達不能基数とし，E を索引関数 (定義 4.1 を参照) とする．$\mathrm{dom}(E)$ が λ の非有界部分集合で，どの $E(\kappa)$ もゼロでないとする．以上の仮定のもとで，$\mathbb{P}(E)$ が λ-c.c. をみたすには λ がマーロ基数であることが必要かつ十分であることを示しなさい．［ヒント］λ がマーロ基数だと仮定しましょう．λ より小さい各順序数 ξ に λ の部分集合 a_ξ が対応していて，任意の正則基数 θ について必ず $|a_\xi \cap \theta| < \theta$ となっているとします．すると，サイズ λ をもつ λ の部分集合 X が存在して，$\{a_\xi : \xi \in X\}$ が Δ-システムをなします．これを示すには，$f(\xi) = \sup(\xi \cap a_\xi)$ とおいて，集合 $\{\xi < \lambda : \xi$ は正則基数$\}$ 上でこの関数に押し下げ補題を適用しなさい．

[J5] GCH と $\diamondsuit \wedge \neg\diamondsuit^+$ とが矛盾しないことを示しなさい．［ヒント］$\mathrm{Fn}(\omega_2, 2, \omega_1)$ を用いましょう．$\diamondsuit$ については第 VII 章の定理 8.3 を参照しなさい．$\neg\diamondsuit^+$ (じつは $\neg\diamondsuit^*$ でもあります) については，ω_1 から 2 へのジェネリックな関数をつけ加えることで $\diamondsuit^*$-列が壊されることに注意しましょう．

[J6] M において，$\mathbb{P}$ が可算列について閉じている (ω_1-閉である) とする．また，$M[G]$ が M にない ω_1 の部分集合を含むと仮定する．このとき M に属する集合列 $\langle\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ はどれも $M[G]$ における $\diamondsuit^*$-列にはならないことを示しなさい．このことを用いて，第 3 節で構成したモデルでは $\neg\mathrm{KH} \wedge \diamondsuit \wedge \neg\diamondsuit^*$ が成立していることを示しなさい．［ヒント］(前半部分について) これは補題 3.4 の類似物です．

[J7] 《M を $\mathrm{Fn}(\omega_1, 2, \omega_1)^M$ を用いて拡大したとき $\diamondsuit^+$ は成立するか》という問題を考える．ZFC＋GCH のあるモデルについては答えはイエス，他のモデルについては答えはノーとなる．そのことを示しなさい．

[J8] ω_1 以下の順序数 ξ に順序 $\mathbb{P}_\xi$ が対応していて $\xi < \eta \rightarrow \mathbb{P}_\xi \subset_c \mathbb{P}_\eta$ であり，$\xi < \omega_1$ のとき $\mathbb{P}_\xi$ は c.c.c. をみたし，ω_1 を含むすべての極限順序数 η について $\mathbb{P}_\eta$ におい

て $\bigcup_{\xi<\eta}\mathbb{P}_\xi$ が稠密であるとする．このとき $\mathbb{P}_{\omega_1}$ が c.c.c. をみたすことを示しなさい．

[J9] 演習問題 J8 の最後の条件を，$\mathbb{P}_{\omega_1}$ において $\bigcup_{\xi<\omega_1}\mathbb{P}_\xi$ が稠密であると仮定するだけでは，同じ結果が成り立つとは限らないことを示しなさい．

[J10] 補題 5.13 において，すべての ξ に対して

$$M[G_\xi]=M[\langle H_\mu:\mu<\xi\rangle]$$

となること，すなわち，$M[G_\xi]$ は M を含み $\langle H_\mu:\mu<\xi\rangle$ を要素としてもつ c.t.m. のうち最小のものであることを示しなさい．

[J11] ([McAloon 1971] による)　ZFC＋GCH＋$\mathbf{V}=\mathbf{OD}+\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$ が矛盾しないことを証明しなさい．［ヒント］M において $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ を仮定して，$\kappa=\omega_\kappa$ をみたす κ を一つ決めておきます．κ のある部分集合 E に対して $M[G]=M[\langle f_\alpha:\alpha\in E\rangle]$ という形になるようにします．ここで f_α は $\omega_{\alpha+1}$ から 2 への M 上 $\mathrm{Fn}(\omega_{\alpha+1},2,\omega_{\alpha+1})$-ジェネリックな関数です．$E$ を M に属さないようにします．このように作れば $M[G]$ において

$$\alpha\in E\leftrightarrow\exists h\,[h:\omega_{\alpha+1}\to 2\wedge h\notin\mathbf{L}\wedge\forall\gamma<\omega_{\alpha+1}\,(h\restriction\gamma\in\mathbf{L})]$$

となるので，E は $M[G]$ において順序数定義可能となります．さらに，$\langle f_\alpha:\alpha\in E\rangle$ そのものが E によってコード化されているように作ります．たとえば $0\in E$ であり，$\mu<\omega_1$ のときは，$\mu+1\in E$ と $f_0(\mu+1)=1$ が同値になる，という具合です．$M[G]$ は κ-段階の反復拡大とみなせますが，半順序の定義そのものは反復強制法の理論に訴えなくても (実際にマッカルーンがやったように) 簡単にできます．

[J12] (マッカルーンの結果) $\mathbf{V}=\mathbf{OD}$ が ¬CH と (あるいは MA＋¬CH とも) 両立可能であることを示しなさい．

[J13] 到達不能基数の存在の無矛盾性を仮定して，ある強到達不能基数 κ と ω のある部分集合 a について $a\in\mathbf{OD}$ かつ $(a\notin\mathbf{OD})^{R(\kappa)}$ となることが矛盾しないことを証明しなさい．

[J14] ZFC＋GCH と $(\neg\mathrm{CH})^{\mathbf{HOD}}$ と $(\mathbf{V}\neq\mathbf{OD})^{\mathbf{HOD}}$ が矛盾しないことを示しなさい．［ヒント］第 VII 章の演習問題 E5 を見なさい．

[J15] $\mathbb{P}$ を M に属する半順序，π を半順序の $\mathbb{P}$-名前，G を M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリック集合，H を $M[G]$ 上の π_G-ジェネリック集合とする．このとき $G*H$ が M 上 $\mathbb{P}*$

π-ジェネリックであることを証明しなさい．　[コメント] これは定理 5.5 の逆です．

K. ブール代数値モデル

半順序 $\mathbb{P}$ の完備化を $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ と書きます．$\mathbb{P}\sim\mathbb{Q}$ と書いたら，$\mathcal{B}(\mathbb{P})$ と $\mathcal{B}(\mathbb{Q})$ が同型であることを意味します．

[K1] π と π' が半順序の $\mathbb{P}$-名前で $\mathbb{1}\Vdash(\pi\sim\pi')$ であるとするとき，M において $\mathbb{P}*\pi\sim\mathbb{P}*\pi'$ を示しなさい．たとえ $\mathbb{1}\Vdash(\pi=\pi')$ であっても，$\mathbb{P}*\pi$ と $\mathbb{P}*\pi'$ が同型になるとは限らない．反例をあげなさい．

[K2] $\langle\langle\mathbb{P}_\xi:\xi\leq\alpha\rangle,\langle\pi_\xi:\xi<\alpha\rangle\rangle$ を M における有限サポート反復強制構造とする．M において $i_{\xi\eta}$ から完備化の間の完備埋め込み写像 $j_{\xi\eta}:\mathcal{B}(\mathbb{P}_\xi)\to\mathcal{B}(\mathbb{P}_\eta)$ が誘導されることを示しなさい．さらに，η が極限順序数のとき，$\mathcal{B}(\mathbb{P}_\eta)$ は $\bigcup_{\xi<\eta} j''_{\xi\eta}\mathcal{B}(\mathbb{P}_\xi)$ の完備化であることを示しなさい．

[K3] $\langle\langle\mathbb{P}_\xi:\xi\leq\omega\rangle,\langle\pi_\xi:\xi<\omega\rangle\rangle$ を M における可算サポート反復強制構造とし，すべての π_n が $(\mathrm{Fn}(\omega,2))\check{}$ に一致するとする．$\mathbb{P}'_\xi$ を，π_n のかわりに $\mathrm{Fn}(\omega,2)$ の充足した $\mathbb{P}'_n$-名前 π'_n を用いることによって得られるものとする．このとき M において $\mathbb{P}_\omega\not\sim\mathbb{P}'_\omega$ を示しなさい．　[ヒント] 演習問題 D3 と E4 を参照しなさい．　[コメント] いっぽう，演習問題 K1 より $\mathbb{P}_n\sim\mathbb{P}'_n$ は成立します．そこで $f_n:\mathcal{B}(\mathbb{P}_n)\to\mathcal{B}(\mathbb{P}'_n)$ を《自然な》同型写像とすれば，可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{B}(\mathbb{P}_n) & \xrightarrow{j_{nm}} & \mathcal{B}(\mathbb{P}_m) \\
\downarrow f_n & & \downarrow f_m \\
\mathcal{B}(\mathbb{P}'_n) & \xrightarrow{j_{nm}} & \mathcal{B}(\mathbb{P}'_m)
\end{array}$$

が得られます．したがって，$\mathcal{B}(\mathbb{P}_\omega)$ はブール代数の連鎖 $\langle\mathcal{B}(\mathbb{P}_n):n<\omega\rangle$ によって決まるわけではないことになります．この奇妙な事態は，充足した名前を用いれば避けることができます (演習問題 K4 を見てください)．

[K4] $\langle\langle\mathbb{P}_\xi:\xi\leq\omega\rangle,\langle\pi_\xi:\xi<\omega\rangle\rangle$ を，M における，イデアル $\mathcal{I}$ に属するサポートをもつ反復強制構造とする．$\mathcal{B}(\mathbb{P}_\xi)$ を $\mathcal{B}_\xi$ とおき，演習問題 K2 と同様に埋め込み写像 $j_{\xi\eta}$ を考える．各 π_ξ が半順序の充足した $\mathbb{P}_\xi$-名前であると仮定する．このとき各極限順序数 γ の段階での $\mathcal{B}_\gamma$ は，それに先立つ $\langle\mathcal{B}_\xi:\xi<\gamma\rangle$ によって，次の意味で決まってしまうことを示しなさい．$\xi\leq\eta$ となる順序数 ξ と η および $\mathcal{B}_\eta$ の要素 b に対して，$\mathcal{B}_\xi$ の要素 $h_{\eta\xi}(b)$ を

$$h_{\eta\xi}(b)=\bigwedge\{a\in\mathcal{B}_\xi : b\le j_{\xi\eta}(a)\}$$

によって定義する．すると，$\xi<\eta\to b_\xi=h_{\eta\xi}(b_\eta)$, $\{\xi : b_{\xi+1}\ne j_{\xi,\xi+1}(b_\xi)\}\in\mathcal{I}$, η が極限のとき $b_\eta=\bigwedge_{\xi<\eta} j_{\xi\eta}(b_\xi)$, という条件をみたす列 $\langle b_\xi : \xi<\gamma\rangle$ 全体のなす半順序を完備化したものが $\mathcal{B}_\gamma$ になる．

[K5] M において半順序の列 $\langle\mathbb{Q}_\xi : \xi\le\alpha\rangle$ と完備埋め込み写像の系列 $j_{\xi\eta} : \mathbb{Q}_\xi\to\mathbb{Q}_\eta$ が与えられていて，しかもこれらの写像は可換 ($\xi<\eta<\zeta$ のとき $j_{\xi\zeta}=j_{\eta\zeta}\circ j_{\xi\eta}$) であるとする．さらに，$\eta$ が極限順序数のときは $\bigcup_{\xi<\eta} j''_{\xi\eta}\mathbb{Q}_\xi$ が $\mathbb{Q}_\eta$ において稠密であると仮定する．このとき，すべての ξ について $\mathbb{P}_\xi\sim\mathbb{Q}_\xi$ が成立する α 段階の有限サポート反復強制構造 $\langle\langle\mathbb{P}_\xi : \xi\le\omega\rangle, \langle\pi_\xi : \xi<\omega\rangle\rangle$ が存在することを示しなさい．
[ヒント] 第 VII 章演習問題 D3 から D5 を見なさい．

[K6] $\mathcal{B}_\xi$ を M における 2^ξ 上の測度つきブール代数とする (第 VII 章演習問題 H21 から H23 を参照)．$j_{\xi\eta} : \mathcal{B}_\xi\to\mathcal{B}_\eta$ を，2^η から 2^ξ への射影によって誘導される埋め込み写像とする．このとき，ω 以下のすべての ξ に対して $\mathcal{B}_\xi\sim\mathbb{P}_\xi$ が成立する反復強制構造は (どんなサポートによろうとも) **存在しない**ことを示しなさい．
[コメント] したがってこの反復強制は第 5 節で述べた方法では得られないということになります．

[K7] ブール代数値モデルの 2 段階反復を次のように扱えることを検証しなさい．$\mathcal{B}$ を M における完備ブール代数とし，π を $[\![\pi$ は完備ブール代数$]\!]=\mathbb{1}_{\mathcal{B}}$ となる充足した $\mathcal{B}$-名前とする．このとき，完備ブール代数 $\mathcal{B}*\pi$ を次のように定義することができる．$\mathcal{B}*\pi$ の要素は $\mathrm{dom}(\pi)$ の要素と同じで，$[\![\sigma=\sigma_1\vee\sigma_2]\!]=\mathbb{1}$ をみたす要素を $\sigma_1\vee\sigma_2$ とする．また $\mathcal{B}$ の要素 b に対して

$$([\![\sigma=\mathbb{1}]\!]=b)\wedge([\![\sigma=\mathbb{0}]\!]=b')$$

となる $\mathrm{dom}(\pi)$ の要素 σ を $i(b)$ とおいて，完備埋め込み写像 $i : \mathcal{B}\to\mathcal{B}*\pi$ を定義する．いっぽう，M における他の完備ブール代数 $\mathcal{A}$ が M において $\mathcal{B}\subset_c\mathcal{A}$ をみたしているとき，$\mathcal{A}/\mathcal{B}$ を，$\mathcal{A}/\tau$ の $\mathcal{B}$-名前 π のことだと定義する．ただしこの τ は

$$[\![\check{a}\in\tau]\!]=(\bigwedge\{b\in\mathcal{B} : a\le b\})'$$

によって定まる $\mathcal{B}$-値イデアルだとする (第 VII 章の演習問題 D3 から D5 も参照しなさい．ただし，ここでの記法はそれとは少し違っています)．$\mathcal{B}$ と $\mathcal{A}$ が与えられたとき，M において $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}*(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ とは同型になる．$\mathcal{B}$ と π が与えられたとき，

$\mathbb{1}_{\mathcal{B}}$ によって π と $(\mathcal{B}*\pi)/\mathcal{B}$ とが同型であることが強制される．

[K8]　これから言うことを厳密に述べ直して，証明を与えなさい．$\langle \mathbb{P}_\xi : \xi \leq \alpha \rangle$ と $\langle \mathbb{P}'_\xi : \xi \leq \alpha \rangle$ が同じイデアルに属するサポートをもつ反復強制構造で，すべての ξ について $\mathbb{1} \Vdash (\pi_\xi \sim \pi'_\xi)$ であり，さらに，サポートが有限サポートであるかまたはすべての π_ξ とすべての π'_ξ が充足した名前であるとする．このとき $\mathbb{P}_\alpha \sim \mathbb{P}'_\alpha$ となる．ただし，ここで $\mathbb{1} \Vdash (\pi_\xi \sim \pi'_\xi)$ と書いたものは実際には命題として意味をなさないことに注意しなさい．充足した名前を用いない可算サポート反復の場合には，演習問題 K3 がこの演習問題の結果に対する反例になっています．

引用文献

BARWISE, J.

[1975] ADMISSIBLE SETS AND STRUCTURES (Springer, Berlin)

[1977] (editor) HANDBOOK OF MATHEMATICAL LOGIC (North-Holland, Amsterdam)

BAUMGARTNER, J. E.

[1970] *Decompositions and embeddings of trees*, Notices of the American Mathematical Society 17, 967

[1975] *Inefability properties of cardinals I*, in [Hajnal et al. 1975] pp.109–130

BELL, J. R.

[1977] BOOLEAN-VALUED MODELS AND INDEPENDENCE PROOFS IN SET THEORY (Clarendon Press, Oxford)

CHANG, C. C. AND KEISLER, H. J.

[1973] MODEL THEORY (North-Holland, Amsterdam)

COHEN, P. J.

[1963] *The independence of the continuum hypothesis I*, Proceedings of the National Academy of Sciences USA 50, 1143–1148

[1964] *The independence of the continuum hypothesis II*, Proceedings of the National Academy of Sciences USA 51, 105–110

[1966] SET THEORY AND THE CONTINUUM HYPOTHESIS (Benjamin, New York)

DEVLIN, K. J.

[1973] ASPECTS OF CONSTRUCTIBILITY, Lecture Notes in Mathematics, Volume 354 (Springer, Berlin)

DEVLIN, K. J. AND JENSEN, R.

[1975] *Marginalia to a theorem of Silver*, in: Logic Conference Kiel 1974, Lecture

Notes in Mathematics, Volume 499 (Springer, Berlin), 115–142

DEVLLN K. J. AND JOHNSBRÅTEN, H.

[1974] THE SOUSLIN PROBLEM, Lecture Notes in Mathematics, Volume 405 (Springer, Berlin)

DRAKE F. R.

[1974] SET THEORY, AN INTRODUCTION TO LARGE CARDINALS (North-Holland, Amsterdam)

EASTON, W. B.

[1970] *Powers of regular cardinals*, Annals of Mathematical Logic 1, 139–178

ENDERTON, H. B.

[1972] A MATHEMATICAL INTRODUCTION TO LOGIC (Academic Press, New York)

[1977] ELEMENTS OF SET THEORY (Academic Press, New York)

ERDÖS, P., HAJNAL, A., MÁTÉ, A. AND RADO, R.

[1984] COMBINATORIAL SET THEORY, PARTITION RELATIONS FOR CARDINALS (North-Holland, Amsterdam)

ERDÖS, P., HAJNAL, A. AND MILNER, E. C.

[1968] *On sets of almost disjoint subsets of a set*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 19, 209–218

FRAENKEL, A. A., BAR-HILLEL, Y. AND LÉVY, A.

[1973] FOUNDATIONS OF SET THEORY (North-Holland, Amsterdam)

GALVIN, F.

[1980] *Chain conditions and products*, Fundamenta Mathematicae 108, 33–48

GALVIN, F. AND HAJNAL, A.

[1975] *Inequalities for cardinal powers*, Annals of Mathematics 101, 491–498

GANDY, R. O. AND YATES, C. M. E. (editors)

[1971] LOGIC COLLOQUIUM '69 (North-Holland, Amsterdam)

GITIK, M.

[1980] *All uncountable cardinals can be singular*, Israel J. Math. 35 (1980), no. 1-2, 61–88

GÖDEL, K.

[1940] THE CONSISTENCY OF THE AXIOM OF CHOICE AND OF THE GENERALIZED CONTINUUM HYPOTHESIS WITH THE AXIOMS OF SET THEORY, Annals of

Mathematical Studies, Volume 3 (Princeton University Press, Princeton, NJ)

GREGORY, J.

[1976] *Higher Souslin trees and the generalized continuum hypothesis*, Journal of Symbolic Logic 41, 663–671

HAJNAL, A., RADO, R. AND SÓS, V. T. (EDITORS)

[1975] INFINITE AND FINITE SETS (North-Holland, Amsterdam)

HALMOS, P. R.

[1960] NAIVE SET THEORY (Van Nostrand, Reinhold, New York)

[1963] LECTURES ON BOOLEAN ALGEBRAS (Van Nostrand, Reinhold, New York)

JECH, T. J.

[1973] THE AXIOM OF CHOICE (North-Holland, Amsterdam)

[1978] SET THEORY (Academic Press)

[1986] MULTIPLE FORCING (Cambridge)

[2002] SET THEORY, THE 3RD MILLENIUM EDITION (Springer)

KANAMORI, A.

[2003] THE HIGHER INFINITE, 2ND EDITION (Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg and New York), (邦訳: [カナモリ 1998])

KARP, C. R.

[1964] *Languages with Expressions of Infinite Length*,

KEISLER, H. J.

[1973] *Forcing and the omitting types theorem*, in [Morley 1973] pp.96–133

KEISLER, H. J. AND MORLEY, M.

[1968] *Elementary extensions of models of set theory*, Israel Journal of Mathematics 6, 49–65

KEISLER, H. J. AND SILVER, J. H.

[1971] *End extensions of models of set theory*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 13, 177–187

KELLEY, J. L.

[1955] GENERAL TOPOLOGY (Van Nostrand Reinhold. New York)

KLEENE, S. C.

[1952] INTRODUCTION TO METAMATHEMATICS (North-Holland, Amsterdam)

KREISEL, J. AND KRIVINE, J. L.

[1967] ELEMENTS OF MATHEMATICAL LOGIC (North-Holland, Amsterdam)

KUNEN, K.

[1971] *On the GCH at measurable cardinals*, in [Gandy and Yates 1971] pp.107–110

[1977] *Combinatorics*, in [Barwise 1977] pp.371–401

[1978] *Saturated ideals*, Journal of Symbolic Logic 43, 65–76

[1984] *Random and Cohen reals*,

KUNEN, K. AND VAUGHAN, J. E. (EDITORS)

[1984] HANDBOOK OF SET THEORETIC TOPOLOGY (North-Holland, Amsterdam)

KUREPA D.

[1936] *L'hypothése de ramification*, Comptes Rendus Hebdomaires des Séances de l'Academie des Sciences de Paris, Série 202, 185–187

LAVER, R. AND SHELAH, S.

[1981] *The* $\aleph_2$*-Souslin Hypothesis*, Transactions of American Mathematical Society 264, 411–417

MAGIDOR, M.

[1977] *On the singular cardinals problem II*, Annals of Mathematics 106, 517–547

MARTIN, D. A.

[1977] *Descriptive set theory: projective sets*,

MARTIN, D. A. AND SOLOVAY, R. M.

[1970] *Internal Cohen extensions*, Annals of Mathematical Logic 2, 143–178

MCALOON, K.

[1971] *Consistency results about ordinal definability*, Annals of Mathematical Logic 2, 449–467

MENAS, T. K.

[1973] (Ph.D. thesis, California)

MITCHELL, W.

[1972] *Aronszajn trees and the independence of the transfer property*, Annals of Mathematical Logic 5, 21–46

MORLEY, M. (EDITOR)

[1973] STUDIES IN MODEL THEORY (Mathematical Association of America, Buffalo,

NY)

MOSCHOVAKIS, Y. N.

[1980] DESCRIPTIVE SET THEORY (North-Holland, Amsterdam)

MYHILL, J. AND SCOTT, D.

[1971] *Ordinal definability*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 13, 271–278

PRIKRY, K. L.

[1970] *Changing measurable into accessible cardinals*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) 68, 1–55

QUINE, W. V. O.

[1937] *New foundations for mathematical logic*, The American Mathematical Monthly 44, 70–80

[1951] MATHEMATICAL LOGIC (REVISED EDITION; FIRST EDITION 1940) (Harvard University Press, Cambridge , MA)

RAISONNIER, J.

[1984] *A mathematical proof of S.Shelah's theorem on measure problem and related results*, Israel Journal of Mathematics, 48, 48–56

RASIOWA, H. AND SIKORSKI, R.

[1963] MATHEMATICS OF METAMATHEMATICS, Monografie Matematyczne, Volume 41 (Polska Akademia Nauk, Warsaw)

ROSSER, J. B.

[1953] LOGIC FOR MATHEMATICIANS (McGraw-Hill, New York)

[1969] SIMPLIFIED INDEPENDENCE PROOFS (Academic Press, New York)

RUBIN, H. AND RUBIN, J.

[1963] EQUIVALENTS OF THE AXIOM OF CHOICE (North-Holland, Amsterdam)

RUDIN, M. E.

[1977] *Martin's axiom*, in [Barwise 1977], pp.491–501

SACKS G. E.

[1971] *Forcing with perfect closed sets*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 13, 331–355

SHELAH, S.

[1984] *Can you take Solovay's inaccessible away?*, Israel Journal of Mathematics,

48, 1–47

[1998] PROPER AND IMPROPER FORCING (Springer)

SHOENFIELD, J. R.

[1954] *A relative consistency proof*, Journal of Symbolic Logic 19, 21–28

[1967] MATHEMATICAL LOGIC (Addison-Wesley, Reading, MA)

[1971a] *Unramified forcing*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 13, 357–381

[1971b] *Measurable cardinals*, in [Gandy and Yates 1971] pp.19–49

[1975] *Martin's axiom*, The American Mathematical Monthly 82, 610–617

SILVER, J. H.

[1973] *The bearing of large cardinals on constructibility*, in [Morley 1973] pp.158–182

SOLOVAY, R. M.

[1970] *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Annals of Mathematics 92, 1–56

[1971] *Real-valued measurable cardinals*, Proceedings of Symposta in Pure Mathematics 13, 397–428

SOLOVAY, R. M., REINHARDT, W. N. AND KANAMORI, A.

[1978] *Strong axioms of infinity and elementary embeddings*, Annals of Mathematical Logic 13, 73–116

SPECKER, E.

[1953] *The axiom of choice in Quine's "New foundations for mathematical logic"*, Proceedings of the National Academy of Sciences USA 39, 972–975

SUSLIN, M.

[1920] *PROBLÉME 3*, Fundamenta Mathematicae 1, 223

WANG, H.

[1949] *On Zermelo's and von Neumann's axioms for set theory*, Proceedings of the National Academy of Sciences USA 35, 150–155

カナモリ, A./渕野昌 訳

[1998] 巨大基数の集合論 (シュプリンガー・フェアラーク東京)

KOPPERBERG, S./広瀬健 監訳/渕野昌 訳

[1986] 現代のブール代数 (共立出版)

篠田寿一と米澤佳己

[1996]　集合・位相演習 (サイエンス社)

田中一之と鈴木登志雄

[2003]　数学のロジックと集合論 (培風館)

田中俊一

[2000]　位相と論理 (日本評論社)

難波完爾

[1975]　集合論 (サイエンス社)

松坂和夫

[1968]　集合・位相入門 (岩波書店)

松原洋

[1999]　*Non-stationary ideal* と *Universe of sets*, 日本数学会誌「数学」第 51 巻第 1 号，18–33

訳者あとがき

本書は，現代の集合論にとって必須のツールである強制法を実践的に解説した入門書です．ロジック (数理論理学) 専攻の大学院生や数学科の学部生，集合論をツールとして利用する位相空間論などの研究者，そのほか集合論に興味をもつ方々に参考書として活用していただけるものと思います．原著者の Kenneth Kunen (ケネス・キューネン) は，集合論，位相空間論，測度論などの分野でこれまで数々の業績をあげている優れた数学者で，現在ウィスコンシン大学の教授です．

本書は，独立性証明という研究方法を理解してもらい強制法を使いこなしてもらうことだけをめざして，単刀直入に進みます．題材は厳選され，余計な道草は食いません．それでいて，目的にかなったトピックには十分な時間をさいて，さまざまな定義の背景にある思想もていねいに解説しています．このため，1980 年の刊行以来一貫して，本書は強制法入門の決定版との定評を得ており，現在では集合論を研究している数学者に本書 (原著) を読んでいない人はないと断言してよいと思います．

集合論は，19 世紀末にカントールによって創始され，ツェルメロ，フォン・ノイマン，フレンケル，スコーレム，ベルナイスといった人たちによって論理体系として整備されたのち，ゲーデルとコーエンによって連続体仮説や選択公理の無矛盾性と独立性が証明されたというところまでは，よく知られています．しかし，コーエンの強制法を用いた連続体仮説の独立性証明によって，集合論は息の根を止められたどころか，むしろ研究領域として新たな生命を吹き込まれたのだという，いちばん肝心のところが，数学者のコミュニティにおいてすら十分に理解されていないようです．

本書が言葉を尽くして解説するとおり，数学には普通の方法では真偽の決着のつけられない命題が数多くあります．しかし，それは数学の限界ではなく，むしろ数学の豊かさのあらわれと考えることができます．論理的に白黒をはっきりつけられない問題にも，数学的にきちんとアプローチする道はあるのです．そのことが，集合論を含む現代のロジックの最大の発見であろうと思います．

日本国内ですでに数多く刊行されている集合論の教科書の大部分は，数学全般

の基礎知識としての集合と写像の概念と記号法を解説したものです．集合論をひとつの独立した研究領域として論じた日本語の書物は決して多くありません．しかも，その数少ない書物のほとんどが現在入手困難になっています．こうした現状を改善し，生きた研究領域としての集合論を広く認知してもらうために，この訳書が少しでも役立てば幸いです．

なお，本書に含まれる膨大な演習問題は，解答を清書したものを原著者も訳者も持っておらず，現在のところ，公式解答集といえるものがどこにも存在しません．しかし，集合論の普及のためにも，今後なんらかの形でサポートしていきたいと考えています．

渕野昌さん，松原洋さんには，翻訳の構想の段階からいろいろの相談にのっていただきました．嘉田勝さん，吉信康夫さん，依岡輝幸さんには，いろいろの助言をいただきました．日本評論社の高橋健一さんにはずいぶんお手間をかけさせました．ありがとうございます．また，最初の編集担当者であった横山伸さん (現，数学書房) には，感謝とともに，訳者の怠慢のためにご心配をおかけしたことをお詫び申し上げたいと思います．

2007 年 9 月

藤田 博司

記号索引

人名索引

事項索引

■た■

■な■

■は■

■ま■

■や■

■ら■

■わ■

[著者]
ケネス・キューネン (Kenneth Kunen)
Wisconsin 大学教授

[訳者]
藤田博司 (ふじたひろし)
略歴
1964 年　京都府生まれ
1987 年　立命館大学理工学部数学物理学科卒業
1991 年　名古屋大学大学院理学研究科博士後期課程中退
現在　愛媛大学大学院理工学研究科数理物質科学専攻助教
専門は記述集合論.

集合論(しゅうごうろん) — 独立性証明(どくりつせいしょうめい)への案内(あんない)

2008 年 1 月 20 日　第 1 版第 1 刷発行

訳　者　藤 田 博 司
発行者　林　克 行
発行所　株式会社 日 本 評 論 社
〒170-8474 東京都豊島区南大塚 3-12-4
電話 (03) 3987-8621 [販売]
(03) 3987-8599 [編集]
印　刷　三美印刷
製　本　松岳社
装　釘　海保 透

ISBN 978-4-535-78382-9